

抽象的 Besov 空間 と その応用

筑波大学数学系 村松寿延 (Tosinobu Muramatu)

序. Banach 空間 X の非負作用素 A の分数べきに関する一連の論文で小松彦三郎は空間

$$(0.1) \quad D_q^\sigma(A) := \{x \in X; \lambda^\sigma A^n (\lambda + A)^{-n} x \in L_q^*(\mathbb{R}^+; X)\}$$

を導入し, 詳しく研究している. ただし, σ は正数, $1 \leq q \leq \infty$, n は σ を越える最小の正整数, L_q^* は測度 $d\lambda/\lambda$ に関する L_q 空間を示し, A が非負であるとは, 負数が A のレゾルベント集合に属し,

$$(0.2) \quad \sup\{\|\lambda(\lambda + A)^{-1}\|; \lambda > 0\} = M < \infty$$

が成立すること. 例えば, $X = L_p(\mathbb{R})$, $A = d/dt$ (t は $\mathbb{R}$ の変数), のとき A は非負作用素になり, $D_q^\sigma(A) = B_{p,q}^\sigma(\mathbb{R})$ となり, $X = L_p(\mathbb{R}^n)$, $A = -(\partial^2/\partial x_1^2 + \cdots + \partial^2/\partial x_n^2)$, のときは, $D_q^\sigma(A) = B_{p,q}^{2\sigma}(\mathbb{R}^n)$ となる. ただし, 微分作用素はいわゆる最大作用素とする. この意味で, 一般の非負作用素 A について (0.1) の空間を抽象的 Besov 空間と呼ぶことにする.

抽象的 Besov 空間は Besov 空間の単なる抽象的再構成ではない. 例えば, $-(\text{Stokes 作用素})$ に関するこの空間はもはや古典的な Besov 空間ではないが, Navier-Stokes 方程式の函数解析的な研究において大変有用である.

Navier-Stokes 方程式の函数解析的研究は加藤敏夫・藤田宏の L_2 理論に始まり，近年その L_p 理論が発展しているのだが，それらの研究の主な手段のひとつが作用素の分数ベキである．この分数ベキと抽象的 Besov 空間との関係は

$$(0.3) \quad C_1 \|x\|_{D_1^{\sigma}(A)} \leq \|A^{\sigma} x\|_X \leq C_2 \|x\|_{D_{\infty}^{\sigma}(A)} \quad (C_1 \text{ と } C_2 \text{ は定数})$$

である．これから，抽象的 Besov 空間が分数ベキと同じように使えることが想像できるであろう．実は抽象的 Besov 空間は分数ベキよりは使い方がかなり易しく（ほとんど積分論だけでよい），したがってよい結果が楽に得られるのである．

Navier-Stokes 方程式の研究では上の σ （空間の次数という）が負の場合が必要である．われわれは負の次数の場合についても空間 $D_q^{\sigma}(A)$ を定義し，その性質を調べた．ここではさらに一般化し，ベキ函数 λ^{σ} を重みの函数 $\phi(\lambda)$ にした形で述べる．負次数の抽象的 Besov 空間の一部は Da Prato-Grisvard[5] が extrapolation spaces の名のもとに定義し研究している．

記号． X を Banach 空間， Ω を $\mathbb{R}^n$ の開集合とするとき， $L_p(\Omega; X)$ で Ω 上で定義された X -値強可測で，その X でのノルムが L_p に属するもの全体のなす Banach 空間を示す． ξ で Ω の座標を表すとき測度 $d\xi/|\xi|^n$ についての L_p ノルムをとるときは $L_p^*(\Omega; X)$ と書く． $L_{\infty}^*(\Omega; X)$ は $L_p(\Omega; X)$ に属し， $|\xi| \rightarrow \infty$ のとき $f(\xi) \rightarrow 0$ となる f の全体を示す．

実数 q に対して， $q < \infty - < \infty$ と約束する．

$\mathcal{L}(X, Y)$; X から Y への連続線型作用素の全体のなす空間．

$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$. $s \wedge t = \min \{s, t\}$, $s \vee t = \max \{s, t\}$.

