

確率常微分方程式の定常解について の 見 解

東 大 丸 山 儀 四 郎

§1. motivation

こゝに述べる事柄は、常微分方程式の安定性など大局的な問題と確率過程論の接点にあると思われる一連の失に於いての問題提起である。確率微分方程式といえは「伊藤の方程式」は、「すべて確率論的」構造を以てゐる。その意味は、この方程式が、微分方程式の単純な確率化 (randomization) に止まらず、white noise を某介に於いて情報の発展の機構が方程式によって規定されてゐるということである。単純な確率化というのは、方程式の決定的要素——たとえば「係数——と確率変数や確率過程でおきかえる形式的な一般化を意味する。ところで、これからつべやうとする事柄は実は、このような形式的な一般化に関連するものである。この種の一般化は、動機が形式的であつて、数式的に裏打ちある現象を含んでゐるとは、必ずしもいふべきでないが、場合によ

つては新しい問題を提起する可能性を持っている。

Langevin 方程式は確率微分方程式の古典的に有名な例であり、それからマルコフ過程の解として得られることは周知のことである。これからのべき事柄は同様なやり方で解のマルコフ性を漏らす問題にも発展させることかであるが、ここではいま一つ別の方向——Langevin 方程式でもとうていあるように——解の定常性を主題として考えることにする。

Langevin 方程式は

$$(1) \quad Lx = \frac{dx}{dt} + kx = w'(t) \quad (k > 0)$$

としかいれ、 x は直線上に運動する粒子の速度、 k は抵抗係数、 w' は random な外力である。 w' をブラウン運動の微分ととれば、そり一つの解として Ornstein-Uhlenbeck 過程

$$(2) \quad x(t) = \int_{-\infty}^t e^{-k(t-s)} dw(s)$$

が得られる。これは正規定常マルコフ過程であることはよく知られてゐる。勿論一般の初期条件を含む解を確率積分の形で表わすことは容易であるが、(2) が (1) の唯一の定常解であることを強調したい。
(2)

ここで $w'(t)$ は最も基本的な定常過程であるが、右②
 は通常の強定過程 $f(t)$ でありかえりも同様のこ
 とがいわれる; 唯一つの定常解があるとして

$$(3) \quad x(t) = \int_{-\infty}^t e^{-k(t-s)} f(s) ds$$

と与えられる。

(3) の右②の指数関数による積分核は無限大区間
 $(-\infty, \infty)$ にわたる, L の一つの Green 関数である。

§2 概周期係数の常微分方程式

簡単なため話しを若干延ばすことにし、つぎに常微分方程式

$$(4) \quad Lx = f(t), \quad -\infty < t < \infty,$$

$$Lx = \frac{d^m x}{dt^m} + a_1(t) \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + a_m(t) x,$$

$$a_1(t), \dots, a_m(t) \in \mathcal{B}$$

を考える。こゝに $\mathcal{B}$ は $(-\infty, \infty)$ 上の実数値概周期関
 数 (Bohr の) の全体である。

L の定義域 $\mathcal{D}(L)$ は

$$\mathcal{D}(L) = \{x: x \in C^m, Lx \in C, x \in C\},$$

こゝに $C = (-\infty, \infty)$ 上の実有界連続関数の全体。

従つて (4) の右② $f \in C$ とする。さて可微分関数の

初等的性質から $x \in \mathcal{D}(L)$ であれば、常に $x', \dots, x^{(m)} \in C$ であることが知られてゐる。

概周期係数の微分方程式は相當古くから研究されてゐる。〔1〕。周期係数の方程式は力学の問題とも関連して重要なものであるが、前者はむしろ一般化という意味があり、また係数の概周期性はその特殊性質ゆゑに、可成り大巾に一般論の展開が可能にする。

解の安定性に関連して、regularity (〔1〕による) とよばれる性質がある。

「任意の $f \in C$ に対して、有界な解 $x \in \mathcal{D}(L)$ が少なくとも一つ存在するとき L は regular であるという。」

さて一般論によれば、 L が regular であるためには、特に $f \in \mathcal{P}$ の場合に上記「…」が成立すれば充分であり、また L が regular であれば上記の有界な解は唯一であることが証明される。そしてこの裏面として次の事実が証明されてゐる：「ムハマヂエフ」 L が regular であるための必要充分な条件は (〔1〕)

$$(5) \quad \tilde{L}x = 0$$

の有界な解が trivial $x \equiv 0$ の場合に限ることである。こゝに

$$\tilde{L} = \frac{d^m}{dt^m} + \tilde{a}_1(t) \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \cdots + \tilde{a}_m(t)$$

$\{\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m\}$ は $\{a_1, \dots, a_m\} \in C \times \cdots \times C$ (m重), shift を与える orbit closure (位相は C の sup. norm) ^(つぎ) 即ち $\{a_1(\cdot + h_k), \dots, a_m(\cdot + h_k)\}$ $k=1, 2, \dots$, なす形の列の一致極限として与えられる任意の元である。

