

加速法による数値積分の計算の一例

中部大学 二宮市三 (Ichizo Ninomiya)

1. 問題

前回の本研究集会(1984.11.29)の討論の中で、千葉大戸田教授によって次の問題が提出された。“定積分：

$$I = \int_0^{\infty} f(x) dx, \quad f(x) = \frac{x}{1+x^6 \sin^2 x} \quad (1)$$

を計算せよ”

この積分は、有名な解析学の教科書、解析概論の広義積分の存在に関する練習問題⁽¹⁾の中に現れるもので、被積分関数が有界でなくても、無限積分が存在する例である。この事実を証明すること自体はむしろ容易であるが、数値計算の問題としては極めて困難な問題である。関数 $f(x)$ は、図1に示すように、等間隔の点列 $x = k\pi$ ($k=1, 2, \dots$) で高さ $k\pi$ のピークをもち、その他では平坦で、急速に0に近づく。このような奇矯な関数を積分することは、尋常な手段では恐らく不可能であらう。著者は以下に述べるような方法によって

この難問に挑戦したところ，十分満足すべき結果がえられたのでここに発表する次第である。

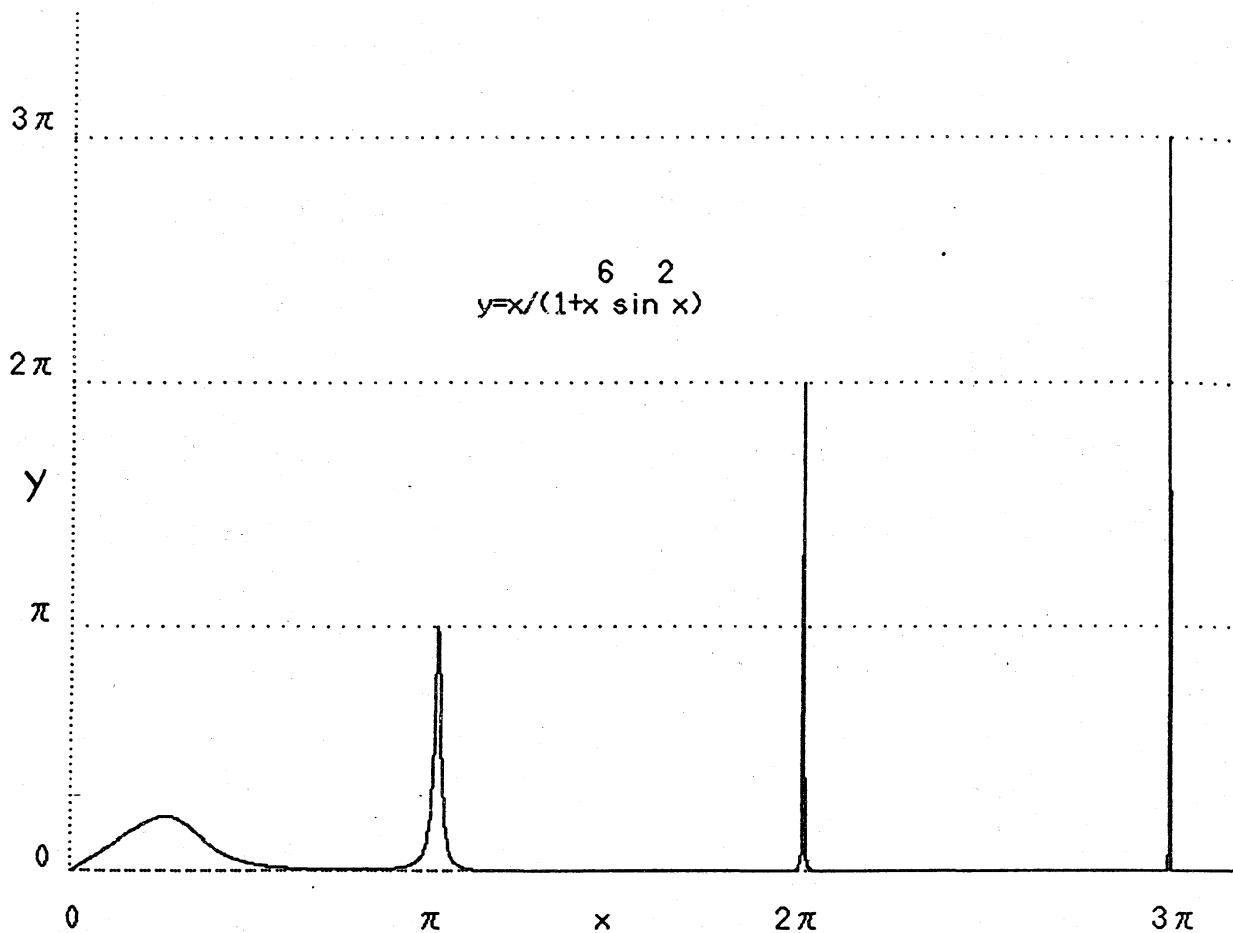


図 1

2. 方法

積分領域を，点列 $x = k\pi$ ($k=0, 1, 2, \dots$) で等分割して与えられた積分 I を，長さ π の区間上の積分の級数として，次のように表わす。

