

底部スリットを有する開水路流れの 特性について(第2報)

中 川 博 次・宇 民 正

VARIED FLOW IN OPEN CHANNEL WITH BOTTOM DIVERSION RACKS (II)

By *Tadashi* UTAMI and *Hiroji* NAKAGAWA

Synopsis

The flow over bottom racks is investigated theoretically and experimentally. At the first, the distribution of velocity, pressure and stream lines in local phenomena which appear on the drop are analyzed by means of the curved coordinate system and on the assumption of equi-energy along stream line.

On the basis of that result, hydraulic characteristics of flow on the bottom racks such as variation of energy, flow rate or depth of flow are made clear. At the last, characteristics of critical point of one-dimensional analysis is examined and water surface profile of the flow over bottom racks or free overfall is explained clearly.

1. ま え が き

ダムの余水吐や流量配分構造物などにみられる流量が局所的に変化する流れに対し、その解明が要請されている。著者らはいままでに底部分水工上の流れについて漸変流としての一次元解析法および二次元的な解析法について検討を加えるとともに、急変流で常流遷移の場合について理論的、実験的考察を行なってきた¹⁾。本研究では急変流で常流から射流に遷移する場合についてその局所的な現象の解明とそれに基づく流れの巨視的な解析(水面支配の状態、水深変化、流量変化およびエネルギー変化)を行なう。

2. 段落流に関する理論的考察

底部分水工上流周辺で流れが常流から射流に遷移する場合の段縁点での急変流の性状は段落流のそれと類似する点とが多いという予測の下に、段落流に関する理論的考察を行なう。

(1) 流速分布の基礎方程式

流れの基礎方程式としての運動方程式および連続の式はつぎのように表わされる。

$$\mathbf{g} \cdot \text{grad} H = \mathbf{V} \times \text{curl} \mathbf{V} + \nabla^2 \varepsilon \mathbf{V} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{div} \mathbf{V} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに、

$$H = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z \cos \theta + \Omega \quad \dots\dots\dots (3)$$

v = 流速の絶対値, g = 重力加速度, p = 圧力, $\mathbf{V}$ = 流速ベクトル, z = 水路床からの鉛直高さ, θ = 水路床こう配, ε = 渦動粘性係数, および Ω = 水路床の基準水平面からの高さである。

流れは二次元的であるとし、流線に沿った座標軸 s および鉛直面内で流線と直交する座標軸 n とからなる直交曲線座標系を用いるとき、上式はそれぞれつぎのようになる。

$$\frac{g}{H_1} \frac{\partial H}{\partial s} = \nabla^2 \epsilon v \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\frac{g}{H_2} \frac{\partial H}{\partial n} = \frac{v}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial n} (H_1 v) \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial s} (H_2 v) = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2}$$

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial n}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial n}\right)^2}$$

であり、 H_1 および H_2 はここでは長さの次元を持つように選ぶから、 n および s は無次元量となる。また水路底上では $n=0$ 、自由水面上では $n=1$ である。

後述するように、 $\partial H / \partial s$ を 0 と仮定しうることが実験的に示され、(4) 式から次の関係を得る。

$$\frac{g}{H_1} \frac{\partial H}{\partial s} = 0$$

すなわち次式が成立する。

$$H = H(n) \quad \dots\dots\dots (7)$$

上流の適当な位置 ($s=s_0$) に基準断面をとり、その断面で $H_2=h_0$ (基準断面での水深) となるように定める。さらにその断面での圧力は静水圧分布をするとし、流速も与えられているものとする。すなわち、基準断面において、

$$\begin{cases} s=s_0 \\ H_2=h_0 \\ v=v_0(n) \\ p=\rho g(h_0-z)\cos\theta \end{cases} \quad \dots\dots\dots (8)$$

とする。このとき、 H は次式で与えられる。

$$H(n) = \frac{v_0^2(n)}{2g} + h_0 \cos\theta + \Omega_0 \quad \dots\dots\dots (7')$$

つぎに連続の式 (6) から $H_2 v$ は n のみの関数となり、基準断面での条件を考慮して次式が得られる。

$$H_2 v = h_0 \cdot v_0(n) \quad \dots\dots\dots (6')$$

また (5) 式から次式を得る。

$$\frac{g}{H_2} \frac{\partial H}{\partial n} = v \left(\frac{H_1}{H_1 H_2} \frac{\partial v}{\partial n} + \frac{v}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial n} \right) = \frac{v}{H_2} \frac{\partial v}{\partial n} + \frac{v^2}{R} \quad \dots\dots\dots (5')$$

ここで R は流線の曲率半径であり、次の関係が成立つ。

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial n}$$

(5') 式に (7') 式を代入して変形すると次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial n} (v_0^2 - v^2) = \frac{2H_2}{R} v^2 \quad \dots\dots\dots (9)$$

(5') 式あるいは (9) 式が段落流の流速を与える基礎方程式である。この何れかの式を次の3つの方法で解く。

i) 解法(I) 曲率について次の仮定を設ける。

$$\frac{H_2}{R} = \frac{h}{R_e} n^m \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 R_e は水面における曲率半径であり、 m は s の関数である。そのとき (9) 式は

$$\frac{\partial v_0^2}{\partial n} = \frac{\partial v^2}{\partial n} + \left(\frac{2h}{R_e} n^m \right) v^2 \quad \dots\dots\dots (11)$$

となる。これは v^2 に関する線型微分方程式であり、次の解を得る。

$$v^2 = \exp \left\{ 2\kappa(1-n^{m+1}) \right\} \left\{ v^2(s, 1) - \int_n^1 \frac{\partial v_0^2}{\partial n} \exp(2\kappa n^{m+1}) dn \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで、 $v(s, 1)$ は表面 ($n=1$) における流速であり、また

$$\kappa \equiv h/R_e(m+1) \quad \dots\dots\dots (13)$$

である。段落流の段縁の流速分布を与える式として Jaeger²⁾ は

$$v = v(s, 1) \cdot \exp \kappa \left\{ 1 - \left(\frac{z}{h} \right)^{m+1} \right\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

を導いているが、それはポテンシャル流の仮定に基づいているので、(14) 式は (12) 式中の最後の積分を含まない結果になっている。

ii) 解法 (II) (5') 式を変形すると次のようになる。

$$g \frac{\partial H}{\partial n} = v \frac{\partial v}{\partial n} + v^2 \frac{\partial}{\partial n} (\log H_1)$$