1. 重みの函数の指標. 重みの函数とは正値可測函数 ϕ でその相似比

$$(1.1) \quad \widetilde{\phi}(t) = \sup\left\{ \frac{\phi(ts)}{\phi(s)} ; s > 0 \right\}$$

がすべての正数 t について有限となる函数のことをいい, この場合,

$$(1.2) \quad \underline{\text{ind}} \phi := \sup_{0 < t < 1} \frac{\log \widetilde{\phi}(t)}{\log t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log \widetilde{\phi}(t)}{\log t}$$

$$(1.3) \quad \overline{\text{ind}} \phi := \inf_{t > 1} \frac{\log \widetilde{\phi}(t)}{\log t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \widetilde{\phi}(t)}{\log t}$$

を, それぞれ, ϕ の左指標, ϕ の右指標と呼ぶ. 特に $\underline{\text{ind}} \phi = \overline{\text{ind}} \phi$ のときこれを ϕ の指標といい, $\text{ind} \phi$ で示す. 定義により, ([18]p.43~p.46)

$$(1.4) \quad -\infty < \underline{\text{ind}} \phi \leq \overline{\text{ind}} \phi < \infty$$

$$(1.5) \quad \underline{\text{ind}}(\phi)^\sigma = \sigma \underline{\text{ind}} \phi, \quad \overline{\text{ind}}(\phi)^\sigma = \sigma \overline{\text{ind}} \phi,$$

$$(1.6) \quad \overline{\text{ind}}(1/\phi) = -\underline{\text{ind}} \phi, \quad \underline{\text{ind}}(1/\phi) = -\overline{\text{ind}} \phi,$$

$$(1.7) \quad \underline{\text{ind}} \phi + \underline{\text{ind}} \psi \leq \underline{\text{ind}}(\phi \psi) \leq \overline{\text{ind}}(\phi \psi) \leq \overline{\text{ind}} \phi + \overline{\text{ind}} \psi.$$

特に, ψ が指標を持てば,

$$(1.8) \quad \underline{\text{ind}} \phi + \text{ind} \psi = \underline{\text{ind}}(\phi \psi) \leq \overline{\text{ind}}(\phi \psi) = \overline{\text{ind}} \phi + \text{ind} \psi.$$

例. $\phi(t) = t^\alpha (\log t)^\sigma$ のとき $\text{ind} \phi = \alpha$,

$\phi(t) = t^\alpha \vee t^\beta$ のとき, $\underline{\text{ind}} \phi = \alpha \wedge \beta$, $\overline{\text{ind}} \phi = \alpha \vee \beta$.

積分作用素の有界性を示すのに次の補題を使う.

補題 1. $\widetilde{\phi}$ を重みの函数 ϕ の相似比, $-\alpha < \underline{\text{ind}} \phi \leq \overline{\text{ind}} \phi < -\beta$ とし,

$H_{\alpha, \beta}(t) = t^\alpha \wedge t^\beta$ とおく. $1 \leq r \leq \infty$, $\lambda > 0$ のとき,

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \left\| \widetilde{\phi}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) H_{\alpha, \beta}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \right\|_{L_r^*(\mathbb{R}^+)} &= \left\| \widetilde{\phi}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) H_{\alpha, \beta}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \right\|_{L_r^*(\mathbb{R}^+)} \\ &= \left\| \widetilde{\phi}(t) H_{\alpha, \beta}(t) \right\|_{L_r^*(\mathbb{R}_1^+)} < \infty. \end{aligned}$$

この補題と [18]p.38 の定理 2.6 を使うと,

系 1. $\alpha, \beta, H_{\alpha, \beta}$ と $\widetilde{\phi}$ は補題 1 と同じで, $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $K(\lambda, \mu)$ は $R^+ \times R^+$ 上の $\mathcal{L}(X, Y)$ -値強可測函数で,

$$(1.10) \quad \|K(\lambda, \mu)\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \leq C H_{\alpha, \beta}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \widetilde{\phi}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \text{ a.e. } (\lambda, \mu),$$

が成立する. このとき, 積分作用素

$$(1.11) \quad T f(\lambda) = \int_0^\infty K(\lambda, \mu) f(\mu) \frac{d\mu}{\mu}$$

は, $1 \leq p \leq q \leq \infty$ について, $L_p(R^+; X)$ から $L_q(R^+; Y)$ への有界作用素である.