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} I_k, \quad I_k = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{x dx}{1 + x^6 \sin^2 x} \quad (2)$$

この級数の和を、適当な加速法によって求めようというのが方法の眼目である。そのためには、先づ級数の収束性を調べなければならない。(2)の I_k において、被積分関数の分子の x と分母の x^6 を、下限及び上限での値で適宜置き換えることにより、次の関係をうる。

$$(k-1)\pi \cdot \int_0^\pi \frac{dx}{1+(k\pi)^6 \sin^2 x} < I_k < k\pi \cdot \int_0^\pi \frac{dx}{1+((k-1)\pi)^6 \sin^2 x}$$

初等的な結果 $\int_0^\pi \frac{dx}{1+a^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2+1}}$ により、 I_k の評価

$$\frac{(k-1)\pi^2}{\sqrt{(k\pi)^6+1}} < I_k < \frac{k\pi^2}{\sqrt{((k-1)\pi)^6+1}}$$

がえられる。すなわち、級数(2)は $I_k = O(k^{-2})$ の所謂、対数収束級数である。このような収束性を示す級数の収束を加速する最も有効なものとして、本方法では Wynnの ρ -変換⁽²⁾を採用する。

次の問題は、積分 I_k の計算法の選択である。 I_k はピーク型の積分であるから、局所的な変化に強い適応型自動積分法も有効であるが、ピークが両端にあることを考えると、二重指数関数変換法⁽³⁾が最も効果的である。ともかく、どのような積分法を用いるにしても、積分に最も大きな寄与をする、ピークの附近の関数値を精度よく計算することが肝要である。

そのために変数変換 $x = (k-1+t)\pi$ によって、(2)を

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} I_k, \quad I_k = \int_0^1 \frac{\pi^2(k-1+t) dt}{1 + \pi^6(k-1+t)^6 \sin^2 \pi t} \quad (3)$$

と書き換える。この変形によって、積分区間の両端での π の存在による不正確さが取り除かれたが、(3)の上限1の附近での $\sin \pi t$ の不正確さが依然として残っている。この困難を克服する具体的な方法については、次の章で述べる。以上の方法を、第一法と呼ぶ。

第一法によって得られた結果の正しさを検証するための別法として、第二法を考える。今度は、積分領域の分割を点列 $x = (k + \frac{1}{2})\pi$ ($k=0, 1, 2, \dots$)で行い、 I を次のような級数として表わす。

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} J_k, \quad J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx, \quad J_k = \int_{(k-\frac{1}{2})\pi}^{(k+\frac{1}{2})\pi} f(x) dx \quad (4)$$

変数変換 $x = (k+t)\pi$ により、(4)は次のようになる。

$$J_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\pi^2 t dt}{1 + \pi^6 t^6 \sin^2 \pi t}, \quad J_k = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\pi^2 (k+t) dt}{1 + \pi^6 (k+t)^6 \sin^2 \pi t} \quad (5)$$

(5)の J_k は積分区間の中央 $t=0$ にピークをもつので、計算法としては、適応型ニュートン・ユーツ則⁽⁴⁾が最適である。

ピークの位置は原点 $t=0$ であるので、関数値の不正確さのための困難はない。級数の収束の加速法としては、第一法と同様に、 ρ -変換を採用する。

3. 結果

前章の方法に基づいて，“戸田積分”の計算を実施した。使用計算機は名古屋大学大型計算機センターのM-382，使用言語はFORTRAN77である。

先づ，第一法による計算を倍精度（10進16桁相当）で行った。問題のある $\sin \pi t$ の計算と p -変換のために，それぞれ名古屋大学数学ライブラリ NUMPAC⁽⁵⁾⁽⁶⁾ 中のプログラム DSINHP と WYNNRD を利用した。又，積分 I_k の計算には，富士通 SSL II⁽⁷⁾ 中のプログラム DAQE を使用した。DSINHP の利用によって， $t=1$ の附近での $\sin \pi t$ の値の不正確さは殆んど除去されるが，完璧を期するために DAQE が備えている，“必要に応じて積分区間の端からの純粋な巨離が利用できる”という優れた機能を援用した。

結果は表1に示す通りである。先頭の表には，8種類の要求絶対精度 EPSA に対する全般的な結果が集約されており，後続の表には，各々の EPSA の場合の I_k についての明細が示されている。各項目の意味は次の通りである。

INTEGRAL は積分の近似値，ERR は推定絶対誤差，NTRM は収束のために必要な級数の項数，NFUN は関数計算回数，EPS は I_k のための要求絶対精度で $\text{EPSA} \times 10^{-1}$ ，ICON はエラーコードである。