上式中の H に (7') 式を代入し、また、

$$H_1 = \exp(an + b), \quad a = a(s), \quad b = b(s)$$

を仮定すると、上式は次のように変形される。

$$\frac{\partial v_0^2}{\partial n} = \frac{\partial v^2}{\partial n} + 2av^2$$

これは v^2 に関する線型微分方程式であり、次の解を得る。

$$v^2 = \exp 2a(1-n) \cdot \left\{ v^2(s, 1) - \int_n^1 \frac{\partial v_0^2}{\partial n} \exp 2a(n-1) \cdot dn \right\}$$

iii) 解法 (III) (6') 式から得られる関係式

$$H_2 = h_0 v_0(n)/v$$

を (5') 式に代入して変形すると次式を得る。

$$\frac{v_0}{v} \frac{\partial v_0}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} + \frac{h_0}{R} v_0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

上式は非線型であるから、左辺の v を断面平均流速 v_m で近似することにより線型化し、さらに曲率は次式で与えられるとする。

$$1/R = (1/R_e) n^m, \quad m = m(s) \quad \dots\dots\dots (16)$$

このとき (15) 式は

$$\frac{\partial v}{\partial n} = -\frac{h_0}{R_e} v_0 n^m + \frac{v_0}{v_m} \frac{\partial v_0}{\partial n} \quad \dots\dots\dots (17)$$

となり、これを $n=0$ から $n=1$ まで積分して、

$$v - v_i = -\frac{h_0}{R_e} \int_0^n v_0 n^m dn + \frac{1}{2v_m} (v_0^2 - v_{0i}^2) \quad \dots\dots\dots (18)$$

を得る。ここで添字 i は $n=0$ における値を示す。

(2) 段落流解析のための条件式

以上において基礎方程式の解法を三種示したが、そのうち始めの二つは式中に解析困難な積分が含まれているので、以下においては (18) 式を用いて考察する。

単位幅流量を q とするとき、限界水深は $h_0 \equiv \sqrt[3]{\alpha q^2 / \lambda g \cos \theta}$ で定義される。ここで α および λ は後述するように各断面で決定される定数である。限界水深が生じる断面を基準断面に選ぶことにし、そこで流速は対数分布するとすれば、前述の $v_0(n)$ および $H(n)$ は次式で与えられる。

$$\begin{cases} v_0(n) = a + b \log n \\ H(n) = \frac{1}{2g} (a + b \log n)^2 + h_0 \cos \theta \end{cases} \dots\dots\dots (19)$$

ここで a および b は定数であり、 H の式中に含まれている Ω は、こう配が小さいことから、以後の解析では無視することにする。このとき (6') 式から、

$$H_2 = (h_0/v)(a + b \log n) \dots\dots\dots (20)$$

であり、また (18) 式は次のようになる。

$$v - v_i = -\frac{h_c}{R_e} \left\{ (a + b \log n) - \frac{b}{m+1} \right\} \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{(a + b \log n)^2}{2v_m} \dots\dots\dots (21)$$

段縁断面における上側自由水面での流速 v_e および下側自由水面での流速 v_i は (7') 式および (19) 式を用いて次のように与えられる。

$$\begin{cases} v_e = \sqrt{a^2 + 2g(h_c - h_f) \cos \theta} & (n=1) \\ v_i = \sqrt{2gh_c \cos \theta} & (n=0) \end{cases} \dots\dots\dots (22)$$

ここで h_f は段縁断面において、水路床に直角に測った水深であり、また (19) 式で与えられる流速は n が非常に小さな値では負になるが、このようになる n の範囲は非常に小さいことから、そこでは流速は 0 であるとした。以後もこの仮定を適用する。上式を (21) 式に代入して $\sqrt{gh_c}$ で除すと、

$$\sqrt{\eta^2 + 2(1-\xi)} - \sqrt{2} = -h_c(\eta m + 1)/R_e(m+1)^2 + \eta^2 \xi / 2 \dots\dots\dots (23)$$

となる。ここで $\eta = a/v_{m0}$ 、 $\xi = h_f/h_c$ であり、限界水深断面では後述のように $\alpha=1$ 、 $\lambda=1$ であるから $v_{m0} = q/h_c \equiv \sqrt{gh_c}$ とした。また (19) 式から得られる $v_{m0} = a - b$ の関係を用いた。

ξ を定数とするならば、段落流に関する 4 つの未知数 m 、 v 、 R_e/h_c および H_2 に対して、(20) 式、(21) 式および (23) 式の 3 つの条件式が得られた。これらに H_2 に関する近似的な条件式

$$h_f = \int_0^1 H_2 dn \dots\dots\dots (24)$$

をあわせ考慮すれば、段落流の解析は以上の 4 つの条件式を解くことに帰せられる。

3. 底部分水工の水理機能に関する考察

(1) 解析法の検討

底部分水工上の流れで、流出部より上流で常流でしかも分水路より下流の影響が流出部に及ばない場合、流出部近傍の流れは主として上流側条件に支配され、さらに筆者らの段落流に関する実験では自由落下水脈の鉛直方向厚さは段縁点付近ではほぼ一定であることが確認された。以上の経験的事実にもとづいて、底部分水工からの流出水は段落流の水脈がその特性を変えなく自由落下するものとする。すなわち Fig.

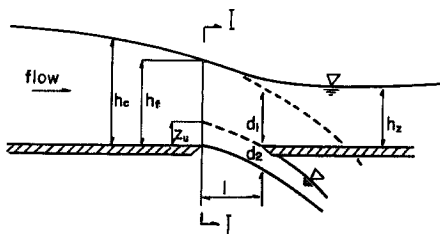


Fig. 1 Definition sketch.

1 で $z_u = d_2$ であり、しかも底部分水工のスリット始端断面 (I—I) より上流における流速分布および圧力分布は上流条件が同じである段落流のそれと変わらないものとする。ここで z_u は I—I 断面における分流境界線の水路床からの高さである。

(2) 非回転流としての考察

i) 流量およびエネルギー変化 ここでは Jaeger が非回転流の仮定に基づき導いた段落流の段縁断面に

おける流速分布式 (14) が I—I 断面における流速分布を表わすものとして考察を進める。

水路単位幅当りの流出流量 Δq は (14) 式から次のように計算される。

$$\begin{aligned}\Delta q &= \int_0^{z_u} v dz \\ &= 2v_0 h_f \frac{e^\kappa}{\kappa^2} \left\{ -\kappa \sqrt{\frac{z_u}{h_f}} \exp \left(-\kappa \sqrt{\frac{z_u}{h_f}} \right) - \exp \left(-\kappa \sqrt{\frac{z_u}{h_f}} \right) + 1 \right\} \dots\dots\dots (25)\end{aligned}$$

上流側の単位幅流量 q_1 は上式で $z_u = h_f$ とおくことにより与えられ、次のようになる。

$$q_1 = 2v_0 h_f \frac{e^\kappa}{\kappa^2} (-\kappa e^{-\kappa} - e^{-\kappa} + 1) \dots\dots\dots (26)$$