さて L の regularity は $a_1, \dots, a_m$ の具体的な性質から判定できる有効な条件を与えることは容易ではないが, 特にな $a_1, \dots, a_m$ が一定値である場合は古典的によく知られている。このとき基本解係 ρ として知られた事実から容易に, 又はそれにより記述したハミルトンの定理を援用すれば, ますま容易に ρ のこと分かる。 L が regular であるための必要充分条件はその特性方程式

$$(6) \quad \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \cdots + a_m = 0$$

の根が虚軸上に乗らなうことである。

§3 定常解の存在

さてこれは一応, 形式上の類似性によるのであるが,

概週期関数に定常過程を対応させてみる。ある種の定常過程の sample function は実際確率 1 で概週期関数になるし、定常過程は時間を経るとして確率変数の空間の曲線とみて、特殊な有界性を持ち、もしそれが metrically transitive であるならば再帰性をもつなどの理由から色々な意味でこの対応が自然であると考えられる。然し一つだけ注意しなければならない。標準的な実正規定常過程 $x(t)$ に対して、よく知られており、

$$P\left(\lim_{T \rightarrow \infty} \max_{|t| \leq T} |x(t)| = \infty\right) = 1$$

であって、その sample function の行動は通常、概週期関数とは全く異なっている。直観的な言い方をすれば、概週期関数の $(\varepsilon$ 近傍への) 再帰時間は周期的であるのに対して、定常過程の場合はそのような性質をもたない。

いま R^m 値強定常過程 $(a_1(t, \omega), \dots, a_m(t, \omega))$ を係数とする微分作用素 L を考え、それが如何なる条件のもとで regular になるかを問題にする。その際に L に課せられる微分の意味 — sample wise か、強微分かなど —, L の定義域が ~~如何なる~~ 問題になる。

なるし、また "regularity" とどう定義するかも問題になる。ここで正確な解答は得られぬが、概括的にいって、不連続な右辺の定常過程を ~~ある~~ クラス (線型空間をなす) からえらんだとき、その解はまた別のあるクラス (これも線型空間をなす) から選ぶと結果として、解が 一つだけ一つ 存在することをわけて regular と呼ぶことになる。

最も簡単な場合は $a_1, \dots, a_m$ が t も ω も含まない定数である。このとき $E(|f(t, \omega)|) < \infty$ とおいて

$$(7) \quad Lx = f \quad (f \text{ は定常過程})$$

をみたす定常解が 一つだけ一つ (この意味で L が regular) 存在するための条件は (6) の根が虚軸上に乗らなるとである。即ち概周期解の場合と同一の regularity が成立する。

問題の本質を見きわめられれば具体例を解析する必要がある。その意味で最も単純であるが有効な具体例として Langevin の方程式の拡張になる場合

$$(8) \quad Lx \equiv \frac{dx}{dt} + a(t)x = f(t)$$

を示す。 概周期関数の場合の定理が成立する。

定理 (Massera) $a(t)$ が概周期関数かつ
 L が regular (通常、概周期解の意味で) である
 ための条件は ([1])

$$(9) \quad M(a) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T a(t) dt \neq 0,$$

これは全(類似の)定常過程の場合にも成り立つ
 ことを以下に示す。 formulation を簡単にするために
 ergodic な流れ T_t を与えられた Ω 上, a, f は $a(T_t \omega),$
 $f(T_t \omega)$ の如く T_t から生成される $P((t \rightarrow f(T_t \omega)) \in C) = 1$
 が成り立つと仮定する。 任意の f に対して sample
 wise に C' であった (P) の解となる定常解 $x(t) = x(T_t \omega)$
 が存在するための条件を求めよう。 (9) に対する
 条件として (必要)

$$(A) \begin{cases} a(T_t \omega) = \lambda + a_0(T_t \omega), \quad \lambda \neq 0 \text{ (定数)} \\ E(a_0) = 0 \end{cases}$$

を示す。

簡単のため $\lambda > 0$ のとを示す。 このとき Green
 関数

$$G(t, s) = \begin{cases} \exp\left(-\int_s^t a_0(T_\tau \omega) d\tau\right) & t \geq s \\ 0 & t < s \end{cases}$$

δ

を用いて, 求める定常解が唯一つ存在して

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \exp\left(-\int_s^t a(T_\tau \omega) d\tau\right) \cdot f(T_s \omega) ds$$

とかけるとは容易に確かめられる. 実際この右辺は

$$x(t) = \int_0^{\infty} \exp\left(-\int_0^s a(T_{-t} \omega') d\tau\right) f(T_{-s} \omega') ds,$$

$$\omega' = T_t \omega$$

と変形されることから $x(t)$ の定常性が分り, また

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s^{-1} \int_0^s a(T_{-t} \omega') d\tau = \lambda > 0$$

から $x(t)$ が sample wise C^1 にあることが分る.

安定性の問題の用語としては "S 方程式"

$$(10) \quad \frac{dx}{dt} + a(T_t \omega)x = 0$$

の characteristic exponent (Liapounov) が $-\lambda$ である.

逆に L 以上の意味で regular なとすると, 特に $f \equiv 1$ に対して解が存在する ω を x_0 とする.