後出の高精度(約20桁)の結果との比較から、表1の結果の正しさが、さらに、項数と関数計算回数の少なさから、それぞれ WYNNRD と DAQE の有効性が結論される。一つだけ難点をいえば、 ρ -変換に伴う桁落ちのために、倍精度ではこれ以上精度を高めることができないということである。

次に、第二法による計算を倍精度で行った。積分 J_k の計算のために、NUMPACの中の適応型ニュートン・ユーツ9点則ルーチン AQNN9D を利用した以外は、前回と同称である。加速は級数 $\sum_{k=1}^{\infty} J_k$ に施し、その和に J_0 を加えた。結果は表2に示す通りである。表の構成や各項目の意味は表1と同称である。表1と比較して見ると、項数はほぼ同称、関数計算回数は1.5倍乃至2倍になっていることがわかる。積分値は表1及び表3との比較から、すべて信頼できるものと考えられる。

最後に、より高精度の結果を得るために、第二法による計算を4倍精度(10進32桁相当)で行った。安全のために、経済性を度外視し、各々の J_k の計算のための要求絶対精度 EPS を全体の要求精度 $EPSA$ に対して、 $EPS = EPSA * 10^{-5}$ とした。使用プログラムは、倍精度の場合に用いたものの4倍精度版 QSINHP, AQNN9Q, WYNNRQ である。

結果は表3に示す通りである。表1、表2の結果並びに種

々の状況から判断して、計算値はすべて信頼に足るものと思
われる。特に最も精度の高い値

$$I = \underline{1.16965\ 25542\ 24486\ 47771}$$

は、小数点以下20桁迄正しいものと期待される。

表 1

COMPUTATION OF TODA INTEGRAL BY DSINHP, DAQE AND WYNNRD

EPSA	INTEGRAL	ERR	NTRM	NFUN	ICON
1.00D-04	1.169649939643D+00	3.13D-06	8	776	0
1.00D-05	1.169650566550D+00	2.59D-06	8	968	0
1.00D-06	1.169652600418D+00	1.69D-07	10	1454	0
1.00D-07	1.169652550424D+00	1.70D-08	9	1851	0
1.00D-08	1.169652554425D+00	4.79D-10	12	2692	0
1.00D-09	1.169652554425D+00	4.79D-10	12	2692	0
1.00D-10	1.169652554129D+00	5.89D-11	14	4490	0
1.00D-11	1.169652554221D+00	9.50D-13	14	5162	0

EPSA= 1.00D-04

K	EPS	INTEGRAL(K)	ERR	NFUN	ICON
1	1.00D-05	8.189391656762D-01	3.71D-06	83	0
2	1.00D-05	1.856188872990D-01	4.63D-07	99	0
3	1.00D-05	5.711203312328D-02	1.64D-06	99	0
4	1.00D-05	2.759517111406D-02	4.54D-06	99	0
5	1.00D-05	1.630684017549D-02	1.12D-06	99	0
6	1.00D-05	1.078547784722D-02	1.77D-06	99	0
7	1.00D-05	7.668484586306D-03	4.59D-07	99	0
8	1.00D-05	5.734643819900D-03	6.83D-06	99	0
I =	1.00D-04	1.169649939643D+00	3.13D-06	776	0

EPSA= 1.00D-05

K	EPS	INTEGRAL(K)	ERR	NFUN	ICON
1	1.00D-06	8.189391656762D-01	7.77D-07	83	0
2	1.00D-06	1.856188872990D-01	7.47D-08	99	0
3	1.00D-06	5.711203312328D-02	3.74D-07	99	0
4	1.00D-06	2.759517078746D-02	2.88D-11	195	0
5	1.00D-06	1.630684017549D-02	2.44D-07	99	0
6	1.00D-06	1.078547784722D-02	4.07D-07	99	0
7	1.00D-06	7.668484586306D-03	9.07D-08	99	0
8	1.00D-06	5.734645611049D-03	1.79D-09	195	0
I =	1.00D-05	1.169650566550D+00	2.59D-06	968	0

EPSA= 1.00D-06

K	EPS	INTEGRAL(K)	ERR	NFUN	ICON
1	1.00D-07	8.189391723517D-01	7.33D-12	179	0
2	1.00D-07	1.856188872990D-01	7.47D-08	99	0
3	1.00D-07	5.711203312328D-02	5.87D-08	99	0
4	1.00D-07	2.759517078746D-02	1.39D-12	195	0
5	1.00D-07	1.630684017549D-02	3.63D-08	99	0
6	1.00D-07	1.078547784722D-02	6.46D-08	99	0
7	1.00D-07	7.668484586306D-03	1.19D-08	99	0
8	1.00D-07	5.734645611049D-03	1.91D-10	195	0
9	1.00D-07	4.451580864765D-03	1.13D-10	195	0
10	1.00D-07	3.556381973987D-03	8.55D-12	195	0
I =	1.00D-06	1.169652600418D+00	1.69D-07	1454	0