したがって I—I 断面における水路単位幅当りのエネルギー E_1 および流出水のもつエネルギー ΔE はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= H q_1 \\ \Delta E &= H \Delta q_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

で与えられる。ここで $H = v^2/2g + p/\rho g + z \cos \theta$ 一定である。

ii) 主流の水面変化 本考察で対象とする流れすなわち底部流出用スリットをもつ緩こう配水路で水面支配のためのせきあるいは水門を設けない場合には、一般に流出部の少し上流部で流水は常流から限界水深をへて分土工上を射流で流下する。下流側を代表する適当な断面 II—II を採用し、そこでの水深 h_2 を求める。 $\lambda = \alpha = 1$ とするとポテンシャル流の仮定に従がい次式が成立する。

$$\frac{3}{2} h_0 = \frac{q_2^2}{2g h_2^2} + h_2$$

これから次式を得る。

$$\left(\frac{q_2}{q_1} \right)^2 + 2 \left(\frac{h_2}{h_0} \right)^3 - 3 \left(\frac{h_2}{h_0} \right)^2 = 0 \dots\dots\dots (28)$$

上式において q_2/q_1 は (25) 式および (26) 式で与えられるから、それから h_2/h_0 が求められる。

(3) 回転流としての考察

i) 流速分布、圧力分布および m の値 (1) での考察にもとづき、ここでは底部分土工上の流れの特性を段落流に関する解析法を基礎として考察する。段落流に関して 2 で得られた条件式を流出始端断面 I—I に適用すると、次の 4 式を得る。

$$H_2 v = h_0 (a + b \log n) \dots\dots\dots (29)$$

$$v = -\frac{h_0}{R_0(m+1)} \left(a + b \log n - \frac{b}{m+1} \right) n^{m+1} + \frac{1}{2v_m h_0} (a + b \log n) + v_i \dots\dots\dots (30)$$

$$\sqrt{\eta^2 + 2(1-\eta)} - \sqrt{2} = -\frac{h_0}{R_0} \frac{1}{(m+1)^2} (\eta m + 1) + \frac{1}{2} \eta^2 \xi \dots\dots\dots (31)$$

$$h_f = \int_0^1 H_2 dn \dots\dots\dots (32)$$

上式において未知数は v , H_2 , m および R_0/h_0 の 4 つであり、 η および ξ はあらかじめ実験的に与えられるものとする。(30) 式と (31) 式とから R_0/h_0 を消去すると、 v が m のみの関数としてつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{v}{v_m} &= \frac{\sqrt{\eta^2 + 2(1-\xi)} - \sqrt{2} - (\eta^2 \xi / 2)}{\eta m + 1} \left\{ (\eta - 1)(m+1) \log n + (\eta m + 1) \right\} n^{m+1} \\ &\quad + \frac{\xi}{2} \left\{ \eta + (\eta - 1) \log n \right\}^2 + \sqrt{2} \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

また (29) 式と (32) 式から

$$\xi = \int_0^1 \frac{a + b \log n}{v} dn \dots\dots\dots (34)$$

となり、(33) と (34) の両式から v および m が求まる。また n と z/h_f の関係は

$$z = \int_0^n \frac{h_c(a + b \log n)}{v} dn \dots\dots\dots (35)$$

により与えられ、これに (29) 式を用いれば計算される。一方 I—I 断面における圧力分布はエネルギー式

$$\frac{1}{2g}(a + b \log n)^2 + h_c \cos \theta = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z \cos \theta \dots\dots\dots (36)$$

に先に得た v および n と z との関係を代入して求められる。

ii) 流量配分比 エネルギー変化率および水深変化、I—I 断面における分流境界線の水路底からの高さの n 座標を n_u とするとき、底部分水工からの流出流量はつぎのようになる。

$$\Delta q = \int_0^{n_u} v H_2 dn = h_c \cdot v_m \cdot n_u \{1 + (\eta - 1) \log n_u\} \dots\dots\dots (37)$$

上流側流量は $v_m h_c$ であるから流量配分比は

$$\frac{q_2}{q_1} = 1 - \frac{\Delta q}{q_1} = 1 - n_u \{1 + (\eta - 1) \log n_u\} \dots\dots\dots (38)$$

となる。 n_u は l/H_0 の関数として与えられるから上式から q_2/q_1 が l/H_0 の関数として与えられる。つぎに流出エネルギーに関しては限界水深断面における流速分布 $v = a + b \log n$ の仮定より流出水のもつエネルギーは

$$\begin{aligned} \Delta E &= \int_0^{n_u} H(n) \cdot v H_2 dn \\ &= \frac{q_1 h_c}{2} n_u \{ [1 + (\eta - 1) \log n_u]^3 + \{3(\eta - 1)^2 + 2\} \{1 + (\eta - 1) \log n_u\} - 2(\eta - 1)^3 \} \dots\dots\dots (39) \end{aligned}$$

となり、みかけ上の限界水深断面を通過する総エネルギー E_1 は上式に $n_u = 1$ を入れて得られ次のようになる。

$$E_1 = (q_1 h_c / 2) \{3 + 3(\eta - 1)^2 - 2(\eta - 1)^3\} \dots\dots\dots (40)$$

したがって流出によるエネルギーの変化率 $E_2/E_1 = 1 - \Delta E/E_1$ が計算される。 n_u は l/H_0 の関数として与えられるから、 E_2/E_1 は l/H_0 あるいは q_2/q_1 の関数として与えられる。

つぎに下流側を代表する水深 h_2 としては、流出による圧力の静水圧分布からのふれが小でしかも流出部に近い断面の水深を採用するのが適当である。下流側の単位幅当りの流れのもつ総エネルギーは次式で与えられる。

$$E_2 = \left(\frac{\alpha q_2^2}{2g h_2^3} + h_2 \right) q_2$$

これを $h_c = \sqrt[3]{q_1^2/g}$ を用いて無次元化した式、

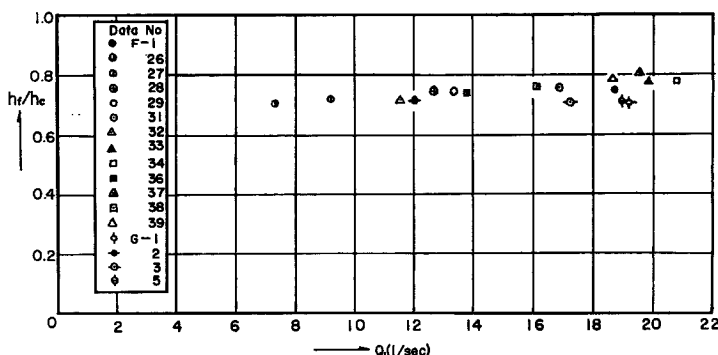
$$\left(\frac{h_2}{h_c} \right)^2 - \frac{3 + 3(\eta - 1)^2 - 2(\eta - 1)^3}{2} \frac{E_2/E_1}{q_2/q_1} \left(\frac{h_2}{h_c} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{q_2}{q_1} \right)^2 = 0 \dots\dots\dots (41)$$

