

# 可微分写像群及び無限対称群の ユニタリ表現について

京大理 平井 武 (Takeshi HIRAI)

序.  $M$  を  $C^r$ -級微分多様体とする ( $1 \leq r \leq \infty$ ).  
 $M$  上の  $C^r$ -級微分同相写像全体を  $\text{Diff}(M)$   
 で表し, その部分群である

$G = \text{Diff}_0(M) \equiv \{g \in \text{Diff}(M); \text{supp}(g) \text{ compact}\}$   
 の表現について論ずるが, この論文の主目的である。  
 つまり,  $\text{supp}(g) = \{x \in M; g \neq \text{id}\}$ ,  $\{x \in M; g \neq \text{id}\}$  は開集である。  
 $G = \{g \in \text{Diff}_0(M); \text{supp}(g) \text{ compact}\}$  の各階の導関数  $T_x g$  のコンパクト  
 一様収束により  $S$  立相を入れると, 局所コンパクトでは  
 ないが,  $S$  立相群となる。我々の,  $G$  の表現の構成に  
 は, 無限対称群  $S_\infty$  の  $S$  立相の既約ユニタリ表現  
 ( $= \text{IUR}$ ) が用いられるが, これについてはここで深入り  
 する余裕はないので文献 [6] を参照されたい。但し,  
 $S_\infty$  とは, 自然数全体  $\mathbb{N}$  上の有限置換全体のなす離  
 散群である。

これらの問題についての歴史的なことは割愛するが,

そのかわりとして、参考文献をやや詳しくしておいた。  
この論文では、 $M$  は連結で非コンパクトとする。また  
 $\tilde{G}_\infty$  で、 $M$  上の置換全体のなす群を表わす。

## §1. 測度空間

この § では、 $G$  が準不変的に働く測度空間を作る。  
Gelfand 達は [20] で、 $M$  上の点の configuration (配位)  
のなす空間  $\Gamma_M$  の上に Poisson 測度等を考へたが、  
ここで与える測度は本質的には "ordered configuration"  
の空間上に乗っているわけが分る。

1.1.  $M$  上の測度は各局所座標近傍に於て、その  
座標系に関する Lebesgue 測度と同値であるとき  
L-測度と呼ばれている。 $M$  上の測度の系  $\mu = (\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$   
で次の条件を満たすものを考へる。

(M1) 各  $\mu_i$  は L-測度である。

(M2)  $M$  のコンパクト部分集合  $K$  をとり、 $K$  の  $\sigma$  環の可  
測分割  $K = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i$  に対し、定数  $c_K > 0$  があって

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_i(K_i) \leq c_K.$$

(注)  $M$  の可測集合  $B$  に対し、その可測分割  $B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$   
に對する  $\sup \{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_i(B_i) \}$  をとって、 $\mu_\infty(B) = \sup \{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_i(B_i) \}$   
とおくと、 $\mu_\infty$  は  $M$  上の測度になる。これを  $\sup \mu_i$  と書く。  
すると、条件 (M2) は次と同値である。

$$(M2') \quad (\sup_i \mu_i)(K) < \infty \quad (\forall K \subset M, \text{コンパクト}).$$

1.2. 可測構造  $X = \prod_{i \in \mathbb{N}} M_i$ ,  $M_i = M$ , には  $G$  から左から右へ用い,  $\tilde{G}_\infty \supset G_\infty$  から右から左へ用いる:  $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X$  に対し

$$gx = (gx_i)_{i \in \mathbb{N}}, \quad x\tau = (x_{\tau(i)})_{i \in \mathbb{N}} \quad \left( \begin{array}{l} g \in G \\ \tau \in \tilde{G}_\infty \end{array} \right).$$

さて,  $M$  の Borel 可測集合全体を  $\mathcal{M}_M$ ,  $X$  の直積可測構造における可測集合全体を  $\mathcal{M}_X$  と書く。  $X$  の直積部分集合  $E = \prod_{i \in \mathbb{N}} E_i$ ,  $E_i \subset M_i$ , が次の条件を満たすとき  $\mu$ -unital であると言う。

$$(U1) \quad E_i \in \mathcal{M}_M \text{ は互に素で, } \mu_i(E_i) > 0 \quad (\forall i).$$

$$(U2) \quad \sum_{i \in \mathbb{N}} |1 - \mu_i(E_i)| < \infty.$$

定義 1.1.  $E = \prod_i E_i$ ,  $E' = \prod_i E'_i$  を  $\mu$ -unital とする。

$E$  と  $E'$  が  $\mu$ -cofinal (記号:  $E \preceq E'$ , また,  $E \sim E'$ ) であるとは

$$(CF) \quad \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_i(E_i \ominus E'_i) < \infty \quad (E_i \ominus E'_i \text{ は対称差})$$

を満たすことであり, strongly cofinal (記号:  $E \approx E'$ ) とは

$$(SCF) \quad \varepsilon \gg 0 \text{ に対し, } \mu_i(E_i \ominus E'_i) = 0,$$

を満たすことである。

(1)  $\mu$ -unital な  $E$  を一つ固定して,

$$\Sigma(E) = \Sigma(\mu, E) \equiv \{E' \text{ } \mu\text{-unital}; E' \preceq E\}$$

と置く。この集合族  $\Sigma(E)$  から生成された  $\sigma$ -ring

を  $\mathcal{M}(E) = \mathcal{M}(\mu, E)$  と書く。但し、集合族  $\mathcal{O}$  が  $\sigma$ -ring であるとは

$$(i) \quad A_n \in \mathcal{O} \quad (n=1, 2, \dots) \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{O},$$

$$(ii) \quad A, B \in \mathcal{O} \quad \Rightarrow \quad A \setminus B \in \mathcal{O},$$