EPSA= 1.00D-07

K	EPS	INTEGRAL(K)	ERR	NFUN	ICON
1	1.00D-08	8.189391723517D-01	7.33D-12	179	0
2	1.00D-08	1.856188872448D-01	1.47D-13	195	0
3	1.00D-08	5.711203330772D-02	6.80D-13	195	0
4	1.00D-08	2.759517078746D-02	1.39D-12	195	0
5	1.00D-08	1.630683988617D-02	1.19D-12	195	0
6	1.00D-08	1.078547689789D-02	5.81D-12	211	0
7	1.00D-08	7.668480899814D-03	3.04D-11	227	0
8	1.00D-08	5.734645923605D-03	1.26D-11	227	0
9	1.00D-08	4.451581218995D-03	5.48D-12	227	0
I =	1.00D-07	1.169652550424D+00	1.70D-08	1851	0

EPSA= 1.00D-08

K	EPS	INTEGRAL(K)	ERR	NFUN	ICON
1	1.00D-09	8.189391723725D-01	7.39D-12	195	0
2	1.00D-09	1.856188873073D-01	7.03D-14	227	0
3	1.00D-09	5.711203341191D-02	8.70D-13	227	0
4	1.00D-09	2.759517093332D-02	1.10D-12	227	0
5	1.00D-09	1.630684007371D-02	8.32D-13	227	0
6	1.00D-09	1.078547700208D-02	5.52D-12	227	0
7	1.00D-09	7.668480899814D-03	3.04D-11	227	0
8	1.00D-09	5.734645923605D-03	1.26D-11	227	0
9	1.00D-09	4.451581218995D-03	5.48D-12	227	0
10	1.00D-09	3.556382369891D-03	1.06D-12	227	0
11	1.00D-09	2.906857650683D-03	1.95D-11	227	0
12	1.00D-09	2.420560898454D-03	6.27D-11	227	0
=	1.00D-08	1.169652554425D+00	4.79D-10	2692	0

EPSA= 1.00D-09

K	EPS	INTEGRAL(K)	ERR	NFUN	ICON
1	1.00D-10	8.189391723725D-01	7.39D-12	195	0
2	1.00D-10	1.856188873073D-01	7.03D-14	227	0
3	1.00D-10	5.711203341191D-02	8.70D-13	227	0
4	1.00D-10	2.759517093332D-02	1.10D-12	227	0
5	1.00D-10	1.630684007371D-02	8.32D-13	227	0
6	1.00D-10	1.078547700208D-02	5.52D-12	227	0
7	1.00D-10	7.668480899814D-03	3.04D-11	227	0
8	1.00D-10	5.734645923605D-03	1.26D-11	227	0
9	1.00D-10	4.451581218995D-03	5.48D-12	227	0
10	1.00D-10	3.556382369891D-03	1.06D-12	227	0
11	1.00D-10	2.906857650683D-03	1.95D-11	227	0
12	1.00D-10	2.420560898454D-03	6.27D-11	227	0
I =	1.00D-09	1.169652554425D+00	4.79D-10	2692	0

EPSA= 1.00D-10

K	EPS	INTEGRAL(K)	ERR	NFUN	ICON
1	1.00D-11	8.189391723725D-01	1.34D-12	195	0
2	1.00D-11	1.856188873073D-01	9.33D-15	227	0
3	1.00D-11	5.711203341191D-02	8.70D-13	227	0
4	1.00D-11	2.759517093332D-02	1.10D-12	227	0
5	1.00D-11	1.630684007371D-02	8.32D-13	227	0
6	1.00D-11	1.078547700208D-02	5.52D-12	227	0
7	1.00D-11	7.668480899814D-03	1.70D-18	451	0
8	1.00D-11	5.734645923603D-03	1.27D-18	451	0
9	1.00D-11	4.451581218995D-03	5.48D-12	227	0
10	1.00D-11	3.556382369891D-03	1.06D-12	227	0
11	1.00D-11	2.906857650686D-03	6.45D-19	451	0
12	1.00D-11	2.420560898468D-03	4.73D-18	451	0
13	1.00D-11	2.046981113104D-03	3.93D-18	451	0
14	1.00D-11	1.753756207259D-03	1.61D-18	451	0
I =	1.00D-10	1.169652554129D+00	5.89D-11	4490	0