(命題) 方程式を変形して

$$(11) \quad a(t) = \frac{1}{x_0} - \frac{x_0'}{x_0}$$

-B

$$x_0' = 1 - a(t)x_0$$

であり、右辺 $1 - a(t)x_0$ に対して (t, x) 平面上で t 軸
 を 45° で横切るベクトル場が与えられる。だから積分
 曲線 x_0 は t 軸と下から上へ一度だけ横切る = t は
 あるても、上から下へ横切る = t はない。かくして x_0 の
 可能な行動は (1) $x_0(T_t\omega) > 0$ ($-\infty < t < \infty$) (2)
 $x_0(T_t\omega) < 0$ ($-\infty < t < \infty$) (3) random time $\tau(\omega)$
 が存在して $x_0(T_t\omega) < 0$ ($t < \tau$), $x_0(T_t\omega)$
 > 0 ($t > \tau$) に限られる。 (1), (2), (3) を与える ω -set
 は何れも T_t -不変であり、 T_t が ergodic であるから、(1),
 (2), (3) のうち一つしか成立しない。我々の定常過程の
 sample function x に対して (3) の行動は不可能である。もし
 (1) の場合 $\uparrow$ を試みると、random sequence $T_n(\omega) \uparrow \infty$ と
 存在して $(t \in (\omega) > 0)$

$$x_0(T_{T_n}\omega) \geq c(\omega).$$

(11) を積分して

$$\frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} a(T_t\omega) dt = \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} \frac{1}{x_0(T_t\omega)} dt$$

$$- (\log x_0(T_{\tau_n} \omega) - \log x_0(\omega)) / \tau_n.$$

$n \rightarrow \infty$ に対して右辺の第1項は0に近づき、第2項は正の値に近づくと仮定し、このことから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau_n} \int_0^{\tau_n} a(T_t \omega) dt = E(a(\omega)) > 0.$$

かくて (A) の必要条件であることが分った。

さて regularity をより強めてみる。解のクラスとして

$$E(|x(T_t \omega)|) < \infty$$

を要求したとすれば、 a にも強い条件が要求される。異
常的な挙動を可能な限り排除するため $a(T_t \omega)$ が正
規定常過程となる場合を考える。 a_0 が連続なス
ベクトル密度 $\kappa(\lambda)$ を持つとする：

$$E(a_0(T_t \omega) a_0(\omega)) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \lambda t \kappa(\lambda) d\lambda.$$

$f \equiv 1$ に対する解は

$$\begin{aligned} E(|x(T_t \omega)|) &= \int_0^\infty E \exp\left(-\int_0^s a(T_\tau \omega) d\tau\right) ds \\ &= \int_0^\infty E \exp\left(-\lambda s - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \kappa(\lambda) \left(\frac{\sin \lambda s/2}{\lambda/2}\right)^2 d\lambda\right) ds \\ &< \infty \end{aligned}$$

であるならばなり。 尤も

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} k(\lambda) \left(\frac{\sin \lambda s/2}{\lambda/2} \right)^2 d\lambda = \pi k(0)s + o(s)$$

であるから, 可成り自然な条件として, $E(|x|) < \infty$
であるをあげ

$$(12) \quad \lambda > \pi k(0)$$

である。 さてこのとき実は解 x に対して ω と ω' と
の二つが成り立つ。 即ち, ω と ω' は

$$(13) \quad E(f^2(\omega)) < \infty$$

である。 $E(|x(t)|) < \infty$ とみれば "故-つの定常
解" が存在する。 可成りなすは

$$|x(t)| \leq \left(\int_0^\infty (1+s^2) \exp\left(-2 \int_0^s a(T-\tau \omega') d\tau\right) ds \right)^{1/2} \\ \times \left(\int_0^\infty \frac{1}{1+s^2} f^2(T-s \omega') ds \right)^{1/2}, \quad \omega' = T_t \omega,$$

$$E(|x(t)|) \leq \int_0^\infty (1+s^2) E \exp\left(-2 \int_0^s a(T-\tau \omega) d\tau\right) \\ \times \int_0^\infty \frac{1}{1+s^2} E(f^2(\omega)) ds < \infty$$

さて先の問題を一般化するにあたっては作用素

$$Lx \equiv \frac{dx}{dt} + Ax$$

$$A = \| a_{ij}(T_t \omega) \|_{i,j=1,\dots,n}, \quad x \in \mathbb{R}^n, T_t \text{ ergodic}$$

を研究すればよから、とくに A が三角形、即ち $a_{ij} \equiv 0$ ($i < j$) となる場合は上記等しい事実の系として直ちにこの解答が得られる。 L が regular であるための必要充分な条件は

$$E(a_{jj}(\omega)) \neq 0 \quad (j=1, \dots, n).$$

(c.f. [1])

文献

- [1] М. А. Красноселовский, В. И. Бузг, Ю. С. Колесов;
非線形型 概週期振動, изд. «Наука», Москва 1970.
- [2] Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн;
ハミルトン空間の微分方程式の解の安定性,
изд. «Наука», Москва 1970.
(後者に直接とはなつたが、これは抽象論の特徵として問題の構図を極めて明解にとらえてゐる)