2. 非負作用素. 小松の定義を少し拡張して,

定義 2. Banach 空間 X の線型作用素 A が非負であるとはある非負数 c_0 があって, (c_0, ∞) が $-A$ のレゾルベント集合に属し,

$$(2.1) \quad \sup\{\|\lambda(\lambda + A)^{-1}\|; \lambda > c_0\} = M < \infty,$$

が成立することをいう.

A を非負作用素とし, $c > c_0$ を一つ固定する. 正整数 k にたいして,

$D^k(A) := \mathcal{D}(A^k)$, ノルムは $\|(c + A)^k x\|$, ($\mathcal{D}$ は定義域を示す)

$D^{-k}(A) := X$ のノルム $\|(c + A)^{-k} x\|$ による完備化,

$D^0(A) := X$, $D^{-\infty}(A) := \bigcup_{k=0}^{\infty} D^{-k}(A)$,

と定義する. 明らかに, k を正整数とすると,

$$D^{k+1}(A) \subset D^k(A) \subset D^0(A) \subset D^{-k}(A) \subset D^{-k-1}(A)$$

で, 埋め込みは連続である.

以下, X は Banach 空間, A を X における非負作用素とする.

定義と簡単な計算により,

定理 2. 任意の整数 k について $D^k(A)$ は c の選び方によらない.

補題 2. (a) $T \in \mathcal{L}(X)$ である $\lambda > 0$ について,

$$(2.2) \quad (\lambda + A)^{-1} T = T (\lambda + A)^{-1}$$

とすると, $TA \subset AT$ で, (2.2) はすべての $\lambda > c$ について成立する.

また, このとき T の $D^{-\infty}(A)$ への拡張 $\mathcal{T}$ で

“すべての整数 k について $\mathcal{T}$ は $D^k(A)$ で連続である”

という性質を持つものがただ一つ存在する. しかも次の性質を持つ:

T が 1 対 1 ならば $\mathcal{T}$ も 1 対 1 である.

$TX \subset D^j(A)$ ならば すべての k について $\mathcal{T} D^k(A) \subset D^{k+j}(A)$,

$$(2.3) \quad \|\mathcal{T}\|_{\mathcal{L}(D^k(A), D^{k+j}(A))} \leq \|(\lambda + A)^j T\|_{\mathcal{L}(X)}.$$

特に, $(\lambda + A)^{-1}$ についてこの結果を適用すると

系 2. $\lambda > c$ について $(\lambda + A)^{-1}$ の $D^{-\infty}(A)$ への拡張 $\mathcal{R}_\lambda$ で 性質:

各整数 k について $\mathcal{R}_\lambda$ は $D^k(A)$ で連続で, $\mathcal{R}_\lambda D^k(A) \subset D^{k+1}(A)$,

$$(2.4) \quad \mathcal{R}_\lambda - \mathcal{R}_\mu = (\mu - \lambda) \mathcal{R}_\lambda \mathcal{R}_\mu,$$

$$(2.5) \quad \|\mathcal{R}_\lambda\|_{\mathcal{L}(D^k(A), D^{k+1}(A))} \leq 1 + \frac{|\lambda - c|}{\lambda} M,$$

$$(2.6) \quad \mathcal{R}_\lambda \mathcal{T} = \mathcal{R}_\lambda \mathcal{T},$$

を満たすものがただ一つ存在する.

3. 抽象的 Besov 空間の定義.

定義 3. A を非負作用素, ϕ を重みの函数とし, $1 \leq q \leq \infty$, $c > c_0$ とする. $\mathcal{A}_\lambda = 1 - \lambda \mathcal{R}_\lambda$ とおく. ℓ と n を $-\ell < \underline{\text{ind}} \phi \leq \overline{\text{ind}} \phi < n$ を満たす最小の非負整数とする. このとき,

$$(3.1) \quad D_q^\phi(A) := \{x \in D^{-\infty}(A); \phi(\lambda) \lambda^{\frac{\ell}{2}} \mathcal{R}_\lambda^{\frac{\ell}{2}} \mathcal{A}_\lambda^n x \in L_q^*(I_c; X)\}$$