を満たすものである。  $\sigma$ -ring 上の測度について、Radon-Nykodim の定理など、基本的なことは、問題なく成立する。

補題 1.1.  $\mathcal{M}(E)$  の元は、  $\mathcal{M}_X$  の元であり、可算個の  $E(E)$  の元によって与えられるものである。

補題 1.2. (i)  $E' = \prod_{i \in \mathbb{N}} E'_i \in \mathcal{E}(E)$ ,  $\sigma \in \mathbb{Q}_0$ ,  $g \in G$ , に対し、 $E'\sigma = \prod_{i \in \mathbb{N}} E'_i \sigma$ ,  $gE' = \prod_{i \in \mathbb{N}} gE'_i$ , とおくと

$$E'\sigma \sim E', \quad gE' \sim E'.$$

(ii) 集合族  $\mathcal{E}(E)$ , したがって  $\mathcal{M}(E)$  は  $\mathbb{Q}_0$ -不変,  $G$ -不変である。

(i)  $\Rightarrow$  は,  $gE' \sim E'$  を証明する。  $K = \text{supp}(g) = \{p \in M; gp \neq p\}$ , とおくと

$$\mu_i(gE'_i) = \mu_i[(gE'_i \cap K) + (E'_i \setminus K)]$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_i \mu_i[(gE'_i) \ominus E'_i] &\leq \sum_i \mu_i(gE'_i \cap K) + \sum_i \mu_i(E'_i \cap K) \\ &\leq 2(K) \quad (\text{仮定 (M2) による}) // \end{aligned}$$

定義 1.2.  $M$  の点集合  $\gamma$  が configuration であるとは,

$\gamma$  が  $M$  に集積点を持たないことである。また  $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \tilde{X}$  が (infinite) ordered configuration であるとは、点集合  $\gamma_x \equiv \{x_i; i \in \mathbb{N}\}$  が configuration であることである。

$M$  の infinite configuration の全体を  $T_M$ , ordered configuration の全体を  $\tilde{X}$  と書く。

$$\tilde{X} \ni x \mapsto \gamma_x \in T_M \cong \tilde{X}/\mathbb{G}_\infty$$

は  $\mathbb{G}_\infty$  をファイバーとする主ファイバーバンドルである。

この  $T_M$  上に,  $\mathbb{G}_\infty$  の既約ユニタリ表現 (= IUR) に付随したベクトルバンドルを考へて  $T_M$  上の Poisson 測度  $P_m$  ( $m$  は  $M$  上の無限  $L$ -測度) に関する  $L^2$ -section のなる Hilbert 空間上に自然に出来た  $G$  の表現が既約であることを示したのが [20] である。

我々もここでやろうとしているのは, かいっせんて"言えば"  $T_M \cong \tilde{X}/\mathbb{G}_\infty$  のかわりに  $\Omega_M = \tilde{X}/\mathbb{G}_\infty$  をとり,  $\Omega_M$  上に  $(\mu, \omega(E))$  から測度を定め,  $\mathbb{G}_\infty$ -主ファイバーバンドル  $\tilde{X} \rightarrow \Omega_M$  と  $\mathbb{G}_\infty$  の IUR に付随するベクトルバンドルから,  $G$  の IUR を与えようとするものである。ところが,  $\Omega_M$  は  $T_M$  と異なり, 位相的には特異で病的であるので, 可測構造のみを取扱ふのはならない。しかし, こうして得られた  $G$  の IUR の族は非

前に大々く, 知らずには  $L^2(M, m)$  上の  $G$  の自然表現  $\Gamma$  をとったとき,  $\Gamma$  の無限テンソル積は (例外外的な場合を除いて) 上記の IUR の直積分に分解される。

1.3 測度空間. 可測空間  $(X, \mathcal{A}(E))$  の上に,  $M$  上の測度の系  $\mu = (\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$  から出発して測度を与える。まず  $E' = \prod_{i \in \mathbb{N}} E'_i \in \mathcal{E}(E)$  をとる。 ( $i = \mu_i(E'_i)$ ) とおくと,  $0 < \prod_{i \in \mathbb{N}} c_i < \infty$  である。Kolmogorov の拡張定理により, 直積空間  $E' = \prod_{i \in \mathbb{N}} E'_i$  の上には確率測度  $(\mu_i | E'_i)$  の直積が一意的に存在する。よって  $\mu_i | E'_i$  の直積  $\nu_\mu^{E'}$  も存在する。そこで任意の  $B \in \mathcal{A}(E)$  を考えると, 補題 1.1 により, 可算個の  $E^{(k)} \in \mathcal{E}(E)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , により  $\nu_\mu^{E'}$  表される。  $\nu_\mu^{E^{(k)}}$  達が  $\mathcal{E}_1$ -consistent であるので,

$$\nu_{\mu, E}(B) \equiv \sum_k \nu_\mu^{E^{(k)}}(B_k), \quad B_k \equiv B \cap (E^{(k)} \setminus \bigcup_{\lambda=1}^{k-1} E^{(\lambda)}),$$

