

Euler limit と磁気流体の singular limit

北大理 上見 練太郎 (Rentaro Agemi)

磁気流体の方程式系を無次元化すると二つのパラメータ, Mach 数と Alfvén 数, を含む方程式系を得る. 本稿ではそれらのパラメータを小さくしたとき, 解のみたすべき方程式がどのようなものかについて議論する.

磁気流体の方程式系は

$$\rho_p (\partial_t + v \cdot \nabla) \rho + \rho \operatorname{div} v = 0,$$

$$\rho (\partial_t + v \cdot \nabla) v + \nabla p + \mu_0 H \times \operatorname{rot} H = 0,$$

$$(\partial_t + v \cdot \nabla) S = 0,$$

$$\partial_t H - \operatorname{rot} (v \times H) = 0, \quad \operatorname{div} H = 0,$$

$$p = R \rho^\gamma \exp((\gamma-1)S) \quad (\gamma > 1)$$

で, 圧力 $p(t, x)$, 速度場 $v(t, x)$, エントロピー $S(t, x)$, 磁場 $H(t, x)$ を未知とみ, 密度 ρ は最後の状態方程式で与えられるとみる. ここで, $\rho_p = \partial p / \partial \rho$ である.

(註) S が定数でないとき, ρ を未知とみると上の方程

式系は一階α対称微分方程式系にはならない。

無次元化を行うために, v_m を代表的な速度場 (定数) 等として,

$$\bar{v} = v/v_m, \quad \bar{p} = p/p_m, \quad \bar{S} = S - S_m,$$

$$\bar{H} = H/|H_m|, \quad \bar{t} = v_m t/L, \quad \bar{x} = x/L$$

とおくと, $\bar{v}$ 等と再び v 等と表わすとき上の方程式系は

$$\rho_p (\partial_t + v \cdot \nabla) p + p \operatorname{div} v = 0,$$

$$\rho (\partial_t + v \cdot \nabla) v + \lambda^2 \nabla p + \alpha^2 H \times \operatorname{rot} H = 0,$$

$$(\partial_t + v \cdot \nabla) S = 0$$

$$\partial_t H - \operatorname{rot}(v \times H) = 0, \quad \operatorname{div} H = 0,$$

$$\phi = R' p^r \exp((r-1)S)$$

となる。ここで, λ, α は各々 Mach 数 M , Alfvén 数 A の逆数で,

$$M^2 = \frac{|v_m|^2}{\rho_p(p_m, S_m)}, \quad A^2 = \frac{|v_m|^2 \rho_m}{\mu_0 |H_m|^2}.$$

この方程式と初期条件

$$v(0, x) = v_0(x), \quad p(0, x) = p_0(x),$$

$$S(0, x) = S_0(x), \quad H(0, x) = H_0(x)$$

をもとで考えたいと滑らびとす。境界値問題を考えよときは領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ で

$$v \cdot n = 0, \quad H \cdot n = 0$$

を課すものとする。ここで、 n は Ω の外向き単位法ベクトルとする。

最初に、 $\lambda \rightarrow \infty$ ($M \rightarrow 0$) のときの極限を考えよ。これは力学では非圧縮極限として知られていたが、数学として証明されたのは1980年代に入ってからである。

(1) $H \equiv 0$, $S = \text{定数}$ の場合。

初期値が $p_0 = \text{定数}$, $\operatorname{div} u_0 = 0$ とみたとする。このとき、 $(u^\lambda, p^\lambda, \lambda^2 \nabla p^\lambda)$ の極限が存在 $(u^\infty, p_0, \nabla p^\infty)$ として、非圧縮 Euler 方程式

$$p_0 (\partial_t + u^\infty \cdot \nabla) u^\infty = -\nabla p^\infty$$

$$\operatorname{div} u^\infty = 0$$

とみたとす。

この結果は $\mathbb{R}^3$ 又は periodic α とし D. Ebin [3], S. Klainerman and A. Majda [5], 内部領域 α とし R. Agemi [1], S. Schochet [6], 外部領域 α とし H. Isozaki によって示された。

証明の key は次の一様評価をたすことにあり。即ち、 λ に依らぬ定数 $T, K > 0$ があって

$$\lambda (\| \phi^\lambda(t) - p_0 \|_3 + \| \partial_t p^\lambda(t) \|_2) \leq K,$$

$$\| u^\lambda(t) \|_3 + \| \partial_t u^\lambda(t) \|_2 \leq K, \quad 0 \leq t \leq T.$$

(註) もとの方程式系は双曲型であったが、非圧縮

Euler 方程式は双曲型と楕円型の交ったものになっている。

(註) 初期値に $\operatorname{div} v_0 = 0$ と課さないとき, $\mathbb{R}^3$ (Ukai [7]) や外部領域 (Isozaki [4]) では initial layer が表れた. 上の収束は $[0, T]$ 上で一様に成り立つが, この場合 $[0, T]$ が定義域としてあり, v^∞ の初期値は $v^\infty(0, x) = P v_0$ となる. この P は solenoidal subspace への orthogonal projection である.