EPSA = 1.00D-11

K	EPS	INTEGRAL(K)	ERR	NFUN	ICON
1	1.00D-12	8.189391723725D-01	1.82D-16	419	0
2	1.00D-12	1.856188873073D-01	9.33D-15	227	0
3	1.00D-12	5.711203341191D-02	1.37D-13	227	0
4	1.00D-12	2.759517093332D-02	1.75D-13	227	0
5	1.00D-12	1.630684007371D-02	1.30D-13	227	0
6	1.00D-12	1.078547700208D-02	9.81D-13	227	0
7	1.00D-12	7.668480899814D-03	1.70D-18	451	0
8	1.00D-12	5.734645923603D-03	1.27D-18	451	0
9	1.00D-12	4.451581218990D-03	1.56D-18	451	0
10	1.00D-12	3.556382369884D-03	2.25D-18	451	0
11	1.00D-12	2.906857650686D-03	6.45D-19	451	0
12	1.00D-12	2.420560898468D-03	4.73D-18	451	0
13	1.00D-12	2.046981113104D-03	3.93D-18	451	0
14	1.00D-12	1.753756207259D-03	1.61D-18	451	0
I =	1.00D-11	1.169652554221D+00	9.50D-13	5162	0

表 2

COMPUTATION OF TODA INTEGRAL BY DSINHP,ADNN9D AND WYNNRD

EPSA	INTEGRAL	ERR	NTRM	NFUN	ICON
1.00D-04	1.169645403309D+00	5.39D-05	6	1347	0
1.00D-05	1.169652534726D+00	4.70D-09	8	2089	0
1.00D-06	1.169652534726D+00	4.70D-09	8	2089	0
1.00D-07	1.169652565772D+00	6.24D-08	8	2269	0
1.00D-08	1.169652560152D+00	9.35D-09	9	3460	0
1.00D-09	1.169652554154D+00	5.78D-10	12	5533	0
1.00D-10	1.169652554205D+00	5.58D-11	18	10569	0
1.00D-11	1.169652554218D+00	3.93D-12	16	11277	0

EPSA = 1.00D-04

K	EPS	INTEGRAL(K)	NFUN	ICON
0	1.00D-05	6.071774629607D-01	31	0
1	1.00D-05	3.569833262051D-01	131	0
2	1.00D-05	7.976811979785D-02	181	0
3	1.00D-05	3.537817901264D-02	221	0
4	1.00D-05	1.989572829997D-02	241	0
5	1.00D-05	1.273267873666D-02	261	0
6	1.00D-05	8.842019959000D-03	281	0
I =	1.00D-04	1.169645403309D+00	1347	0 5.39D-05

EPSA = 1.00D-05

K	EPS	INTEGRAL(K)	NFUN	ICON
0	1.00D-06	6.071775322843D-01	41	0
1	1.00D-06	3.569833165125D-01	141	0
2	1.00D-06	7.976811042553D-02	201	0
3	1.00D-06	3.537817716826D-02	241	0
4	1.00D-06	1.989572595724D-02	261	0
5	1.00D-06	1.273267728161D-02	281	0
6	1.00D-06	8.842019497905D-03	301	0
7	1.00D-06	6.496146655664D-03	301	0
8	1.00D-06	4.973602356157D-03	321	0
I =	1.00D-05	1.169652534726D+00	2089	0 4.70D-09

EPSA = 1.00D-06

K	EPS	INTEGRAL(K)	NFUN	ICON
0	1.00D-07	6.071775322843D-01	41	0
1	1.00D-07	3.569833165125D-01	141	0
2	1.00D-07	7.976811042553D-02	201	0
3	1.00D-07	3.537817716826D-02	241	0
4	1.00D-07	1.989572595724D-02	261	0
5	1.00D-07	1.273267728161D-02	281	0
6	1.00D-07	8.842019497905D-03	301	0
7	1.00D-07	6.496146655664D-03	301	0
8	1.00D-07	4.973602356157D-03	321	0
I =	1.00D-06	1.169652534726D+00	2089	0 4.70D-09

EPSA = 1.00D-07

K	EPS	INTEGRAL(K)	NFUN	ICON
0	1.00D-08	6.071775329934D-01	61	0
1	1.00D-08	3.569833166632D-01	201	0
2	1.00D-08	7.976811043110D-02	221	0
3	1.00D-08	3.537817716826D-02	241	0
4	1.00D-08	1.989572595863D-02	281	0
5	1.00D-08	1.273267728253D-02	301	0
6	1.00D-08	8.842019497905D-03	301	0
7	1.00D-08	6.496146625212D-03	321	0
8	1.00D-08	4.973602356505D-03	341	0
I =	1.00D-07	1.169652565772D+00	2269	0 6.24D-08

EPSA = 1.00D-08

K	EPS	INTEGRAL(K)	NFUN	ICON
0	1.00D-09	6.071775330078D-01	71	0
1	1.00D-09	3.569833165945D-01	281	0
2	1.00D-09	7.976811039386D-02	321	0
3	1.00D-09	3.537817715308D-02	361	0
4	1.00D-09	1.989572594932D-02	381	0
5	1.00D-09	1.273267727774D-02	381	0
6	1.00D-09	8.842019494110D-03	421	0
7	1.00D-09	6.496146622653D-03	401	0
8	1.00D-09	4.973602354626D-03	421	0
9	1.00D-09	3.929756227294D-03	421	0
I =	1.00D-08	1.169652560152D+00	3460	0 9.35D-09