と置けば,  $\nu_{\mu, E}$  は  $\mathcal{A}(E)$  上の測度である。

命題 1.3. (i)  $E \sim F$  とすると,  $\mathcal{A}(E) = \mathcal{A}(F)$ , かつ

$$\nu_{\mu, E} = \nu_{\mu, F}.$$

(ii)  $E \not\sim F$  とすると,  $\forall B \in \mathcal{A}(E) \cap \mathcal{A}(F) = \emptyset$ , かつ

$$\nu_{\mu, E}(B) = \nu_{\mu, F}(B) = 0.$$

よって,  $\mu$ -unitary 集合  $E$  の各同値類  $[E]$  に対して,

それぞれ  $\Sigma$  に素な測度  $\nu_{\mu, E}$  が構成された。

注意  $(\Sigma, \mathcal{A}(E), \nu_{\mu, E})$  は次の意味で  $\sigma$ -有限である：

$$\forall B \in \mathcal{A}(E), \exists B_n \in \mathcal{A}(E), n=1, 2, \dots, \text{ s.t.}$$

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \quad \nu_{\mu, E}(B_n) < \infty \quad (\forall n)$$

さて,  $\tilde{\Sigma}(\Sigma)$  を ordered configuration 全体のなる空間とする。次は 我々の議論にとって基本的である。

命題 1.4.  $\Sigma$  上の測度  $\nu_{\mu, E}$  は 次の意味で  $\tilde{\Sigma}$  の上に乗っている：  
 $\forall B \in \mathcal{A}(E)$  に  $\tilde{\Sigma}$  に対し,  $B \cap \tilde{\Sigma}$  は  $\mathcal{A}(E)$  の元である

$$\nu_{\mu, E}(B) = \nu_{\mu, E}(B \cap \tilde{\Sigma}).$$

測度  $\nu_{\mu, E}$  のこの性質と, 次で述べる  $G_\infty$ -準不変性から,  $\Sigma_M = \tilde{\Sigma}/G_\infty$  上に "バクトル(直)  $L^2$ -空間" が定義できることになる。

1.4. 準不変性. これは,  $\nu_{\mu, E}$  の  $G_\infty$  および  $G_\Gamma$  に関する準不変性を主とする。  $\sigma \in G_\infty$  に  $\tilde{\Sigma}$  に対し,  
 $\text{supp}(\sigma) \equiv \{i \in \mathbb{N} ; \sigma(i) \neq i\}$  とおく。

定理 1.5. (i) 測度  $\nu_{\mu, E}$  は  $G_\infty$ -準不変である：

$$\sigma \in G_\infty, B \in \mathcal{A}(E), x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in B \text{ に } \tilde{\Sigma} \text{ に対し,}$$

$$(1.1) \quad \frac{d\nu_{\mu, E}(x\sigma)}{d\nu_{\mu, E}(x)} = \prod_{i \in \text{supp}(\sigma)} \frac{d\mu_{\sigma(i)}(x_i)}{d\mu_i(x_i)}.$$

(ii) 測度  $\nu_{\mu, E}$  は  $G_\Gamma$ -準不変である： $\gamma \in G_\Gamma$  に  $\tilde{\Sigma}$  に対し,

$$(1.2) \quad \frac{d\mu_{\mu, E}(gx)}{d\mu_{\mu, E}(x)} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \frac{d\mu_i(gx_i)}{d\mu_i(x_i)} \quad (\forall B \in \mathcal{E}(E) \text{ の上})$$

(1.1)  $\Rightarrow$  これは (1.2) のみを用いる。そのために  $B$  として  $E' = \prod_{i \in \mathbb{N}} E'_i \in \mathcal{E}(E)$  をとり  $E'$  上で 2 つの直積測度を比較する。角谷の定理 [12] の拡張を適用する。比較したいのは  $\prod_i (\mu_i|E_i)$  と  $\prod_i (\mu_i^g|E_i)$  である。今且し,  $\mu_i^g(C) = \mu_i(gC)$  ( $C \in \mathcal{C}_i$ )。後でも引用するので角谷の定理を述べておく。

補題 1.6, 測度空間  $(m_i, \mathcal{X}_i), (m'_i, \mathcal{X}_i), i \in \mathbb{N}$ ,  $\sum \prod_i m_i(\mathcal{X}_i) < \infty, \sum \prod_i m'_i(\mathcal{X}_i) < \infty$ , 且し,  $m_i \sim m'_i (\forall i)$  である。  
[2] は絶対連続]

$$R(m_i, m'_i) \equiv \int_{\mathcal{X}_i} \sqrt{\frac{dm'_i(t)}{dm_i(t)}} dm_i(t)$$

とおく。  $\prod_{i \in \mathbb{N}} R(m_i, m'_i) > 0, = 0$ , 1 に依って  $\prod_i \mathcal{X}_i$  上の直積測度  $\prod_i m_i, \prod_i m'_i$  は互に絶対連続, または, 互に垂直である。さらに, 前者の場合の密度函数は次で与えられる:  $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \prod_i \mathcal{X}_i$  に対し

$$\frac{d(\prod_i m'_i)(x)}{d(\prod_i m_i)(x)} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \frac{dm'_i(x_i)}{dm_i(x_i)} \quad \left( \begin{array}{l} \text{右辺は} \\ x \text{ に依って変化する} \end{array} \right)$$

さて, 今度は  $x \mapsto gx, \mathcal{X}_i \rightarrow E'_i, m_i \mapsto \mu_i|E_i, m'_i \mapsto \mu_i^g|E_i$ , とする。  $K = \text{supp}(g)$  とおくと  $gK = K$ 。

$$R(m_i, m'_i) = \int_{E'_i} \sqrt{\frac{d\mu_i(gx_i)}{d\mu_i(x_i)}} d\mu_i(x_i) = \int_{E'_i \setminus K} d\mu_i(x_i) + \int_{E'_i \cap K} \sqrt{\frac{d\mu_i(gx_i)}{d\mu_i(x_i)}} d\mu_i(x_i)$$

$$\therefore |\mu_i(E_i') - R(m_i, m_i')| \leq \mu_i(E_i' \cap K) + (\mu_i(E_i' \cap K) \cdot \mu_i(gE_i' \cap K))^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_i |\mu_i(E_i') - R(m_i, m_i')| &\leq \sum_i \mu_i(E_i' \cap K) + \left( \sum_i \mu_i(E_i' \cap K) \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_j \mu_j(gE_i' \cap K) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2C_K < \infty \quad (\text{仮定 } (M_2)_1 \text{ による}). \end{aligned}$$