(四) $H \equiv 0$ の場合

初期値の仮定は (イ) と同じで極限の方程式は (非定常) 非圧縮 Euler 方程式

$$\begin{aligned}(\partial_t + v^\infty \cdot \nabla) \rho^\infty &= 0, \\ \rho^\infty (\partial_t + v^\infty \cdot \nabla) v^\infty &= -\nabla p^\infty \\ \operatorname{div} v^\infty &= 0\end{aligned}$$

である. このときは $(\partial_t + v^\infty \cdot \nabla) \rho^\infty = 0$ と $(\partial_t + v^\infty \cdot \nabla) S^\infty = 0$ とは同値であることに注意しておく. この場合, 外部領域のときよく合っている. とくに, initial layer があるかどうか.

(イ) $H \neq 0$ で Alfvén 数が定数の場合.

初期値の仮定は (イ) と同じで極限の方程式系は

$$\begin{aligned}(\partial_t + v^\infty \cdot \nabla) \rho^\infty &= 0, \\ \rho^\infty (\partial_t + v^\infty \cdot \nabla) v^\infty + \nabla p^\infty + \alpha^2 H^\infty \times \operatorname{rot} H^\infty &= 0, \\ \partial_t H^\infty - \operatorname{rot}(v^\infty \times H^\infty) &= 0, \quad \operatorname{div} H^\infty = 0, \\ \operatorname{div} v^\infty &= 0.\end{aligned}$$

$\mathbb{R}^3$ が periodic のときのみで, 境界値問題は元の方程式系

で解の存在を証明されていない。

次に, $\alpha \rightarrow \infty$ ($A \rightarrow 0$) の極限を考へる。この場合, この問題自体の適切性も含めてよく合っていないようである。

(二) (一)の段階で $\rho^\infty = \text{定数}$ の場合のとき, A が密度に比例する場合を考へる。このとき, 方程式系は

$$\alpha^{-2}(\partial_t + v \cdot \nabla)v + \nabla p + \alpha^2 H \times \text{rot} H = 0,$$

$$(\partial_t + v \cdot \nabla)H - H \cdot \nabla v = 0.$$

$$\text{div} v = 0, \quad \text{div} H = 0.$$

とみれど, 初期値は $H_0 = \text{定数}$ とする。結果は α の適当な部分列をとると, $\alpha \rightarrow \infty$ のとき

$$(v^\alpha, \nabla p^\alpha, H^\alpha, \alpha^2(H^\alpha - H_0)) \longrightarrow (v^\infty, \nabla p^\infty, H_0, K^\infty)$$

で, 静磁場の方程式

$$H_0 \times \text{rot} K^\infty + \nabla p^\infty = 0, \quad H_0 \cdot \nabla v^\infty = 0$$

$$\text{div} v^\infty = 0, \quad \text{div} K^\infty = 0$$

とみられす。(R. Agemi [2])

これは $\mathbb{R}^3$ のみで, 内部(外部)領域の場合, 境界条件のみからみで $H_0 \equiv 0$ とするのと, simply connected な領域のみに対しては対象となる。この場合, 初期値に $\text{rot} H_0 = 0$ の条件をつけると同様の結果が期待されるが成功していない。

(ホ) Mach 数定数の場合, 一般的な状況では結果を得ていないが, 十分数値的・物理的解釈がなされていない。

References.

[1] R. Agemi : The incompressible limit of compressible fluid motions in a bounded domain, Proc. Japan Acad. vol 57. Ser A, (1981)

[2] ——— : The magnetostatic limit.
to appear

[3] D. Ebin : The motion of slightly compressible fluids as a motion with strong constraining force, Ann. Math. vol 105 (1977)

[4] H. Isozaki : Singular limits for compressible euler equation in a exterior domain II. Bodies in a uniform flow, Tech. Report Ser. Hokkaido Univ. (1987)

[5] S. Klainerman and A. Majda : Singular limits of quasilinear systems with large parameters and the incompressible limit of compressible fluids, Comm. Pure Appl. Math. vol 34 (1981)

[6] S. Schochet : The compressible Euler equations in a bounded domain, Comm. Math. Phys. (1986)

[7] S. Ukai : The incompressible limit and initial layer of compressible Euler equation, J. Math. Kyoto

Univ. vol 26 (1986).