EPSA = 1.00D-09

K	EPS	INTEGRAL(K)	NFUN	ICON
0	1.00D-10	6.071775330070D-01	91	0
1	1.00D-10	3.569833165946D-01	291	0
2	1.00D-10	7.976811038837D-02	381	0
3	1.00D-10	3.537817715022D-02	421	0
4	1.00D-10	1.989572594795D-02	441	0
5	1.00D-10	1.273267727567D-02	461	0
6	1.00D-10	8.842019493383D-03	461	0
7	1.00D-10	6.496146621885D-03	481	0
8	1.00D-10	4.973602353950D-03	481	0
9	1.00D-10	3.929756226935D-03	481	0
10	1.00D-10	3.183101033785D-03	501	0
11	1.00D-10	2.630661330108D-03	521	0
12	1.00D-10	2.210485926071D-03	521	0
=	1.00D-09	1.169652554154D+00	5533	0 5.78D-10

EPSA = 1.00D-10

K	EPS	INTEGRAL(K)	NFUN	ICON
0	1.00D-11	6.071775330069D-01	111	0
1	1.00D-11	3.569833165945D-01	421	0
2	1.00D-11	7.976811038742D-02	501	0
3	1.00D-11	3.537817714948D-02	501	0
4	1.00D-11	1.989572594759D-02	561	0
5	1.00D-11	1.273267727543D-02	541	0
6	1.00D-11	8.842019493209D-03	561	0
7	1.00D-11	6.496146621715D-03	601	0
8	1.00D-11	4.973602353746D-03	581	0
9	1.00D-11	3.929756226756D-03	621	0
10	1.00D-11	3.183101033652D-03	581	0
11	1.00D-11	2.630661330036D-03	641	0
12	1.00D-11	2.210485926028D-03	601	0
13	1.00D-11	1.883490796302D-03	601	0
14	1.00D-11	1.624030237148D-03	641	0
15	1.00D-11	1.414710732073D-03	621	0
16	1.00D-11	1.243398073611D-03	601	0
17	1.00D-11	1.101418344081D-03	641	0
18	1.00D-11	9.824379556965D-04	641	0
I =	1.00D-10	1.169652554205D+00	10569	0 5.58D-11

EPSA = 1.00D-11

K	EPS	INTEGRAL(K)	NFUN	ICON
0	1.00D-12	6.071775330070D-01	131	0
1	1.00D-12	3.569833165945D-01	491	0
2	1.00D-12	7.976811038740D-02	561	0
3	1.00D-12	3.537817714935D-02	601	0
4	1.00D-12	1.989572594750D-02	681	0
5	1.00D-12	1.273267727538D-02	701	0
6	1.00D-12	8.842019493162D-03	661	0
7	1.00D-12	6.496146621664D-03	721	0
8	1.00D-12	4.973602353723D-03	741	0
9	1.00D-12	3.929756226731D-03	721	0
10	1.00D-12	3.183101033637D-03	761	0
11	1.00D-12	2.630661330018D-03	741	0
12	1.00D-12	2.210485926015D-03	721	0
13	1.00D-12	1.883490796284D-03	761	0
14	1.00D-12	1.624030237137D-03	761	0
15	1.00D-12	1.414710732065D-03	741	0
16	1.00D-12	1.243398073598D-03	781	0
I =	1.00D-11	1.169652554218D+00	11277	0 3.93D-12

表 3

COMPUTATION OF TODA INTEGRAL BY QSINHP, AQNN9Q AND WYNNRQ

EPISA	INTEGRAL	ERR	NTRM	NFUN	ICON
1.00Q-10	1.16965255422328876330Q+00	1.97Q-11	12	16123	0
1.00Q-12	1.16965255422451650294Q+00	2.83Q-13	14	29345	0
1.00Q-14	1.16965255422448681746Q+00	3.01Q-15	16	53087	0
1.00Q-16	1.16965255422448648925Q+00	7.67Q-18	18	93369	0
1.00Q-18	1.16965255422448647798Q+00	5.10Q-19	20	161021	0
1.00Q-20	1.16965255422448647771Q+00	4.88Q-21	20	250421	0