よって,  $\prod_i \mu_i(E_i')$  が収束することから,  $\prod_i R(m_i, m_i')$  も収束する事が分り, (ii) の証明が完了する。

## §2. $G = \text{Diff}_0(M)$ の表現の構成

2.1. 条件  $(M_1), (M_2)$  を満たす測度族  $\mu = (\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $\mu$ -unitary 集合  $E = \prod_{i \in \mathbb{N}} E_i$ , および  $G_\infty$  の IUR  $(\pi, V(\pi))$  を与える。ここで  $V(\pi)$  は  $\pi$  の表現空間を表す。  $\Sigma = (\mu, E; \pi)$  とおく。測度空間  $(X, \mathcal{A}(E), \gamma_{\mu, E})$  をとり, 主ファイバーバンドル  $\tilde{X} \rightarrow \Omega_M = \tilde{X}/G_\infty$  に交代して,  $(\pi, V(\pi))$  は associate  $L^2$  バグトルバンドルの  $L^2$ -section をとって Hilbert 空間を作る。その上に  $G$  の表現を与える。我々は Hilbert 空間の2つの実現を与えるが, それぞれ  $\mu = \mu_1, \mu_2$  に立つ。はじめに与える形は  $G$  の表現の既約性・同値性を示すのに適している。まず,  $X$  上の  $V(\pi)$ -値連続関数  $f(x)$  に交代し, 形式的に  $\sigma \in G_\infty$  及び  $g \in G$  の作用を次で与える:

$$(2.1) \quad R_\Sigma(\sigma)f(x) = \sqrt{\frac{d\gamma_{\mu, E}(x\sigma)}{d\gamma_{\mu, E}(x)}} \cdot \pi(\sigma)(f(x\sigma)),$$

$$(2.2) \quad T_{\Sigma}(g)f(x) = \sqrt{\frac{d\mathcal{V}_{\mu,E}(g^{-1}x)}{d\mathcal{V}_{\mu,E}(x)}} f(g^{-1}x) \quad (x \in \tilde{X}).$$

このとき  $\mathbb{G}_{\infty}$  の作用と  $G$  の作用とは  $\mathbb{Z}_1$ -可換である。

2.2. 第一の実現.  $E' = \prod_{i \in \mathbb{N}} E_i \in \mathcal{E}(E)$  をとり, 測度空間  $(E', \mathcal{M}(E)|E', \mathcal{V}_{\mu,E}|E')$  を考える。ここで

$$\mathcal{M}(E)|E' \equiv \{B \cap E' ; B \in \mathcal{M}(E)\}.$$

系 1.1 より  $E' \cap E'\sigma = \emptyset$  ( $\forall \sigma \in \mathbb{G}_{\infty}, \sigma \neq 1$ ) であるから, さらに, 命題 1.4 により, modulo  $\mathcal{V}_{\mu,E}$ -null sets  $\mathbb{Z}$ ,  $E' \subset \tilde{X}$  と考えられる。すなわち,  $E'$  は 集合  $E'\mathbb{G}_{\infty} \subset \tilde{X}$  の fibre map  $\tilde{X} \rightarrow \Omega_M = \tilde{X}/\mathbb{G}_{\infty}$  に沿った一つの section (または“基本領域”) と考え得る。  $E'$  上の  $V(\pi)$ -直,  $L^2$ -可積分な Hilbert 空間

$$\ell_{|E'}^{\Sigma} \equiv L^2(E', \mathcal{M}(E)|E', \mathcal{V}_{\mu,E}|E'; V(\pi)) \cong L^2(E') \otimes V(\pi)$$

をとる。2つの  $E', E'' \in \mathcal{E}(E)$  に対し,  $\varphi_1 \in \ell_{|E'}^{\Sigma}$ ,  $\varphi_2 \in \ell_{|E''}^{\Sigma}$  の内積を

$$(2.3) \quad \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \equiv \sum_{\sigma \in \mathbb{G}_{\infty}} \int_{E' \cap E''\sigma} \langle \varphi_1(x), R_{\Sigma}(\sigma^{-1}) \varphi_2(x) \rangle_{V(\pi)} d\mathcal{V}_{\mu,E}(x)$$

と置く。この内積によって  $\ell_{|E'}^{\Sigma}$ ,  $E' \in \mathcal{E}(E)$ , を 3 元集合にするかによって Hilbert 空間  $\ell^{\Sigma}$  が得られることが示される。定義により,

$$\ell^{\Sigma} = \bigvee_{E' \in \mathcal{E}(E)} \ell_{|E'}^{\Sigma} \quad (\text{生成})$$

であるが、測度  $\nu_{\mu, E}$  の4生管から次が分る。

補題 2.1. (i) 測度 0 の集合を modulo として,  $\mathcal{M}(E)$  は,  $\{E' \in \mathcal{E}(E); E' \simeq E \text{ (strongly ofinal)}\}$  により生成される。

(ii)  $\mathcal{H}_\Sigma$  は 部分空間  $\mathcal{H}_{E'}^\Sigma$ ,  $E' \in \mathcal{E}(E)$  から  $E' \simeq E$ , から張られる。