が h_2/h_c を与える式である。

4. 実験的考察

(1) 解析上の仮定に関する検討

i) ξ $\xi \equiv h_f/h_c$ の値は流量、下流側条件、水路床こう配、粗度などに影響されるが、ここでは後の二者は一定であるから、流量と ξ との関係を図示すると Fig. 2 のようになる。流量の増加とともに増加する傾向が認められるが、ここでは ξ の算術平均をとり $\xi = 0.711$ を採用した。

Fig. 2 Relationship between Q_1 and ξ .

ii) 境界条件 基準断面である限界水深発生点における流速分布を示すと Fig. 3 のようになる。これを対数分布則で近似して、

$$v_c/v_{mc} = 1.1 + 0.1 \log(z/h_c)$$

を得た。

iii) $H = H(n)$ 流体の持つエネルギー $H = v^2/2g + p/\rho g + z \cos \theta$ の分布を調べてみると Fig. 4 のようになり、鉛直方向にかなりの変化があることが認められるが、流下方向各断面での同じ z/h の値に対する H の値はほぼ一定になることが認められ、このことから同一流線上ではエネルギー H は保持されることが推論される。この結果を上述の解析方法の展開に用いたが、これは $H = \text{一定}$ とするポテンシャル流の仮定を一歩進めたものである。なお、ポテンシャル流では $\text{curl} \mathbf{V} = 0$ を前提とするが、実際の渦度の分布について次に考察する。

(5) 式および (6) 式を用いると、

$$\begin{aligned} \text{curl} \mathbf{V} \text{ の } y \text{ 成分} &\equiv \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial n} (H_1 \cdot v) \\ &= \frac{g}{H_2 v} \frac{\partial H}{\partial n} = \frac{g}{h_0 v_0(n)} \frac{\partial H}{\partial n} \end{aligned}$$

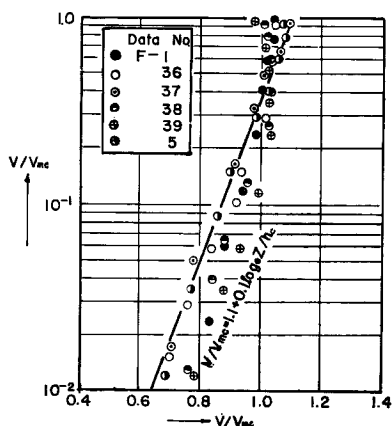


Fig. 3 Velocity distribution at critical sections.

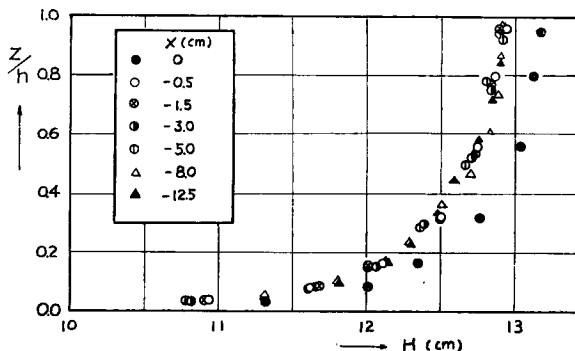


Fig. 4 Vertical distribution of energy.

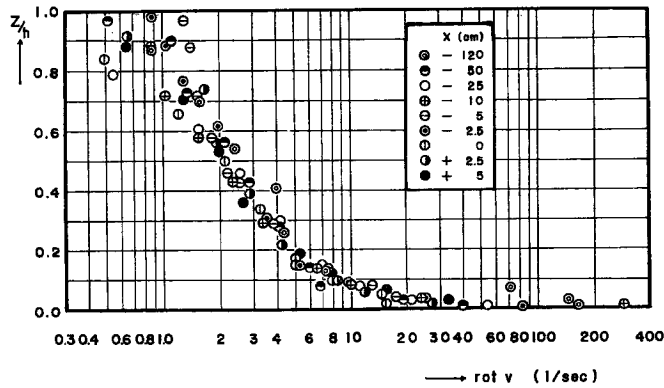


Fig. 5 Experimental variation of rotation distribution.

であり、 H が n のみの関数であれば $\text{curl } V$ の y 成分も n のみの関数である。すなわち $\text{curl } V$ の y 成分もまた流線上で保持されることがわかる。事実、実測値より得た渦度の分布は Fig. 5 に示すとおりであり上述のことが満足されているといえる。

iv) 曲率分布 n 方向の運動方程式 (5') において、 $H_2 \approx z/h$ と近似し、流速および圧力の実測値から曲率 $1/R$ を計算し図示すると Fig. 6 のようになる。本図において、同一断面内では $1/R$ の変化は両対数紙上ではほぼ直線状であることから、曲率分布に関する (16) 式の仮定が満足されることが認められる。

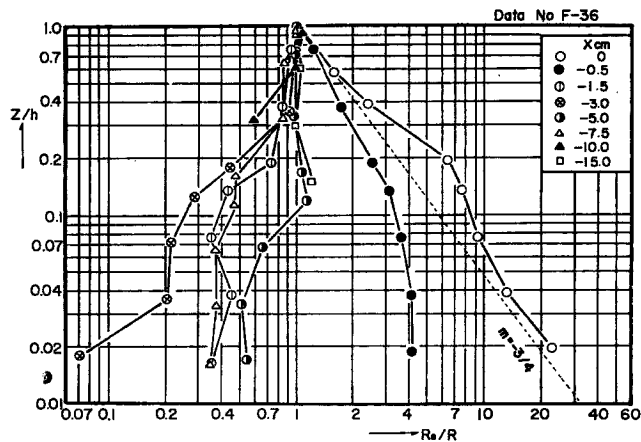


Fig. 6 Experimental variation of curvature distribution.