と定義し、ノルムを

$$(3.3) \quad \|X\|_{D_q^*(A)} := |X|_{\phi, q, c} + \phi(c) \|c^{\frac{1}{2}} X\|_{D^{\frac{1}{2}}(A)},$$

$$(3.3) \quad |X|_{\phi, q, c} := \|\phi(\lambda) \lambda^{\frac{1}{2}} \mathcal{R}_{\lambda^{\frac{1}{2}}} \mathcal{A}_{\lambda^{\frac{1}{2}}} X\|_{L_q^*(I_c; X)},$$

と定義する。ただし、 $I_c = (c, \infty)$ 。

特に、 $\phi(t) = t^{\sigma}$ のとき、 $D_q^*(A) = D_q^{\sigma}(A)$ と書く。

定義により、

定理3. A, ϕ, q, ℓ と n を定義3のようにとる。このとき、 $D_q^*(A)$ は Banach 空間で、 c の取り方によらない。 $\gamma > 1$ とするとき、

$$|X|_{\phi, q, \gamma c} \text{ と } |X|_{\phi, q, c}$$

$$\phi(\gamma c) \|(\gamma c)^{\frac{1}{2}} \mathcal{R}_{\gamma c^{\frac{1}{2}}} X\|_X \text{ と } \phi(c) \|c^{\frac{1}{2}} \mathcal{R}_{c^{\frac{1}{2}}} X\|_X$$

とはそれぞれ同値である。

X 上の有界線型作用素 T が (2.2) を満たすとき、補題2における T の拡張 $\tilde{T}$ は $D_q^*(A)$ において連続である。

4. 同値なノルム。この項では、

$$(4.1) \quad |X|_{\phi, q, c; k, m} := \|\phi(\lambda) \lambda^k \mathcal{R}_{\lambda^k} \mathcal{A}_{\lambda^m} X\|_{L_q^*(I_c; X)},$$

と書く。

定理4. 非負整数 h, k, m を

$$-h < \underline{\text{ind}} \phi, \quad -k < \underline{\text{ind}} \phi \leq \overline{\text{ind}} \phi < m,$$

となるようにとる。このとき、 $X \in D_q^*(A)$ となる必要十分条件は

$$X \in D^{-h}(A) \text{ かつ } \phi(\lambda) \lambda^k \mathcal{R}_{\lambda^k} \mathcal{A}_{\lambda^m} X \in L_q^*(I_c; X)$$

であって、

$$(4.2) \quad C' \|X\|_{D_q^*(A)} \leq |X|_{\phi, q, c; k, m} + \phi(c) \|c^{\frac{1}{2}} \mathcal{R}_{c^{\frac{1}{2}}} X\|_X$$

$$\leq C \|x\|_{D_q^s(A)}$$

である。ただし、 C と C' は x と c に独立な正定数である。

$$x \in D_q^s(A), \lambda > c_0 \text{ のとき, } R_{\lambda^h} x \in \overline{\mathcal{D}(A)}.$$

$$\text{特に, } \inf \phi > 0 \text{ のとき, } D_q^s(A) \subset \overline{\mathcal{D}(A)}.$$

この定理を証明するための基本的な補題は

補題4. (積分表示) k, m を正整数, $\lambda > c_0$ とし,

$$(4.3) \quad Q_{m,k}(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{m+j-1}{j} t^j, \quad c_{m,k} = k \binom{m+k-1}{k},$$

とおくと, $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ に対して

$$(4.5) \quad x = c_{m,k} \int_{\lambda}^{\infty} \mu^{m-1} A^k (\mu + A)^{-m-k} x \, d\mu \\ + Q_{m,k}(A(\lambda + A)^{-1}) x.$$

証明. 公式

$$\frac{d}{d\mu} Q_{m,k}(A(\mu + A)^{-1}) = c_{m,k} \mu^{m-1} A^k (\mu + A)^{-m-k}$$

と “ $\lambda \rightarrow \infty$ のとき $\lambda(\lambda + A)^{-1} x \rightarrow x$ ” (エルゴード定理) による。