我々は次の結果に至り達する。

定理 2.2.  $T_\Sigma(g)$ ,  $g \in G$ , は Hilbert 空間  $\mathcal{H}_\Sigma$  の上に作用し,  $G$  の (連続な) ユニタリ表現を与える。

(注)  $G \ni g \mapsto T_\Sigma(g)$  の強連続性は, 主として, 条件 (M2) から来る。

2.3. 第 2 の実現 Hilbert 空間の別の実現を与える。これらの実現から見ると, 2.2 の内容が見通しになる。すなわち,  $\tilde{X}$  上の  $V(\pi)$ -値可測函数  $f$  で

$$(2.4) \quad R_\Sigma(\sigma)f = f \quad (\forall \sigma \in \mathbb{G}_\infty)$$

を満たすもののうち,  $\text{supp}(f) \equiv \{x \in \tilde{X}; f(x) \neq 0\}$  が  $\mathcal{M}(E)$  に属するものを選ぶ。集合  $\text{supp}(f)$  は, (2.4) より,  $\mathbb{G}_\infty$ -不変であり, fibre map  $\tilde{X} \rightarrow \Omega_M$  に  $\tilde{X}$  対応する  $\text{supp}(f)$  の section,  $F$  が  $\mathcal{M}(E)$  からとれる (理由:  $\mathbb{G}_\infty$  は可算):  $\text{supp}(f) = F\mathbb{G}_\infty$ ,  $F \cap F\sigma = \emptyset$  ( $\forall \sigma \in \mathbb{G}_\infty, \neq 1$ )。

このとき

$$\|f\|^2 \equiv \int_F \|f(x)\|_{V(\pi)}^2 d\nu_{\mu, E}(x)$$

とおくと、この直交は、 $F$  のと  $\varphi$  とには  $\langle f, \varphi \rangle = 0$  である。  $\|f\| < \infty$  を満たす  $f$  の全体をとると、 modulo  $\{f; \|f\| = 0\}$  で、Hilbert空間  $\mathcal{H}^\Sigma$  を得る。

定理 2.3 (i)  $\mathcal{H}^\Sigma$  上に、公式 (2.2) により、 $G$  の表現が得られる。

(ii)  $\mathcal{H}^\Sigma$  から  $\mathcal{H}^\Sigma$  への自然な  $G$ -同型は次で与えられる。  
 $E' \in \mathcal{E}(E), \varphi \in \mathcal{H}^\Sigma_{|E'}, 1 \in \tilde{X} \times L,$

$$(2.5) \quad Q_\Sigma \varphi \equiv \sum_{\sigma \in G_\omega} R_\Sigma(\sigma) \varphi$$

とおくと、 $Q_\Sigma \varphi \in \mathcal{H}^\Sigma$  であり、 $\|Q_\Sigma \varphi\| = \|\varphi\|$ 。

① 主ファイバーバンドル  $\tilde{X} \rightarrow \Omega M = \tilde{X}/G_\omega$  は  $\tilde{X}$  の作用は非特異に病めるものか、把之得ないか、可測性だけには注目すれば、(結果として) うまく行くことが分る。

§3. 表現のパラメーター  $\Sigma = (M, E; \pi)$  に関する  $M, E$  の正則化

$G$  の表現  $(T_\Sigma, \mathcal{H}^\Sigma)$  の既約性、同値性を調べるのに、 $M, E$  を与えるだけ良い性質を持ったものに置き換えておくことが望ましい。

3.1.  $E = \prod_{i \in \mathbb{N}} E_i$  の正則化  $E$  を、それと  $\mu$ -cotinual な  $F = \prod_{i \in \mathbb{N}} F_i$  に置き換えても、同一の  $G$  の

表現を得る:  $\Sigma(E) = \Sigma(F)$ ,  $\nu_{\mu, E} = \nu_{\mu, F}$ ,  $z_{12}$

$$T_{\Sigma} = T_{\Sigma'}, \quad \Sigma' = (\mu, F; \Pi).$$

$z = z'$ ,  $E$  と  $z'$ , 条件 (U1), (U2) の代りに次の条件を持つものをとっておくことができる。

(U3) 各  $E_i$  は, 開かつ相対コンパクト。

(U4)  $\dim M \geq 2$  とする。各  $E_i$  は連結かつ単連結。

$\forall i, j$  ( $i \neq j$ ) に  $\bar{E}_i \cap \bar{E}_j$  は  $\bar{E}_i$  と  $\bar{E}_j$  を  $\bar{E}_i \cup \bar{E}_j$  の外で結ぶ path がある。

### 3.2. $\mu = (\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$ の正規化.

これは, 山崎 [22, 第 9 章, 定理 9.1] から得られる次の補題を踏まえるとする。

補題 3.1. 測度空間  $(\mu_i, \Sigma_i)$ ,  $(\mu'_i, \Sigma'_i)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , は補題 1.6 の仮定を満たすとする。

(i) 直積測度  $\mu_i$  は絶対連続:  $\prod_i \mu_i \sim \prod_i \mu'_i$ ,  
 このための必要条件は

$$(3.1) \quad \left| \left( \prod_{i=m}^n \mu_i \right) - \left( \prod_{i=m}^n \mu'_i \right) \right| \left( \prod_{i=m}^n \Sigma_i \right) \rightarrow 0 \quad (n \geq m \rightarrow \infty).$$