(2) 理論式の検討

i) 流速分布および m の値 前述のように段縁断面における v 分布および m の値は (33) 式および (34) 式を連立させて数値的に解くことができる。 $\xi=0.711$ を用いるとき $m=-0.75$ が得られる。Fig. 7 には計算により得られた v/v_{mc} の分布を示す。同時に Jaeger による非回転流としての解および底部分水工 (Data No. F-1, F-36) および、段落水路 (Data No. G-5) における実測値を比較のため示した。段落流に関して (33) 式の表示はよく適合することがわかる。Jaeger の解は水路底付近で実測値より大きくなっているが、これは水路底付近で $\partial H / \partial n$ が大きな値をもつにかかわらずそれを無視していることに起因

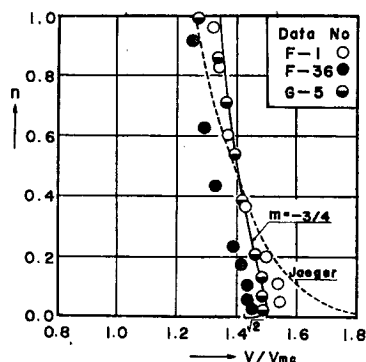
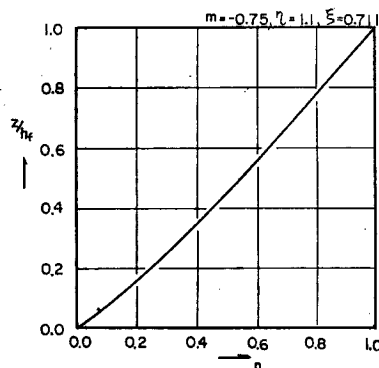


Fig. 7 Velocity distribution at section I-I.


 Fig. 8 Relationship between z/h_f and n .

している。

ii) H_2 の分布 (35) 式を用いて I—I 断面における n と z の関係を求めた結果を Fig. 8 に示す。この図から水路底付近では流線が密集しており、したがって H_2 が小さいことが明らかにされる。さらにこのことより岩崎³⁾の解析に見られるように $H_2 = h_f$ = 一定と仮定することには問題があるといえる。

iii) 圧力分布 (36) 式および上に求めた n と z の関係から求めた I—I 断面における圧力分布を Fig. 9 に示す。なお底部分水工および段落流に関する実験から得られた圧力分布の実測値および Jaeger のポテンシャル流に対する解を比較のために併せて図示した。

(3) 底部分水工の水理機能に関する考察

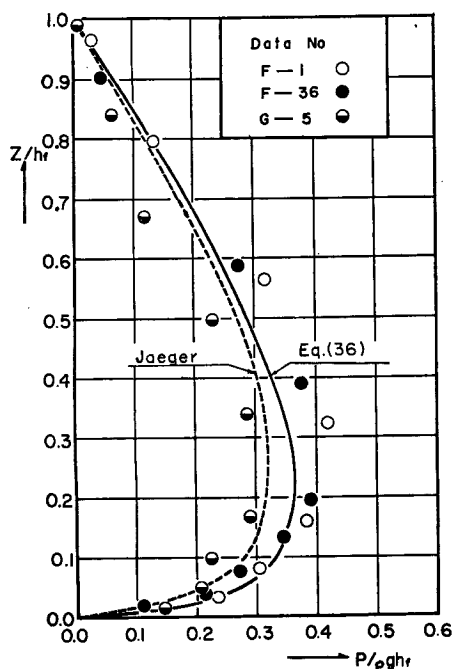


Fig. 9 Pressure distribution at section I-I.

i) z_u および n_u の値 底部分水工からの流出流量は Fig. 1 において I—I 断面における流速を z/h_f = 0 (あるいは $n=0$) から $z/h_f = z_u/h_f$ (あるいは $n=n_u$) まで積分することにより求められるから、I—I 断面での分流境界線の位置の座標 z_u (あるいは n_u) が必要である。これらの値を 3 の (1) に述べた仮定に基づいて求める。

実測された段落流の上下水面脈形状および底部分水上での水面形状を限界水深断面での比エネルギー $H = 3h_c/2 = (3/2) \sqrt{\alpha q^2 / \lambda g \cos \theta}$ で無次元化し、段縁点を原点とする座標系によって表わしたものを Fig. 10 に示す。段落流の下面水脈形状の実測値を最小自乗法により二次曲線で表示し、それを用いて z_u/h_f と l/H_0 の関係を求めた結果を Fig. 11 に示した。また I—I 断面における n と z の関係を示す Fig. 8 を用いるならば、Fig. 11 から n_u と l/H_0 の関係が求められる。これを Fig. 12 に示す。

ii) 流出流量 底部分水工からの流出流量を与える (25) 式あるいは (37) 式に先に求めた n_u あるいは l/H_0 との関係を導入することにより、 q_2/q_1 の値は l/H_0 の関数として求められ、 $\xi = 0.711$, $\eta = 1.1$ の場

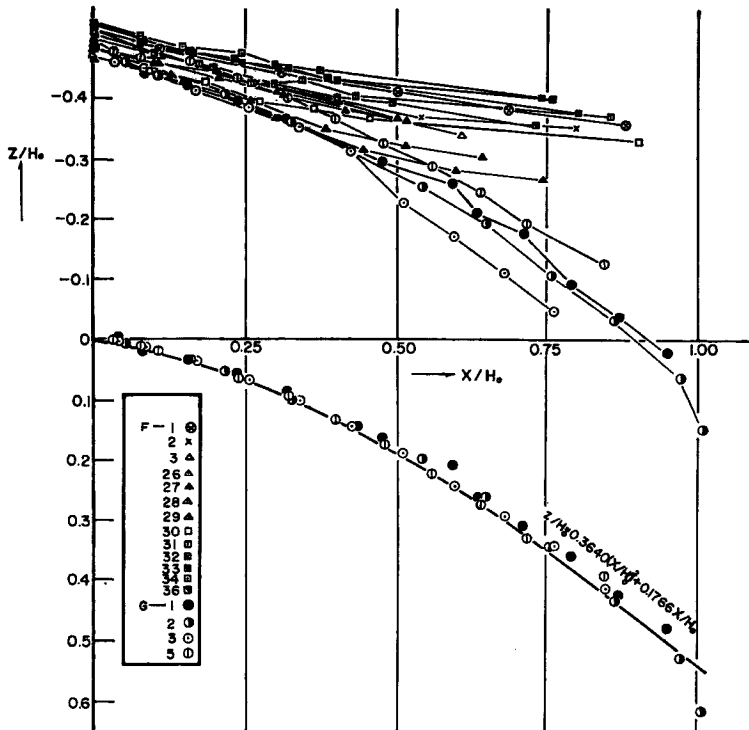
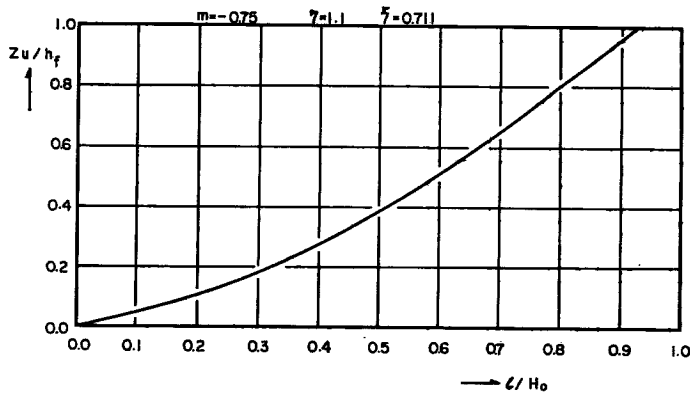


Fig. 10 Nappe profile of free overfall and flow over bottom rack.