系4. k, m, h, j を非負整数, $s > c_0$ とし,

$$\mu^{k-j} R_{\mu^k} A_{\mu^m} x \in L_1(I_s; X), \quad x \in D^{-h}(A),$$

ならば, $x \in D^{-j}(A)$ で任意の $\lambda > c_0$ について, $R_{\lambda^j} x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$, そして,

$$(4.5) \quad \|R_{\lambda^j} x\| \leq C \|\mu^{k-j} R_{\mu^k} A_{\mu^m} x\|_{L_1(I_s; X)} + C' \lambda^{-j} \|s^h R_{s^h} x\|.$$

ただし, C と C' は x と s に独立な定数である。

定理4は補題4, 系4および系1により証明できる。

5. 稠密性と包含関係. ここで表記の基本的性質を述べる. 証明は容易である。

定理5. (A) 稠密性. ϕ を重みの函数, $1 \leq q \leq \infty$, k を正整数とすると, $D^k(A) \cap D_q^*(A)$ は $D_q^*(A)$ で稠密である. もっと詳しくいうと, 任意の正整数 m と $x \in D_q^*(A)$ について, $D_q^*(A)$ の位相で $\lambda \rightarrow \infty$ のとき $\lambda^m R_{\lambda^m} x \rightarrow x$ である.

特に, $\underline{\text{ind}} \phi \leq 0$ のとき, $D_q^*(A)$ は $X \cap D_q^*(A)$ の $D_q^*(A)$ のノルムによる完備化に等しい.

(B) 包含関係. ϕ と ψ を重みの函数, σ と τ を実数, $1 \leq q \leq \infty$, $1 \leq r \leq \infty$ とする.

(a) $t \geq c$ で $\psi(t) \leq C \phi(t)$, $q \leq r$ ならば $D_q^*(A) \subset D_r^*(A)$.

(b) $\underline{\text{ind}}(\phi/\psi) > 0$ ならば $D_q^*(A) \subset D_r^*(A)$,

特に $\sigma > \tau$ ならば $D_{\infty}^{\sigma}(A) \subset D_1^{\tau}(A)$.

(c) k を正整数とすると, $D_1^k(A) \subset D^k(A) \subset D_{\infty}^k(A)$, 特に, $\mathcal{D}(A)$ が X で稠密ならば $D^k(A) \subset D_{\infty}^k(A)$.

6. 補間定理. 抽象的 Besov 空間は実補間することによって得られる:

定理6. ϕ を重みの函数, k と m を整数で $k < \underline{\text{ind}} \phi \leq \overline{\text{ind}} \phi < m$, $1 \leq q \leq \infty$, とし, $\phi_0(t) = \phi(t)t^{-m}$, $\phi_1(t) = \phi(t)t^{-k}$ とおくと,

$$(6.1) \quad S(q, \phi_0, D^m(A); q, \phi_1, D^k(A)) = D_q^*(A),$$

でノルムは同値である. ただし, 左辺はいわゆる函数をパラメーターにする実補間空間 ([18] を見よ). 特に,

$$(D^m(A), D^k(A))_{\theta, q} = D_q^{\sigma}(A), \quad \sigma = (1 - \theta)m + \theta k,$$

である.

証明. 左辺が右辺に含まれることを示すには定理4を使う.

右辺が左辺に含まれることを示すには補題 4 の積分表示を使えばよい.

この定理と反復補間定理を使うと,

系 6. $1 \leq q \leq \infty$, σ と τ を実数, $0 < \theta < 1$, Y_0 と Y_1 を

$$D_1^\sigma(A) \subset Y_0 \subset D_\infty^\sigma(A), \quad D_1^\tau(A) \subset Y_1 \subset D_\infty^\tau(A)$$

を満たす Banach 空間とすると,

$$(6.2) \quad (Y_0, Y_1)_{\theta, q} = D_q^\eta(A), \quad \eta = (1 - \theta)\sigma + \theta\tau.$$

7. A の拡張と昇降性. $\mathcal{D}(A)$ が X で稠密な場合を考える.

定理 7. A を定義域が X で稠密な非負作用素とすると A を $D^{-\infty}(A)$ 全体で定義された線型作用素 $\mathcal{A}$ に拡張して,

“ $\mathcal{A}$ は $D^k(A)$ から $D^{k-1}(A)$ への作用素として連続”

となるようにでき, そしてこのような拡張は一つに限る.