(ii)  $\prod_i \mu_i \sim \prod_i \mu'_i$  のための充分条件としては,

$$(3.2) \quad \sum_{i \in \mathbb{N}} |\mu_i - \mu'_i|(\Sigma_i) < \infty.$$

但し,  $|\mu_i - \mu'_i|$  は符号付測度  $\mu_i - \mu'_i$  の total variation,

新しい定義を導入しておく。  $\mu$  と  $\mu' = (\mu'_i)_{i \in \mathbb{N}}$  に対し、  
 $M \perp \mathbb{Z}$  上  $\mu$  と  $\mu'$  が strongly equivalent (記号:  $\mu \sim_{st} \mu'$  on  $M$ )  
 であるとは

$$(SEM) \quad (\sup_i |\mu_i - \mu'_i|)(M) < \infty$$

を満たすことであり、直積集合  $F = \prod_{i \in \mathbb{N}} F_i$  上  $\mu \sim_{st} \mu'$   
 (on  $F$ ) であるとは

$$(SEP) \quad \sum_{i \in \mathbb{N}} |\mu_i - \mu'_i|(F_i) < \infty$$

を満たすことである、とする。

補題 3.2  $\mu \sim_{st} \mu'$  on  $M$  とする。

(イ) 直積集合  $F$  上  $F_i$  が  $\mathbb{Z}$  に素ならば  
 $\mu \sim_{st} \mu'$  on  $F$

(ロ)  $F_i$  が  $\mathbb{Z}$  に素である  $F$  に対し、 $\mu$ -unital  $\Leftrightarrow \mu'$ -unital,  
 さらに、 $\varepsilon(\mu, E) = \varepsilon(\mu', E)$ ,  $\alpha(\mu, E) = \alpha(\mu', E)$

すなわち、先の補題 3.1 を用いると成り立つ。

補題 3.3  $F \in \mathcal{E}(\mu, E)$  に対し、 $\mu \sim_{st} \mu'$  on  $F$  と  
 すると、 $F$  は  $\mu'$ -unital となり、 $F$  上の直積測度に対し、

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} (\mu_i|_{F_i}) \sim \prod_{i \in \mathbb{N}} (\mu'_i|_{F_i})$$

から次に至る。

命題 3.4  $\mu \sim_{st} \mu'$  on  $M$ , とする。  $E$  が  $\mu$ -unital  
 ならば  $\mu'$ -unital であり、 $\Sigma' = (\mu', E; \pi)$  と置くと

$$T_{\Sigma} \cong T_{\Sigma'}, \quad (\cong = \text{タノ同値})$$

これによって,  $\mu = (\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$  としては, はいめから次の条件を満たすものをおく。

(M3) 各  $\mu_i$  は,  $M$  上の局所座標に関する Lebesgue 測度に関するに,  $C^\infty$ -級の密度関数を持つ。

## §4. $G$ の部分群とその表現

4.1. 部分群  $BCM$  を開集合とすると,  $G(B)$  を  $\text{Diff}_0(B)$  の単位元の連続生成とする。  $E = \prod_i E_i$  を  $\mu$ -invariant で条件 (U3), (U4) を満たすものとする。

$G(E) \equiv \left\{ g \in G; gE_i = E_{\sigma(i)} \text{ (}\exists \sigma \in S_\infty, \forall i \in \mathbb{N}) \right\}$  と置く。

補題 4.1. (i)  $G(E) \equiv \prod_{i \in \mathbb{N}} G(E_i)$  [直積] とおくと,

$$G(E) \supset G(E)$$

(ii)  $\dim M \geq 2$  とする。  $\forall \sigma \in S_\infty$  に対し,  $\exists g_\sigma \in G$  s.t.

$$g_\sigma E_i = E_{\sigma(i)} \text{ (}\forall i), g_\sigma|_{E_j} = \text{identity on } E_j \text{ (}\forall j \notin \text{supp}(\sigma)\text{)}$$

(注) 主として (ii) の証明は条件 (U4) が効く。

$$gE \equiv \prod_i gE_i, E_\sigma \equiv \prod_i E_{\sigma(i)} \text{ とおくと, } g_\sigma E = E_\sigma.$$

## 4.2. $G(B)$ , $G(F)$ の表現

条件 (M1), (M2) を満たす  $\mu = (\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $\mu' = (\mu'_i)_{i \in \mathbb{N}}$  を

とす。BCIM を用いるとすると,  $L^2(B, \mu_i)$  上は自然に  $G(B)$  のユニタリ表現

$$(4.1) \quad U_{\mu_i, B}(g) \psi(p) = \sqrt{\frac{d\mu_i(g^{-1}p)}{d\mu_i(p)}} \psi(g^{-1}p) \quad (p \in B)$$

が得られる。また

$\mu$ -unital 集合  $E$ ,  $F = \prod_i F_i \in \mathcal{E}(E)$ ,  $F_i$  開  $(\forall i)$ , とすると, Hilbert 空間  $L^2(F, \mathcal{M}(E)|F, \nu_{\mu, E}|F)$  上は  $G(F) = \prod_i G(F_i)$  のユニタリ表現

$$(4.2) \quad V_{\mu, F}(g) \varphi(x) = \sqrt{\frac{d\nu_{\mu, E}(g^{-1}x)}{d\nu_{\mu, E}(x)}} \varphi(g^{-1}x)$$

が得られる。

補題 4.2. (i)  $G(B)$  の表現  $U_{\mu_i, B}$  は既約である。(ii)  $U_{\mu_i, B}$  と  $U_{\mu'_i, B}$  とは同値であり, その同値対応は, 次の与えられる:

$$L^2(B, \mu_i|B) \ni \psi \mapsto \sqrt{\frac{d\mu_i(p)}{d\mu'_i(p)}} \cdot \psi(p) \in L^2(B, \mu'_i|B).$$