Fig. 11 Relationship between z_u/h_f and l/H_0 .

合には Fig. 13 のようになる。図によると 流出流量の理論値は実測値よりやや大きくなっているが、これは実測値では水路全幅にわたる流量を用いているのに対して、理論値の方は水路中央断面における流速分布、圧力分布を基準としているためと考えられ、側壁近傍で流速が減少し流出量が大きくなっていることを考慮すればこの差異を説明することができる。

iii) 上, 下流の総エネルギー比 上, 下流の総エネルギー比 E_2/E_1 は非回転流の仮定を用いる場合に

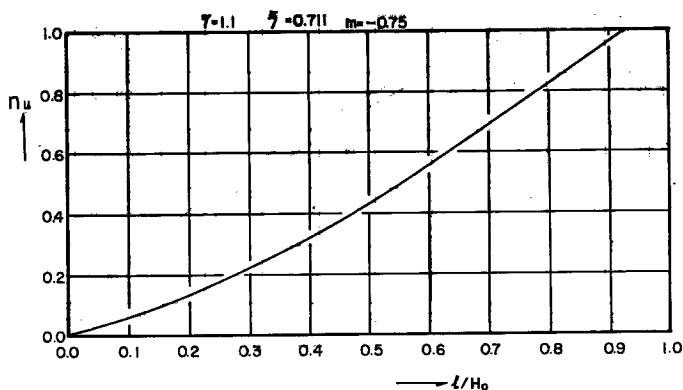


Fig. 12 Relationship between n_u and l/H_0 .

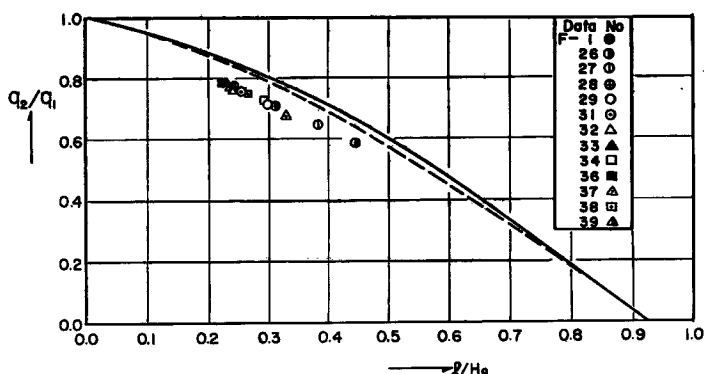


Fig. 13 Relationship between q_2/q_1 and l/H_0 .

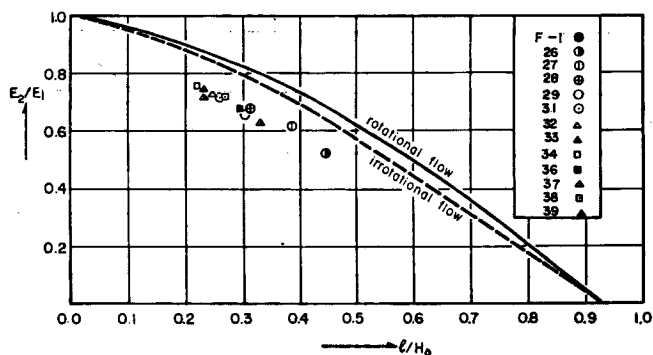
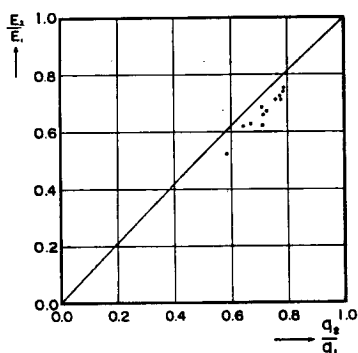
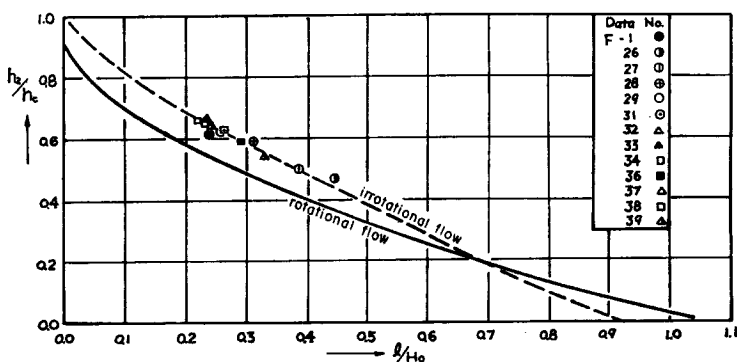
は q_2/q_1 の値と同じになり、渦度の変化も考慮する場合には (39) 式および (40) 式から与えられる。 n_u と l/H_0 の関係、あるいはこれと q_2/q_1 と l/H_0 の関係を用いて、 E_2/E_1 は l/H_0 あるいは q_2/q_1 の関係として Fig. 14 (a) あるいは Fig. 14 (b) のように与えられる。理論値が実測値とずれている理由として、 q_2/q_1 に関する先の考察と同様のことが E_2/E_1 についてもいえること、および理論式では分水路の終端に水流が衝突することによるエネルギー損失を考慮していないことが考えられる。

iv) 下流側水位 流出部より下流側の水深 h_2 の上流側限界水深 h_0 に対する比を与える (28) 式あるいは (41) 式を、先と同様に z_u あるいは n_u と l/H_0 の関係を用いて求めた結果を Fig. 15 に示す。図中に記入した h_2 の実測値としては、 $x = +1\text{m}$ 付近の縦断面水面変化が急激でないという実験的事実に基づき、その点での値を用いた。

(4) 流出部近傍上流側の水面形状

底部分水路の流出部近傍上流側の水面形状の問題も段落流の自由水面形状の問題と同じ性格のものである。すなわち次の問題点をもっている。i) 限界水深はエネルギー式を用いる場合は $h_0 \equiv \sqrt[3]{\alpha q^2 / \lambda g \cos \theta}$ で、運動量式を用いる場合は $h_0 \equiv \sqrt[3]{\beta q^2 / \lambda' g \cos \theta}$ で定義される。ここで