さらに $\lambda > c_0$ のとき, $\lambda + \mathcal{A}$ の逆作用素 $(\lambda + \mathcal{A})^{-1}$ が存在し, R_λ に等しく,

$$(7.1) \quad D^{-h}(A) = \{x \in D^{-\infty}(A); (c + \mathcal{A})^{-h}x \in X\} = (c + \mathcal{A})^h X,$$

$$(7.2) \quad \|x\|_{D^{-h}(A)} = \|(c + \mathcal{A})^{-h}x\|_X.$$

系 7. 定理 7 の仮定のもとで, $\mathcal{A}$ を定理 7 の拡張とし, k を整数, m を正整数, $\psi(t) = t^{-m}\phi(t)$ とおく. このとき,

$$x \in D^k(A) \Leftrightarrow x \in D^{-\infty}(A) \text{ そして } \mathcal{A}^m x \in D^{k-m}(A),$$

$$x \in D_q^k(A) \Leftrightarrow x \in D^{-\infty}(A) \text{ そして } \mathcal{A}^m x \in D_q^{k-m}(A),$$

さらに,

$$(7.3) \quad C' \|x\|_{D^k(A)} \leq \|\mathcal{A}^m x\|_{D^{k-m}(A)} + \|(c + \mathcal{A})^{-h}x\|_X \leq C \|x\|_{D^k(A)},$$

と,

$$(7.4) \quad C' \|x\|_{D_q^s(A)} \leq \|A^m x\|_{D_q^s(A)} + \phi(c) \|c^h (c + A)^{-h} x\|_X \\ \leq C \|x\|_{D_q^s(A)},$$

が成立する. ただし h は, それぞれ, $-h < k$ または $-h < \underline{\text{ind}} \phi$ を満たす非負整数, C と C' は x と c に独立な正定数である.

8. $-A$ が C_0 半群の生成作用素になる場合. すなわち,

定理 8. $-A$ が一様有界な C_0 半群 $\{T_t\}_{t \geq 0}$ の生成作用素であるとする. つまり,

$$(8.1) \quad \sup\{\|T_t\|; t \geq 0\} = M < \infty,$$

とし,

$$(8.2) \quad S(0) = 0, \quad S(t) = \int_0^t T_s ds \quad (t > 0),$$

と定義し, $S(t)$ の $D^{-\infty}(A)$ への補題 2 による拡張を $\mathcal{S}(t)$ とする. 非負整数 k と m を $-k < \underline{\text{ind}} \phi \leq \overline{\text{ind}} \phi < m$ にとる.

このとき, $x \in D_q^s(A)$ となる必要十分条件は $x \in D^{-\infty}(A)$ そして

$$(8.3) \quad \phi(t^{-1}) t^{-k} \{I - T(t)\}^m \mathcal{S}(t)^k x \in L_q^s(\mathbb{R}^+; X),$$

また,

$$(8.4) \quad \|\phi(t^{-1}) t^{-k} \{I - T(t)\}^m \mathcal{S}(t)^k x\|_{L_q^s(\mathbb{R}^+; X)} \\ + \phi(1) \|x\|_{D^{-h}(A)}$$

は $D_q^s(A)$ のノルムと同値である. ただし, $-h < \underline{\text{ind}} \phi$.

この定理を証明するための鍵は次ぎの

補題 8. m と n を整数で $0 < n < m$ とする. このとき, $x \in \mathcal{D}(A^{n+1})$ に対して,

$$(8.5) \quad A^n x = \frac{1}{K_{n,m}} \int_0^\infty t^{-n-1} \{I - T(t)\}^m x \, dt.$$

が成立する. ただし,

$$(8.6) \quad K_{n,m} = \sum_{k=2}^m \binom{m}{k} \frac{(-1)^{k+n+1}}{n!} k^n \log k.$$