補題 4.3. (i)  $G(F)$  の表現  $V_{\mu, F}$  は既約である。

(ii)  $E$  及び  $F \in \mathcal{E}(E)$  が  $\mu$ -unital でもあるとすると,

$$(K) \quad V_{\mu, F} \cong V_{\mu', F} \iff \prod_{i \in I} (\mu_i|F_i) \sim \prod_{i \in I} (\mu'_i|F_i).$$

(R)  $\cong$  のときの同値対応は, 次の与えられる:

$$L^2(F, \nu_{\mu, E}|F) \ni \varphi \mapsto \sqrt{\frac{d\nu_{\mu, E}(x)}{d\nu_{\mu', E}(x)}} \cdot \varphi(x) \in L^2(F, \nu_{\mu', E}|F).$$

(注) 主張(ii) の証明には、補題4.2(iii) および補題1.6を用いる。

4.3.  $G(F)$  の表現.  $G$  の表現  $(T_\Sigma, \mathcal{U}_\Sigma)$  を考える。部分群  $G(F)$ ,  $F = \prod F_i \in \Sigma(E)$ ,  $F_i$  開  $(\neq 1)$ , に対して, 部分空間  $\mathcal{U}_{\prod F_i}$  は不変である。さらに, 群  $G(F)$  の構造に関する補題4.1を用いれば, 次を得る。これは  $T_\Sigma$  の既約性の証明により, 基本的である。

補題4.4.  $\dim M \geq 2$  とする。このとき  $T_\Sigma|_{G(F)}$  は  $\mathcal{U}_{\prod F_i}$  上で既約表現を与える。

5. 表現  $(T_\Sigma, \mathcal{U}_\Sigma)$  の既約性

我々は既約性の証明に次の一般的補題を用いる。

補題5.1.  $H$  を群,  $T$  を Hilbert 空間  $\mathcal{U}$  上の  $H$  のユニタリ表現とする。次の条件を満たす  $H$  の部分群の族  $\{H_\delta\}_{\delta \in \Delta}$  と  $\mathcal{U}$  の部分空間の族  $\{\mathcal{U}_\delta\}_{\delta \in \Delta}$  が存在すれば,  $T$  は既約である。

(a)  $\mathcal{U}_\delta$  は  $H_\delta$ -不変で,  $H_\delta$ -既約;

(b)  $\mathcal{U}$  は  $\{\mathcal{U}_\delta\}_{\delta \in \Delta}$  で3生成される;

(c)  $\forall \delta, \delta' \in \Delta$  に対し, 有限鎖  $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_\delta, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_r = \mathcal{U}_{\delta'}$  が存在して,  $\mathcal{U}_{\delta_i} \cap \mathcal{U}_{\delta_{i+1}} \neq (0)$  ( $1 \leq i < r$ )。

(d) ある  $\delta_0 \in \Delta$  に対して,  $H_{\delta_0}$  の  $\mathcal{U}_{\delta_0}$  上の IUR sum

$(\mathcal{C}_\Sigma)^\perp \subset \mathcal{C}_\Sigma$  には現われない。

この補題を  $(T_\Sigma, \mathcal{C}_\Sigma)$  に適用すれば、可算  $E$  を条件 (U3), (U4) を満たすように正規化しておく。そして、 $\Delta \rightarrow \{F \in \mathcal{E}(E); F \sim E\}$ ,  $\sigma \rightarrow F$ ,  $H\sigma \rightarrow G(F)$ ,  $\mathcal{C}_\Sigma \rightarrow \mathcal{C}_{\Sigma|F}$ , と対応させて、 $(a) \sim (d)$  が成立していることを示す。すると、 $\dim M \geq 2$  として、

定理 5.2.  $\mu = (\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$  を条件 (M1), (M2) を満たす  $M$  上の測度の列、 $E = \prod_{i \in \mathbb{N}} E_i \subset X$  を  $\mu$ -unital 集合、 $\pi$  を  $\mathbb{Q}_\infty$  の IUR とする。  $\Sigma = (\mu, E; \pi)$  に対し、 $G$  の表現  $(T_\Sigma, \mathcal{C}_\Sigma)$  は  $\mathcal{C}_\Sigma = \mathcal{E}_\Sigma$  である。

## §6. 同値性・非同値性

$\Sigma = (\mu, E; \pi)$  と  $\Sigma' = (\mu', E'; \pi')$  をとる。つまり、 $\mu' = (\mu'_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $E' = \prod_{i \in \mathbb{N}} E'_i$  は  $\mu'$ -unital,  $\pi'$  は  $\mathbb{Q}_\infty$  の IUR, 両者  $T_\Sigma$  と  $T_{\Sigma'}$  の同値・非同値を問題にする。

6.1. 自然な同値.  $\tilde{\mathbb{Q}}_\infty$  の元  $a$  に対して、 $\mu^a = (\mu_i^a)_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $E^a = \prod_{i \in \mathbb{N}} E_i^a$ ,  $\pi^a(\sigma) = \pi(a\sigma a^{-1})$  ( $\sigma \in \mathbb{Q}_\infty$ ) と置く。簡単に示すように、

補題 6.1.  $a \in \tilde{\mathbb{Q}}_\infty$  に対して、 $\Sigma^a = (\mu^a, E^a; \pi^a)$  と置く

$$I_{\Sigma} \cong I_{\Sigma'} \quad \text{である.}$$

6.2. 同値の十分条件. 命題 3.4 を用いれば次を得る.

補題 6.2.  $\Sigma, \Sigma'$  に  $\dot{\alpha} \leq \tau$ ,  $\mu \sim \mu'$  on  $\perp \mathcal{M}$ ,  $E \sim E'$   
 $\mu$ -cofinal (或は  $\mu'$ -cofinal),  $\Pi \cong \Pi'$ , とすれば  
 $I_{\Sigma} \cong I_{\Sigma'}$  である.