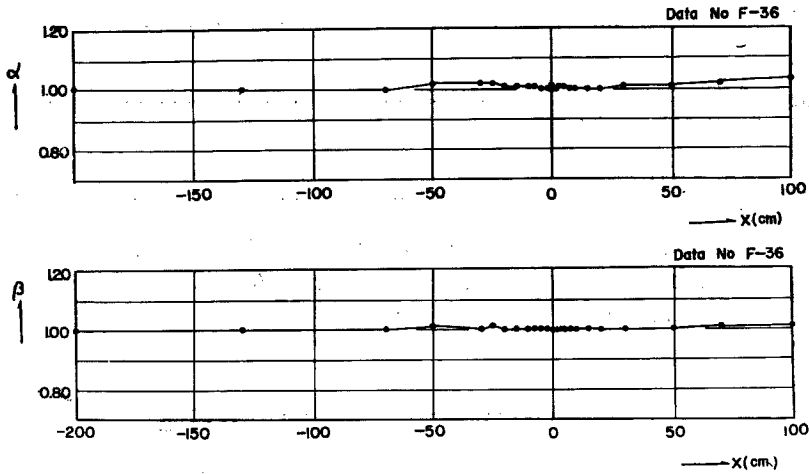
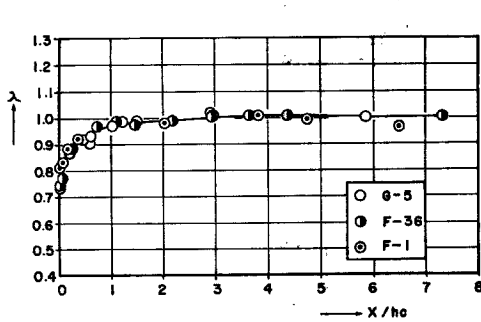
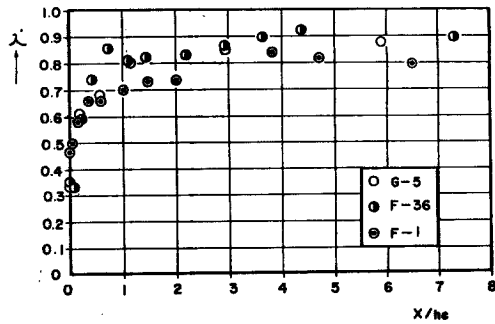
$$\lambda \equiv \frac{1}{q h \cos \theta} \int \left(\frac{p}{\rho g} + z \right) u dz, \quad \lambda' \equiv \frac{1}{h g h \rho g \cos \theta} \int p dz, \quad \dots \dots \dots (41)$$

Fig. 14 (a) Relationship. between E_2/E_1 and l/H_0 .Fig. 14 (b) Relationship between E_2/E_1 and q_2/q_1 .Fig. 15 Relation between h_2/h_c and l/H_0 .

$$\alpha \equiv \frac{1}{q} \int \left(\frac{v}{u_m} \right)^2 u dz, \quad \beta \equiv \frac{1}{q} \int \left(\frac{u}{u_m} \right) u dz \dots\dots\dots (42)$$

u = 流速の x 方向成分, $u_m = q/h$

である。流速ベクトルおよび圧力の実測値から α および λ を計算し、それによって h_0 曲線を求めると、それは流出始端（あるいは段縁）断面より少し上流で水面形曲線と変わる。ii) その限界水深点と流出始端


 Fig. 16 Measured values of α and β .

 Fig. 17 (a) Measured values of λ .

 Fig. 17 (b) Measured values of λ' .

の間の水面形状は一様緩こう配水路の水面形として分類されている $M_1 \sim M_8$ のいずれの水面形にも分類できない。iii) 限界水深点では水面こう配は有限であり、しかも水面は滑らかで安定である。

これらの問題点を解くため、一次元解析の式に出てくる各係数を流速および圧力の実測値から算出した。その結果を Fig. 16 および Fig. 17 に示す。これらの図から次のことがいえる。i) α および β は一定で 1 と近似してもよい。ii) λ については流線の影響のため、限界水深点より下流でその値は 1 からかなりずれ、したがって $\partial\lambda/\partial x$ も大きくなる。

したがって一様長方形断面水路の段縁部近傍の水面形方程式として次式を用いるのが適当である。すなわち、エネルギー式としては、

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\sin\theta - \frac{n^2 Q^2}{R^{4/3} A^2} \frac{u_b}{u_m} - h \cos\theta \frac{d\lambda}{dx}}{\lambda \cos\theta - \frac{\alpha Q^2}{g A^3 b}} \quad (43)$$

運動量式としては、

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\sin\theta - \frac{n^2 Q^2}{R^{4/3} A^2} - h \cos\theta \frac{d\lambda'}{dx}}{\lambda' \cos\theta - \frac{\beta Q^2}{g A^3 b}} \quad (44)$$

を用いる。ここではエネルギー式に基づき考察を進める。ただし $u_0 = u_m$ と仮定する。そのとき等流水深は

$$\sin\theta - \frac{n^2 Q^2}{R^{4/3} A^2} - h \cos\theta \frac{d\lambda}{dx} = 0 \dots\dots\dots (45)$$

限界水深は

$$\lambda \cos\theta - \frac{\alpha Q^2}{g A^3} b = 0 \dots\dots\dots (46)$$

で与えられる。実測された h , α および λ を用い (44) 式から $d\lambda/dx$ を逆算した結果を図示すると Fig. 18 のようである。Fig. 16, 17 および 18 に示された α , λ , $d\lambda/dx$ の値を用いて等流水深曲線および限界水深曲線を計算した結果は Fig. 19 のとおりである。この図から限界水深曲線と水面形曲線との交点をさら

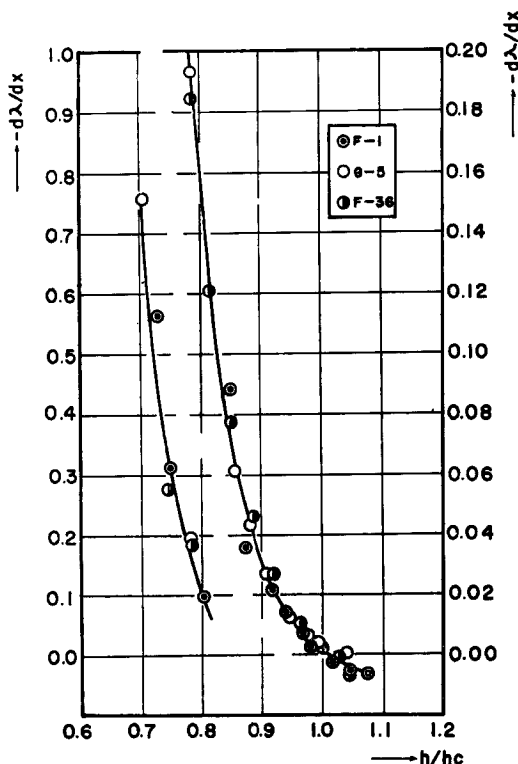


Fig. 18 Calculated value of $d\lambda/dx$ from experimental measurement.

