

京都大学	博士（理 学）	氏 名	大下 達也
論文題目	On higher Fitting ideals of Iwasawa modules of ideal class groups over imaginary quadratic fields and Euler systems of elliptic units		
(論文内容の要旨)			
岩澤理論は整数論の一分野であり、イデアル類群や楕円曲線のセルマー群等、代数的な数論的対象の $\mathbb{Z}_p$ 拡大に沿った挙動 (岩澤加群) と、複素解析的な対象である L 関数を p 進世界で結び付ける理論である. その中でも岩澤主予想は、岩澤加群の“特性イデアル”と呼ばれる不変量を、L 関数の p 進類似である“p 進 L 関数”によって記述する、特に重要な定理・予想である. (岩澤主予想が解決しているか否かは数論的対象ごとに異なる.) 特性イデアルは岩澤加群の重要な不変量であるが、そのみでは捻れ岩澤加群の擬同型類の決定等はできず、まだ精密化の余地が残っている. 栗原将人氏 (慶應義塾大学) は、特性イデアルよりも深い情報を持ち、擬同型類を決定できる“高次フィッティング・イデアル”と呼ばれる不変量を研究することで、岩澤主予想の精密化を行った. 栗原氏は、総実代数体を基礎体とするイデアル類群から定まる岩澤加群の奇指標部分の研究を行い、次の意味で、その高次フィッティング・イデアルを決定した: “ゼータ関数の類似”であるスティッケルベルガー元と呼ばれる元を用いて、“高次スティッケルベルガー・イデアル”というイデアルを定義し、それが高次フィッティング・イデアルと一致することを証明した. 栗原氏の構成した高次スティッケルベルガー・イデアルは、“ガウス和”型のオイラー系のコリヴァギン微分類を用いて定義されるイデアルであると解釈することもできる. 本論文において、大下氏は、虚二次体のアーベル拡大上の $\mathbb{Z}_p$ または $\mathbb{Z}_p^2$ 拡大に沿った岩澤加群の高次フィッティング・イデアルに関する研究を行った. 楕円単数のオイラー系のコリヴァギン微分類を用いて、栗原氏の高次スティッケルベルガー・イデアルの類似となるような岩澤代数の上昇フィルトレーションを構成し、それらが、イデアル類群から定まる岩澤加群の高次フィッティング・イデアルの“上界”を与えることを証明した. 大下氏の結果を述べるために、記号の準備を行う. K を虚二次体とする. K_0 を K 上の有限次アーベル拡大体とし、$\Delta := \text{Gal}(K_0/K)$ とおく. 素数 p を $\#(\mathcal{O}_{K_0}^\times)_{\text{tors}} \cdot \#\Delta$ を割り切らないようにとる. K_∞ を K 上アーベルな、K_0 の $\mathbb{Z}_p$ または $\mathbb{Z}_p^2$ 拡大体とし、$\Gamma := \text{Gal}(K_\infty/K_0)$, 及び $\mathcal{G} := \text{Gal}(K_\infty/K) = \Delta \times \Gamma$ とおく. 岩澤代数 (完備群環) Λ を $\Lambda := \mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]]$ により定義する. $\hat{\Delta} := \text{Hom}(\Delta, \overline{\mathbb{Q}}_p^\times)$ とおく. 各指標 $\chi \in \hat{\Delta}$ に対して、$\mathbb{Z}_p[\Delta]$ 代数 $\mathcal{O}_\chi$ を、$\mathbb{Z}_p$ 代数としては $\mathbb{Z}_p[\text{Im } \chi]$ と同型であって、Δ が χ を通して作用するものと定める. また、Λ 代数 Λ_χ を $\Lambda_\chi := \mathcal{O}_\chi[[\Gamma]]$ に			

より定める. Λ 加群 M に対して, $M_\chi := M \otimes_\Lambda \Lambda_\chi$ とおく. 代数体 F に対して, F のイデアル類群の p シロ一部分群を A_F とおく. X をノルム写像に関する射影系 $\{N_{F'/F}: A_{F'} \rightarrow A_F\}$ (ここで $F \subset F'$ は K_∞/K_0 の中間体で K_0 上有限次拡大となるものを走る) の射影極限により定まる Λ 加群とする. X は有限生成捻れ Λ 加群である. X の最大擬零部分 Λ 加群を X_{fin} とおき, $X' := X/X_{\text{fin}}$ と定める. 非負整数 i に対し, Λ_χ 加群 X'_χ の i 次フィッティング・イデアルを $\text{Fitt}_{\Lambda_\chi, i}(X'_\chi)$ とおく.

大下氏は, 各指標 $\chi \in \hat{\Delta}$ に対して楕円単数のオイラー系を用いて栗原氏の高次スティッケルベルガー・イデアルの類似となるような Λ_χ のイデアル $\mathfrak{C}_{i, \chi}^{\text{ell}}$ を構成し, 栗原氏の手法を拡張して, 次の定理を得た.

