

中山の予想について

筑波大数学系 星野光男 (Mitsuo Hoshino)

体上有限次元の多元環に関する一連の予想について述べる。

以下, A は体 F 上有限次元の多元環, J は A の Jacobson 根基, $\ell = \max\{n \mid J^n \neq 0\}$ とする。また, $D = \text{Hom}_F(-, F)$, $()^* = \text{Hom}_A(-, A)$ とおく。すべての加群は有限生成で特に: とわらない限り右加群である。極小入射分解

$$I: 0 \rightarrow A \rightarrow I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots$$

を固定する。すべての $n \geq 0$ に対し I_n が射影的のとき, $\text{dom dim } A = \infty$ と定義する。

§1. 予想.

次のような一連の予想がある。

$$(C1) \quad \sup\{\text{proj dim } M \mid \text{proj dim } M < \infty\} < \infty.$$

$$(C2) \quad \text{任意の単純加群 } S \text{ に対し } \text{Ext}^n(S, A) \neq 0 \text{ なる } n \geq 0$$

が存在する。

(C3) $\text{dom dim } A = \infty$ ならば A は自己入射的である。

(C4) すべての $n \geq 1$ に対し $\text{Ext}^n(DA, A) = 0$ ならば A は自己入射的である。

(C5) A が自己入射的のとき、すべての $n \geq 1$ に対し $\text{Ext}^n(M, M) = 0$ なる加群 M は射影的である。

(C1) は昔からの予想であるが至所は明らかなではない。

(C2) は [AR], (C3) は [N] (および [M]), (C4), (C5) は [T] による。上の予想について次の関係がある。

命題. $(C1) \Rightarrow (C2) \Rightarrow (C3) \Leftrightarrow (C4) \Leftrightarrow (C5)$ 。

証明. $(C1) \Rightarrow (C2)$: すべての $n \geq 1$ に対し $\text{Ext}^n(S, A) = 0$ なる単純加群 S が存在したとする。 S の極小射影分解 $\cdots \xrightarrow{p_2} P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} S \rightarrow 0$ をとる。任意の $n \geq 1$ に対し、左加群の完全列 $0 \rightarrow P_0^* \rightarrow P_1^* \rightarrow \cdots \rightarrow P_n^* \rightarrow (\text{Ker } p_n)^* \rightarrow 0$ を得る。

(C2) $\Rightarrow$ (C3): S を任意の単純加群とする。すべての $n \geq 0$ に対し $\text{Ext}^n(S, A) \cong \text{Hom}(S, I_n)$ であることに注意すればよい。

(C3) $\Rightarrow$ (C4): $U = A \oplus DA$, $B = \text{End } U$ とおく。 B 加群 $\text{Hom}(U, DA)$ は射影的かつ入射的であるから、すべての $n \geq 1$ に対し $\text{Ext}^n(DA, A) = 0$ なるは $\text{dom dim } B = \infty$ となる。

(C3) $\Rightarrow$ (C5): $U = A \oplus M$, $B = \text{End } U$ とおく。 A が自己入射的なるは B 加群 $\text{Hom}(U, A)$ は射影的かつ入射的となる。更に、すべての $n \geq 1$ に対し $\text{Ext}^n(M, M) = 0$ なるは $\text{dom dim } B = \infty$ となる。

(C4) か、(C5) $\Rightarrow$ (C3): $\text{dom dim } A = \infty$ とし、 U を極小忠実加群とする。 $B = \text{End } U$ とおき、函手 $\text{Hom}_A(-, U)$, $\text{Hom}_B(-, U)$ を続け A の極小入射分解 I に作用させる。 U の生成する加法圏を $\text{add } U$ とすれば、すべての $n \geq 1$ に対し $I_n \in \text{add } U$ であるから、次の行完全な可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \rightarrow \text{End}_B U & \rightarrow & \text{Hom}_B(\text{Hom}_A(I_0, U), U) & \rightarrow & \text{Hom}_B(\text{Hom}_A(I_1, U), U) & \rightarrow & \cdots \\
 \uparrow & & \uparrow \wr & & \uparrow \wr & & \\
 0 \rightarrow A & \longrightarrow & I_0 & \longrightarrow & I_1 & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

従って、 $A \cong \text{End}_B U$, かつすべての $n \geq 1$ に対し

$$\text{Ext}_B^n(U, U) = 0 \text{ である。 また, } U_A \in \text{add } A_A \text{ から } {}_B B \in \text{add}_B U$$

から、 $A {}^D U \in \text{add}_{A_A} A$ から ${}_B D B \in \text{add}_B U$ が従う。 故に、すべての

の $n \geq 1$ に対し $\text{Ext}_B^n(DB, B) = 0$ となる。(C4) から B は自己入射的となり、従って (C5) から ${}_B U$ は射影的となる。このとき、 A と B とは森田同値となるから、 A が自己入射的となる。

§2. 事実.