に等流水深曲線が通過していることが明らかであり、この点の特異点であることが結論される。したがって水面の支配点はこの特異点にあり、H. Rouse⁴⁾あるいは岩崎⁵⁾が段落流の真の支配点は段縁点にあるといっているのは誤りである。

つぎに特異点の性格を検討する⁵⁾。特異点における限界水深の値を h_0 とし、 $h' = h/h_0$, $x' = x/h_0$, $b' = b/h_0$ とするとき、(44) 式は無次元化されて次のようになる。

$$\frac{dh'}{dx'} = \frac{f(h') - h' \cos\theta d\lambda/dx'}{\lambda \cos\theta (1 - h'^{-3})} \dots\dots\dots (47)$$

ここで

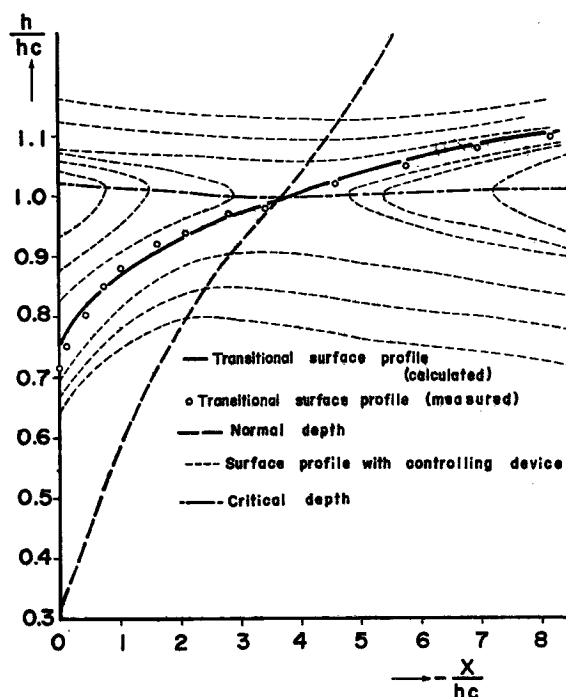


Fig. 19 Water surface profiles.

$$f(h') = \sin\theta - \frac{\lambda}{\alpha} \frac{n^2 g}{h'^2 h_0^{1/3}} \cos\theta \left(\frac{b' + 2h'}{b'h'} \right)^{4/3} \dots\dots\dots (48)$$

である。特異点に原点が来るように座標移動し、新しい座標系をあらためて (x', h') とするとき、特異点のごく近傍における (47) 式は

$$\frac{dh'}{dx'} = \frac{a_{21}x' + a_{22}h'}{a_{11}x' + a_{12}h'} \dots\dots\dots (49)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0, & a_{12} &= 3\lambda_0 \cos\theta \\ a_{21} &= -\cos\theta \left(\frac{d^2\lambda}{dx'^2} \right)_c, & a_{22} &= \frac{df(1)}{dh'} - \cos\theta \left(\frac{d\lambda}{dx'} \right)_c \end{aligned} \dots\dots\dots (50)$$

であり、添字 c は特異点における値を示すものである。したがって特異点において

$$\text{限界水深のこう配} = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = 0$$

$$\text{等流水深のこう配} = -\frac{a_{21}}{a_{22}} = \frac{\cos\theta \left(\frac{d^2\lambda}{dx'^2} \right)_c}{\frac{df(1)}{dh'} - \cos\theta \left(\frac{d\lambda}{dx'} \right)_c} < 0$$

であり、また (49) 式の特性方程式の判別式 D は

$$\begin{aligned} D &= (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ &= \left\{ \frac{df(1)}{dh'} - \cos\theta \left(\frac{d\lambda}{dx'} \right)_c \right\}^2 - 12\lambda \cos^2\theta \left(\frac{d^2\lambda}{dx'^2} \right)_c \end{aligned} \dots\dots\dots (51)$$

となるが、 $(d^2\lambda/dx'^2)_c$ は実験的に負であることが認められるから $D > 0$ である。しかも、

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 3\lambda_e \cos^2 \theta \left(\frac{d^2 \lambda}{dx'^2} \right)_e < 0$$

であり、ゆえに特異点は鞍形点であることがわかる。したがって水面形の出発点は特異点にあり、そこでの水面こう配は、

$$\begin{aligned} \left(\frac{dh'}{dx'} \right)_e &= \frac{-(a_{11} - a_{22}) \pm \sqrt{D}}{2a_{12}} \\ &= \frac{\frac{df(1)}{dh'} - \cos \theta \left(\frac{d\lambda}{dx'} \right)_e \pm \sqrt{\left\{ \frac{df(1)}{dh'} - \cos \theta \left(\frac{d\lambda}{dx'} \right)_e \right\}^2 - 12\lambda_e \cos^2 \theta \left(\frac{d^2 \lambda}{dx'^2} \right)_e}}{6\lambda_e \cos \theta} \dots\dots\dots (52) \end{aligned}$$

で与えられる。上式中の $(d^2 \lambda / dx'^2)_e$ を実験的に求めるのは困難であるから、いちおう実測された $(dh' / dx')_e$ を用いて水面形を数値計算した結果、Fig. 19 に示したようになった。以上の考察から段縁水深は (44) 式あるいは (45) 式に規制されるものであり、その限界水深に対する比が水路粗度、流量、こう配および断面形状などによって変化することが明らかになった。なお、Fig. 19 中に点線で示した曲線は、 λ が Fig. 17 に示した変化ををするとしたとき特異点近傍で生じうる各種水面形状である。

5. あとがき

底部から局所的な流出がある開水路流水の内部機構を段落流の解析との関連の下に明らかにした。次にそれに基づき底部分水の水利機能につき、とくに流出流量、水深変化あるいは流出にともなうエネルギー変化などを明らかにした。最後に流出部の上流側近傍に生じる特異点の性格を明らかにし、一次元解析法に基づく水面計算法を示した。

参 考 文 献

- 1) 中川博次, 宇民正: 底部スリットを有する開水路流れの特性について, 京都大学防災研究所年報, 第10号, 昭和42年3月, p.183—p.198.
- 2) Jaeger, C.: Hauteur d'eau à l'extrémité d'un long déversoir, La Houille Blanche, Nov.-Déc., 1948, p.518—p.523
- 3) 岩崎敏夫: 段落水流の水利現象に関する実験的考察, 土木学会誌, 第38巻, 第6号, 昭和28年6月, p.34.
- 4) Rouse, H.: Discharge characteristics of the free overfall, Civil Engineering, Vol. 6, April, 1936.
- 5) 岩佐義朗: 幅の漸変する水路における水流の遷移現象と境界特性との関連に関する理論的研究, 土木学会論文集, 第59号, 別冊3—1, 昭和33年11月.