定理 8 の証明. ϱ と n を定義 3 のように取る. $AS(t) = I - T(t)$ であるから, 補題 2 により, $\mathcal{L}(t)$ は $D^j(A)$ を $D^{j+1}(A)$ に写す. したがって, $x \in D_q^*(A)$ のとき $\mathcal{L}(t)^k x \in X$ である. ゆえに, 補題 4 により

$$\begin{aligned} & \phi(1/t) t^{-k} \{I - T(t)\}^m \mathcal{L}(t)^k x \\ &= \int_1^\infty K(t, \lambda) \phi(\lambda) \lambda^{\frac{1}{2}} \mathcal{A}_\lambda^n \mathcal{R}_\lambda^{\frac{1}{2}} x \frac{d\lambda}{\lambda} + K_0(t) \phi(1) \mathcal{R}_1^{\frac{1}{2}} x, \end{aligned}$$

$$K(t, \lambda) = c_{m+\frac{1}{2}, k+n} \frac{\lambda^m \phi(1/t)}{t^k \phi(\lambda)} A^k (\lambda + A)^{-m-k} \{I - T(t)\}^m S(t)^k,$$

$$K_0(t)$$

$$= \frac{\phi(1/t)}{t^k \phi(1)} Q_{\frac{1}{2}+m, k+n} (A(1+A)^{-1}) (1+A)^{-m} \{I - T(t)\}^m S(t)^k,$$

である. $AS(t) = I - T(t)$ であるから,

$$\|K(t, \lambda)\| \leq C \widetilde{\phi}(t^{-1} \lambda^{-1}) H_{-k,m}(\lambda t),$$

$$\|K_0(t)\| \leq C \widetilde{\phi}(t^{-1}) H_{-k,m}(t),$$

ただし, $H_{-k,m}(t) = \min\{t^{-k}, t^m\}$.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \widetilde{\phi}(t^{-1} \lambda^{-1}) H_{-k,m}(\lambda t) \frac{d\lambda}{\lambda} &= \int_0^\infty \widetilde{\phi}(t^{-1} \lambda^{-1}) H_{-k,m}(\lambda t) \frac{d\lambda}{\lambda} \\ &= \int_0^\infty \widetilde{\phi}(s^{-1}) H_{-k,m}(s) \frac{ds}{s} < \infty, \end{aligned}$$

であるから, [18]p.38 の定理 2.6 により, (8.3) および

$$\|\phi(1/t) t^{-k} \{I - T(t)\}^m \mathcal{L}(t)^k x\|_{L_q^*(\mathbb{R}^+, X)} \leq C \|x\|_{D_q^*(A)},$$

をうる.

逆に, $x \in D^{-h}(A)$ で (8.3) が成り立つとする. (8.4) と $AS(t)$

$= I - T(t)$ により,

$$\begin{aligned} & \phi(\lambda) \lambda^{\frac{1}{2}} \mathcal{A}_\lambda^{k+n} \mathcal{R}_\lambda^{\frac{1}{2}} x \\ &= C_1 \int_0^\infty t^{-k-n} \{I - T(t)\}^{k+\frac{1}{2}+m+n} \phi(\lambda) \lambda^{\frac{1}{2}} \mathcal{R}_\lambda^{k+\frac{1}{2}+n} x \frac{dt}{t} \\ &= C_1 \int_0^\infty K_2(t, \lambda) \phi(1/t) \{I - T(t)\}^m \mathcal{A}(t)^k x \frac{dt}{t}, \end{aligned}$$

$$K_2(t, \lambda) = C_1 \frac{\lambda^{\frac{1}{2}} \phi(\lambda)}{t^n \phi(1/t)} \{I - T(t)\}^{\frac{1}{2}+n} A^k (\lambda + A)^{-k-\frac{1}{2}-n},$$

である. そして,

$$\|K_2(t, \lambda)\| \leq C_2 \widetilde{\phi}(t^{-1} \lambda^{-1}) H_{-k, m}(\lambda t),$$

より, $\phi(\lambda) \lambda^{\frac{1}{2}} \mathcal{A}_\lambda^{k+n} \mathcal{R}_\lambda^{\frac{1}{2}} x \in L^*(R^+; X)$ がわかり証明が終わる.