既に得られた主な結果を紹介する。

- (a) A/J^l が有限表現型 (例えば, $l \leq 1$ のとき) ならば (C1) ~ (C5) がすべて成立。
- (b) $\text{inj dim } A < \infty$ ならば (C1) が成立。
- (c) $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ が次数付き多元環で A_0 の Gabriel quiver に oriented cycle がなければ (C2) が成立 ([W], [H2])。
- (d) $l \leq 2$ ならば (C2) が成立 ([FZ])。
- (e) A が右側単列環ならば (C2) が成立。
- (f) F が閉体のとき、 A が QF-3 の極小忠実加群 U に対し $\text{End } U$ の Jacobson 根基 N が $N^3 = 0$ をみたすならば (C3) が成立。
- (g) F が閉体のとき、 $l \leq 2$ ならば (C4) が成立 ([H2])。
- (h) 有限群 G に対し $A \cong FG$ ならば (C5) が成立 ([S])。
- (i) 遺伝的多元環 B に対し $A \cong B \ltimes B$ ならば (C5) が成

立 ([H1]).

(j) F が体 のとき, $\ell \leq 2$ ならば (C5) が成立.

(a) の (C4), (e) は次節で示す. (a) の (C4) 以外, (b) は易しい. (f) は (2), (j) および (C3) $\Leftrightarrow$ (C4) から (C5) であることが従う. (j) については [H1] を参照された.

§3. 反射加群.

与えられた加群 M に対し n 番目の syzygy を $\Omega^n M$ で表す. また, $\phi_M: M \rightarrow M^{**}$ を自然な準同型写像とする.

補題. M を直既約非射影加群で $\text{Ext}^1(M, A) = 0$ とする.

(1) ΩM は直既約で $\Omega(\Omega M)^* \cong M^*$.

(2) M に ϕ_M がなる $\Leftrightarrow \Omega M$ が反射的.

(3) M が反射的 $\Leftrightarrow \Omega M$ が反射的で $\text{Ext}^1((\Omega M)^*, A) = 0$.

証明. $P \rightarrow M \rightarrow 0$ を極小射影被覆とし, 函手 $()^*$ を完全列 $0 \rightarrow \Omega M \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$ に作用させ次の完全列を得る

$0 \rightarrow M^* \rightarrow P^* \rightarrow (\Omega M)^* \rightarrow 0$. これから (1) の後半が従う. また,

次の行完全な可換図式を得る

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & \Omega M & \rightarrow & P & \rightarrow & M \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow \phi_{\Omega M} & & \downarrow S & & \downarrow \phi_M \\
 0 & \rightarrow & (\Omega M)^{**} & \rightarrow & P^{**} & \rightarrow & M^{**} .
 \end{array}$$

(1) の前半は $\text{End } \Omega M \cong \text{End } M$ による。(2) は $\text{Ker } \phi_M \cong \text{Cok } \phi_{\Omega M}$ かつ, (3) は $\text{Cok } \phi_M \cong \text{Ext}^1((\Omega M)^*, A)$ かつ従う。

系. $\text{inj dim}_A A < \infty$ のとき, すべて $n \geq 1$ に対して $\text{Ext}^n(M, A) = 0$ なるのは M は反射的である。

証明. M は直既約非射影加群と仮定できる。 $j = \text{inj dim}_A A$ とすれば任意の $n \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned}
 \text{Ext}^1((\Omega^n M)^*, A) &\cong \text{Ext}^{j+1}((\Omega^{j+n} M)^*, A) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

である。

命題. M を直既約非射影加群とする。任意 $i \geq 1$ に対して $\text{Ext}^i(M, A) = 0$ とする。或る $m > n \geq 0$ に対して $\Omega^m M \cong \Omega^n M$ なるのは M は反射的である。

証明. 任意の $i \geq n$ に対して $\Omega^{i+(m-n)} M \cong \Omega^i M$, 故に $\Omega^{m-n}(\Omega^i M)^* \cong (\Omega^i M)^*$ である。従って, すべて $i \geq 0$ に

対 $i \geq \Omega^{m-n}(\Omega^i M)^* \cong (\Omega^i M)^*$, $\text{Ext}^i((\Omega^i M)^*, A) = 0$ となる。

系 1. A/J^2 が有限表現型るとき, すべての $n \geq 1$ に対
して $\text{Ext}^n(M, A) = 0$ となるのは M は反射的である。

系 2. A が右側単列環, M が単列加群ですべての $n \geq 1$
に対して $\text{Ext}^n(M, A) = 0$ となるのは M は反射的である。

参考文献

- [AR] M. Auslander and I. Reiten, On a generalized version of the Nakayama Conjecture, Proc. Amer. Math. Soc. 52 (1975), 69-74.
- [FZ] K. R. Fuller and B. Zimmermann-Huisgen, On the Generalized Nakayama Conjecture and Cartan determinant problem, Trans. Amer. Math. Soc. 294 (1986), 679-691.
- [H1] M. Hoshino, Modules without self-extensions and Nakayama's conjecture, Arch. Math. 43 (1984), 493-500.
- [H2] ———, A remark on Wilson's theorem and algebras with radical cube zero, Preprint.

- [M] B. J. Mueller, The classification of algebras by dominant dimension, *Canad. J. Math.* 20 (1968), 398-409.
- [N] T. Nakayama, On algebras with complete homology, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 22 (1958), 300-307.
- [S] R. Schulz, Boundedness and periodicity of modules over QF rings, *J. Algebra* 101 (1986), 450-469.
- [T] H. Tachikawa, Quasi-Frobenius rings and generalizations, *Springer Lecture Notes* No. 351, 1973.
- [W] G. Wilson, The Cartan map on categories of graded modules, *J. Algebra* 85 (1983), 390-398.