EPISA = 1.00Q-10

K	EPSA	INTEGRAL(K)	NFUN	ICON
0	1.00Q-15	6.07177533006973545120Q-01	271	0
1	1.00Q-15	3.56983316594506131778Q-01	921	0
2	1.00Q-15	7.97681103873995686069Q-02	1161	0
3	1.00Q-15	3.53781771493473939820Q-02	1241	0
4	1.00Q-15	1.98957259475022587720Q-02	1301	0
5	1.00Q-15	1.27326772753657600798Q-02	1341	0
6	1.00Q-15	8.84201949314994512126Q-03	1381	0
7	1.00Q-15	6.49614662165805188174Q-03	1381	0
8	1.00Q-15	4.97360235371654209424Q-03	1401	0
9	1.00Q-15	3.92975622672346211376Q-03	1421	0
10	1.00Q-15	3.18310103363224502337Q-03	1421	0
11	1.00Q-15	2.63066133001219283770Q-03	1441	0
12	1.00Q-15	2.21048592601155011722Q-03	1441	0
I =	1.00Q-10	1.16965255422328876330Q+00	16123	0 1.97Q-11

EPISA = 1.00Q-12

K	EPSA	INTEGRAL(K)	NFUN	ICON
0	1.00Q-17	6.07177533006973544993Q-01	431	0
1	1.00Q-17	3.56983316594506131605Q-01	1381	0
2	1.00Q-17	7.97681103873995705147Q-02	1741	0
3	1.00Q-17	3.53781771493473921089Q-02	1901	0
4	1.00Q-17	1.98957259475022575834Q-02	1981	0
5	1.00Q-17	1.27326772753657591490Q-02	2041	0
6	1.00Q-17	8.84201949314994440699Q-03	2121	0
7	1.00Q-17	6.49614662165804913786Q-03	2221	0
8	1.00Q-17	4.97360235371653830244Q-03	2141	0
9	1.00Q-17	3.92975622672345997966Q-03	2201	0
10	1.00Q-17	3.18310103363224214502Q-03	2181	0
11	1.00Q-17	2.63066133001219108877Q-03	2241	0
12	1.00Q-17	2.21048592601154785460Q-03	2281	0
13	1.00Q-17	1.88349079628114413854Q-03	2221	0
14	1.00Q-17	1.62403023713380814388Q-03	2261	0
I =	1.00Q-12	1.16965255422451650294Q+00	29345	0 2.83Q-13

$$\text{EPSA} = 1.00\text{Q}-14$$

K	EPSA	INTEGRAL(K)	NFUN	ICON
0	1.00Q-19	6.07177533006973544990Q-01	591	0
1	1.00Q-19	3.56983316594506131603Q-01	2181	0
2	1.00Q-19	7.97681103873995705105Q-02	2741	0
3	1.00Q-19	3.53781771493473921005Q-02	3041	0
4	1.00Q-19	1.98957259475022579172Q-02	3151	0
5	1.00Q-19	1.27326772753657591398Q-02	3281	0
6	1.00Q-19	8.84201949314994439741Q-03	3361	0
7	1.00Q-19	6.49614662165804913209Q-03	3301	0
8	1.00Q-19	4.97360235371653845793Q-03	3461	0
9	1.00Q-19	3.92975622672345995909Q-03	3371	0
10	1.00Q-19	3.18310103363224213284Q-03	3481	0
11	1.00Q-19	2.63066133001219107190Q-03	3421	0
12	1.00Q-19	2.21048592601154784371Q-03	3581	0
13	1.00Q-19	1.88349079628114413075Q-03	3481	0
14	1.00Q-19	1.62403023713380813321Q-03	3461	0
15	1.00Q-19	1.41471073206268062963Q-03	3621	0
16	1.00Q-19	1.24339807359615240104Q-03	3561	0
I =	1.00Q-14	1.16965255422448681746Q+00	53087	0 3.01Q-15

$$\text{EPSA} = 1.00\text{Q}-16$$

K	EPSA	INTEGRAL(K)	NFUN	ICON
0	1.00Q-21	6.07177533006973544990Q-01	991	0
1	1.00Q-21	3.56983316594506131603Q-01	3481	0
2	1.00Q-21	7.97681103873995705104Q-02	4381	0
3	1.00Q-21	3.53781771493473921005Q-02	4561	0
4	1.00Q-21	1.98957259475022582563Q-02	4941	0
5	1.00Q-21	1.27326772753657591397Q-02	5081	0
6	1.00Q-21	8.84201949314994439737Q-03	5011	0
7	1.00Q-21	6.49614662165804913205Q-03	5241	0
8	1.00Q-21	4.97360235371653845786Q-03	5361	0
9	1.00Q-21	3.92975622672345995903Q-03	5311	0
10	1.00Q-21	3.18310103363224213279Q-03	5381	0
11	1.00Q-21	2.63066133001219107187Q-03	5401	0
12	1.00Q-21	2.21048592601154784360Q-03	5301	0
13	1.00Q-21	1.88349079628114413067Q-03	5561	0
14	1.00Q-21	1.62403023713380813314Q-03	5461	0
15	1.00Q-21	1.41471073206268062953Q-03	5321	0
16	1.00Q-21	1.24339807359615240097Q-03	5561	0
17	1.00Q-21	1.10141834406974740121Q-03	5501	0
18	1.00Q-21	9.82437955688014192157Q-04	5521	0
I =	1.00Q-16	1.16965255422448648925Q+00	93369	0 7.67Q-18