定理 $\chi \in \hat{\Delta}$ を非自明な指標とし, もし K_0 が 1 の原始 p 乗根を含めば, 更に $\chi \neq \omega$ かつ $\chi \neq \chi^{-1}\omega$ であると仮定する. ここで, $\omega \in \hat{\Delta}$ はタイヒミュラー指標である. 以下の条件の一方を仮定する.

- p が $K/\mathbb{Q}$ で分解する.
- p は $K/\mathbb{Q}$ で不分解 (分岐か惰性) とし, p の上にある K のただ 1 つの素点 $\mathfrak{p}$ に対して, $\chi|_{\text{Gal}(\overline{K}_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}})} \neq 1$ が成立する (ここで, $K_{\mathfrak{p}}$ は $\mathfrak{p}$ に於ける K の完備化である).

このとき, 次が成立する.

1. K_∞/K で分岐する, p の上にある K の素点 $\mathfrak{p}$ に対して $\chi|_{\text{Gal}(\overline{K}_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}})} \neq 1$ が成立すると仮定する. このとき, $\mathfrak{C}_{0, \chi}^{\text{ell}} \subseteq \text{Fitt}_{\Lambda_\chi, 0}(X'_\chi)$ が成立する.
2. 任意の非負整数 i に対して, Λ の高さ 2 以上のイデアル $J_{i, \chi}$ であって, $J_{i, \chi} \mathcal{I}_{T, \chi}^3 \text{Fitt}_{\Lambda_\chi, i}(X'_\chi) \subseteq \mathfrak{C}_{i, \chi}^{\text{ell}}$ を満たすものが存在する ($\mathcal{I}_T$ は“誤差”であり, 分解部分群の作用から具体的に定まる Λ のイデアルである).

更に, $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p$ のとき, ある弱い条件の下で, 任意の非負整数 i に対して, $\text{ann}_{\Lambda_\chi}(X_{\text{fin}}) \text{Fitt}_{\Lambda_\chi, i}(X'_\chi) \subseteq \mathfrak{C}_{i, \chi}^{\text{ell}}$ が成立する.

本論文における研究手法は, より一般の“ルビン型のオイラー系”を持つガロア表現から定まる岩澤加群の高次フィッティング・イデアルの研究にも有効なものである.

以上が本論文の主要結果である.

(論文審査の結果の要旨)

大下氏は、整数論の中でも、特にゼータ関数とイデアル類群を結びつける岩澤理論に関する研究を行ってきた。岩澤理論は 1950 年代に岩澤健吉氏により創始された理論である。岩澤理論における特筆すべき結果として、円分体のイデアル類群から定まるガロア群の完備群環（岩澤代数）の特性イデアルと、 p 進 L 関数から定まる特性イデアルが等しいという「岩澤主予想」の解決が挙げられる。最近では、岩澤主予想をさらに一般化・精密化する研究が国内外の多くの研究者により進められている。

最近、栗原将人氏（慶應義塾大学）は、円分体のイデアル類群の奇指標部分の岩澤主予想を高次フィッティング・イデアルとよばれる環論的不変量を用いて精密化することに成功した。しかし、栗原氏の手法は、スティッケルベルガー元と呼ばれるガロア群の群環の特別な元を用いて岩澤代数のイデアルを構成するもので、そのままでは一般化できない。

大下氏は、虚二次体の岩澤理論を深く研究し、高次スティッケルベルガー・イデアルの類似となる岩澤代数のイデアル $\mathfrak{C}_{i,X}^{\text{ell}}$ を、楕円単数のオイラー系を用いて構成した。そして、イデアル $\mathfrak{C}_{i,X}^{\text{ell}}$ を用いて虚二次体の $\mathbb{Z}_p$ 拡大や $\mathbb{Z}_p^2$ 拡大のイデアル類群から定まる岩澤加群の高次フィッティング・イデアルを評価することで、虚二次体の岩澤主予想を精密化することに成功した。

この結果は、栗原氏の手法が、より一般に“ルビン型のオイラー系”を持つ数論的対象の岩澤理論にも応用可能であることを示したものであり、学術的価値の大きいものである。また、大下氏は、円分体のイデアル類群の偶指標部分や、一般の高次元ガロア表現に付随するオイラー系についても、いくつかの技術的仮定の下で高次フィッティング・イデアルを評価する結果を得ており、今後さらなる進展が期待される。

本論文は Kyoto Journal of Mathematics 誌に掲載が決定済みであり、高く評価されている。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、論文内容とそれに関連した事項について平成 25 年 1 月 17 日に試問を行った結果、全調査委員の一致で合格と認めた。