例. $X := L_p(R)$, $x(s) \in X$ に対して

$$(T(t)x)(s) = x(s-t)$$

と定義すると, $\{T(t)\}$ は一様有界 C_0 群でその生成作用素は $-d/ds$.

ゆえに, $A = d/ds$ に対して, 例えば, $0 < \sigma < 1$ のとき, $x \in D_\sigma^q(A)$

となる必要で十分な条件は

$$“x \in L_p(R) \text{ かつ } t^{-\sigma} \|x(s) - x(s-t)\|_{L_p(R)} \in L^*(R^+)”$$

である. すなわち, この場合, 抽象的 Besov 空間は古典的な Besov 空間に一致する.

付記. 非線型偏微分方程式への応用は時間がないので省略する. [5]を参照してください.

文 献

- [1] Aronszajn, N., Mulla, F. and Szeptycki, P.; On spaces of potentials connected with L^p classes, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 13 (1963), 211-306.

- [2] Bergh, J. and Löfström, J.; Interpolation spaces. An introduction. Grundlehren Math. Wiss. **223**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.
- [3] Boyd, D. W.; The Hilbert transform on rearrangement-invariant spaces, Can. J. Math., **19** (1967), 599-616.
- [4] Butzer, P. L. and Berens, H.; Semi-groups of operators and approximation. Grundlehren Math. Wiss. **145**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1967.
- [5] Da Prato, G. and Grisvard, P.; Maximal regularity for evolution equations by interpolation and extrapolation. Jour. Funct. Analysis, **58** (1984), 107-125.
- [6] Kobayashi, T. and Muramatu, T.; Abstract Besov space approach to the nonstationary Navier-Stokes equations. to appear in Math. Methods in Applied Sciences.
- [7] Komatsu, H., Fractional powers of operators. Pacific J. Math., **19** (1966), 285-346.
- [8] Komatsu, H., Fractional powers of operators II: Interpolation spaces. Pacific J. Math., **21** (1967), 89-111.
- [9] Komatsu, H., Fractional powers of operators III: Negative powers. J. Math. Soc. Japan **21** (1969), 205-220.
- [10] Komatsu, H., Fractional powers of operators IV: Potential operators. J. Math. Soc. Japan **21** (1969), 221-228.
- [11] Komatsu, H., Fractional powers of operators V: Dual operators J. Fac. Sci. Univ. Tokyo IA **17** (1970), 373-396.
- [12] Komatsu, H., Fractional powers of operators VI: Interpolations of non-negative operators and imbedding theorem. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo IA **19** (1972), 1-63.

- [13] Lions, J.-L. and Peetre, J., Sur une classe d'espaces d'interpolation. Publ. Math. I.H.E.S., **19** (1964), 5-68.
- [14] Merucci, C.; Interpolation réelle avec fonction paramètre : réitération et applications aux espaces $\Lambda^p(\varphi)$ ($0 < p \leq \infty$), C. R. Acad. Sci. Paris, I, **295** (1982), 427-430.
- [15] Muramatu, T., Products of fractional powers of operators. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo IA **17** (1970), 581-590.
- [16] Muramatu, T.; On Besov spaces of functions defined in general regions, Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ., **6** (1970/1971), 515-543.
- [17] Muramatu, T.; Besov spaces and Sobolev spaces of generalized functions defined on a general region, Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ., **9** (1974), 325-396.
- [18] Muramatu, T.; Interpolation of spaces and linear operators, Kinokuniya-shoten, Tokyo, 1985 (in Japanese).
- [19] Muramatu, T.; A remark on ergodic theorems for pseudo-resolvents, Proc. Japan Acad, **61** (1985), 59-62.
- [20] Peetre, J.; New Thoughts on Besov Spaces, Duke Univ. Math. Ser. **1** (1974). Durham, N. C., U.S.A.
- [21] Stein, E. M.; Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, U.S.A., 1970.
- [22] Taibleson, M. H.; On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n-space I, J. Math. Mech. **13** (1964), 407-479.
- [23] Triebel, H.; Spaces of Besov-Hardy-Sobolev Type, Teubner-Texte Math., Teubner, Leipzig, 1978.
- [24] Yoshikawa, A.; Fractional powers of operators, interpolation

theory and imbedding theorems, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, IA 18
(1971), 335-362.