EPSA = 1.00Q-18

K	EPSA	INTEGRAL(K)	NFUN	ICON
0	1.00Q-23	6.07177533006973544990Q-01	1591	0
1	1.00Q-23	3.56983316594506131603Q-01	5141	0
2	1.00Q-23	7.97681103873995705104Q-02	6381	0
3	1.00Q-23	3.53781771493473921005Q-02	7201	0
4	1.00Q-23	1.98957259475022582563Q-02	7371	0
5	1.00Q-23	1.27326772753657591397Q-02	7641	0
6	1.00Q-23	8.84201949314994439737Q-03	8041	0
7	1.00Q-23	6.49614662165804913205Q-03	8161	0
8	1.00Q-23	4.97360235371653845786Q-03	8041	0
9	1.00Q-23	3.92975622672345995903Q-03	8361	0
10	1.00Q-23	3.18310103363224213279Q-03	8181	0
11	1.00Q-23	2.63066133001219107187Q-03	8441	0
12	1.00Q-23	2.21048592601154784360Q-03	8471	0
13	1.00Q-23	1.88349079628114413067Q-03	8241	0
14	1.00Q-23	1.62403023713380813314Q-03	8561	0
15	1.00Q-23	1.41471073206268062953Q-03	8561	0
16	1.00Q-23	1.24339807359615240097Q-03	8381	0
17	1.00Q-23	1.10141834406974740121Q-03	8441	0
18	1.00Q-23	9.82437955688014192156Q-04	8681	0
19	1.00Q-23	8.81744861294646458724Q-04	8641	0
20	1.00Q-23	7.95774732371634427971Q-04	8491	0
I =	1.00Q-18	1.16965255422448647798Q+00161021		0 5.10Q-19

EPSA = 1.00Q-20

K	EPSA	INTEGRAL(K)	NFUN	ICON
0	1.00Q-25	6.07177533006973544990Q-01	2231	0
1	1.00Q-25	3.56983316594506131603Q-01	8211	0
2	1.00Q-25	7.97681103873995705104Q-02	10371	0
3	1.00Q-25	3.53781771493473921005Q-02	11441	0
4	1.00Q-25	1.98957259475022582563Q-02	11891	0
5	1.00Q-25	1.27326772753657591397Q-02	12101	0
6	1.00Q-25	8.84201949314994439737Q-03	12521	0
7	1.00Q-25	6.49614662165804913205Q-03	12221	0
8	1.00Q-25	4.97360235371653845786Q-03	12741	0
9	1.00Q-25	3.92975622672345995903Q-03	12561	0
10	1.00Q-25	3.18310103363224213279Q-03	12951	0
11	1.00Q-25	2.63066133001219107187Q-03	12761	0
12	1.00Q-25	2.21048592601154784360Q-03	13181	0
13	1.00Q-25	1.88349079628114413067Q-03	13171	0
14	1.00Q-25	1.62403023713380813314Q-03	12841	0
15	1.00Q-25	1.41471073206268062953Q-03	13181	0
16	1.00Q-25	1.24339807359615240097Q-03	13241	0
17	1.00Q-25	1.10141834406974740121Q-03	13241	0
18	1.00Q-25	9.82437955688014192156Q-04	12901	0
19	1.00Q-25	8.81744861294646458724Q-04	13281	0
20	1.00Q-25	7.95774732371634427971Q-04	13381	0
I =	1.00Q-20	1.16965255422448647771Q+00250421		0 4.88Q-21

4. 結言

積分 $\int_0^{\infty} x dx / (1+x^6 \sin^2 x)$ を, 二重指数関数変換法, 適応型ニュートン・ユーツ法及び ρ -加速法を用いて計算し十分満足できる結果が得られた. このような貴重な経験をすることが与えられた戸田教授に深甚の謝意を捧げる次第である.

5. 参考文献

- (1) 高木貞治: 解析概論改訂第三版, p. 141 (1972).
- (2) Smith, D. A., et al.: Acceleration of Linear and Logarithmic Convergence, SIAM J. Numer. Anal. Vol. 16, pp. 223-240 (1979).
- (3) Takahashi, H. and Mori, M.: Double Exponential Formulas for Numerical Integration, Bull. R.I. M.S., Kyoto Univ., 9, pp. 721-741 (1974).
- (4) 二宮市三: 適応型ニュートン・ユーツ積分法の改良, 情報処理, Vol. 21, No. 5, pp. 504-512 (1980).
- (5) 二宮市三, 秦野甯世: 数学ライブラリ NUMPAC, 情報処理, Vol. 26, No. 9, pp. 1033-1042 (1985).
- (6) 名古屋大学大型計算機センター, ライブラリー・プログラム利用の手引 (数値計算編), (増補版) (1982).
- (7) 富士通, SSL II 使用手引書, pp 92-95 (1980).