これは 3 か 4 によって " $\mu \sim \mu'$  on  $\perp \mathcal{M}$ " は  $I_{\Sigma} \cong I_{\Sigma'}$  のためには 3 強過ぎる条件である. 実際次の定理がこれを明示する.

定理 6.3.  $\Sigma, \Sigma'$  に  $\dot{\alpha} \leq \tau$ ,  $F = \prod_{i \in \mathbb{N}} F_i$  が存在して,

(a)  $F \leq E$  か  $F \leq E'$  で

$$\prod_i (\mu_i | F_i) \sim \prod_i (\mu'_i | F_i) \quad (F \perp),$$

(b)  $\text{supp}(F) \equiv \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i$  の外で  $(\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$  と  $(\mu'_i)_{i \in \mathbb{N}}$  が comparable,

とすると,  $\Sigma(\mu, E) = \Sigma(\mu', E')$ ,

$$\alpha(\mu, E) = \alpha(\mu', E'), \quad \nu_{\mu, E} \sim \nu_{\mu', E'},$$

となり,  $I_{\Sigma} \cong I_{\Sigma'}$  が自然に得られる.

但し, 次の定義を採用している.

定義 6.1. 可測集合  $B \subset \perp \mathcal{M}$  の上で  $\mu$  と  $\mu'$  とが comparable であるとは, 互に素な  $D_i \subset B$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) に  
 対し,  

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(D_i) < \infty \iff \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu'(D_i) < \infty.$$

6.3.  $\mu_i = \mu'_i = m$  ( $\forall i$ ) の場合.

この特別な場合には, 条件 " $\mu \sim_{st} \mu'$  on  $M$ " は自明である。我々は [7] に従って, 次の必要条件を得た。すなわち,  $\mu, \mu'$  をともに  $m$  で代表させることにする。

定理 6.4.  $\Sigma = (m, E; \Pi)$ ,  $\Sigma' = (m, E'; \Pi')$ , とすると,  $T_\Sigma \cong T_{\Sigma'}$  (ユ=タリ同値) の必要条件は,

$$\exists a \in \mathbb{Q}_\infty \text{ st. } E' \sim E a, \Pi' \cong \Pi^a.$$

この定理の証明のうち, 必要条件であることの証明は意外に長くかかる [7]。もっと短い証明がないか何れも検討してみた結果である。我々の証明の要諦は次の問題になる。

問題 6.5.  $(E\hat{\mathbb{Q}}_\infty) \cap E'$  が  $\nu_{m, E'}$ -外測度で  $> 0$  ならば, ある  $a \in \hat{\mathbb{Q}}_\infty$  があって,  $\nu_{m, E'}(Ea \cap E') > 0$ , 即ち  $Ea \sim E'$  ( $m$ -final) となるか? (1)

この問題が一筋縄ではいかないのは, 集合  $\hat{\mathbb{Q}}_\infty$  が非可算であり,  $E\hat{\mathbb{Q}}_\infty$  が非可算個の  $Ea$  の和になっているからである。

§17. Remarks

7.1 Gelfand 達 [20] の IUR との非同値

$M$ 上の  $L$ -測度  $m$  に対して  $T_M \cong \tilde{X}/\tilde{G}_\infty$  上の Poisson 測度  $P_m$  は次のように与えられる。  $B \in \mathcal{A}_M$  と  $k \geq 0$  に対し、  
 $T(B, k) = \{x \in \Gamma_M; |x \cap B| = k\}$  と置く。  
 つまり  $|x \cap B|$  は  $x \cap B$  の位数である。つまり

$$P_m(T(B, k)) = e^{-m(B)} \frac{m(B)^k}{k!}.$$

さらに、  $B_j \in \mathcal{A}_M$ ,  $1 \leq j \leq N$ , を互に素、とせば

$$P_m\left(\bigcap_{j=1}^N T(B_j, k_j)\right) = \prod_{j=1}^N P_m(T(B_j, k_j)) \quad (k_j \geq 0)$$

さて、  $\tilde{G}_\infty$  の IUR  $\pi$  をとて、これは associate  $L_2$  ベクトル空間の、  $P_m$  に関する  $L^2$ -section の空間の上には、標準的な方法で、  $G$  の表現  $S_{m, \pi}$  を与える。  $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$  とおけば、  $\pi$  から  $G_n \times \tilde{G}_{\infty-n} \cong \{\tau \in \tilde{G}_\infty; \tau I_n = I_n\}$  の有限次元既約表現の誘導表現であることは、  $S_{m, \pi}$  は既約である [20]。

定理 7.1.  $\Sigma = (M, E; \pi)$  に対する  $G$  の IUR  $T_\Sigma$  は、表現  $S_{m, \pi}$  (これはその部分表現) に同値ではない。

(主) 証明には、  $[(E\tilde{G}_\infty) \cap \tilde{X}]/\tilde{G}_\infty \subset \Gamma_M$  の  $P_m$ -測度が 0 であることを用いる。

### 7.2. Gelfand 達の IUR の間の同値・非同値

$M$  上の 2 つの  $L$ -測度  $m, m'$  に対して、  $P_m \sim P_{m'}$

の急の必要条件是、完全には分らないが、或程度のことには証明できた。これによって、 $S_{m,\pi}$  と  $S_{m',\pi'}$  の階の関数と或程度分る。

命題 7.2.  $m \sim_{st} m'$  on  $M$ , かつ  $|m-m'|(\mathbb{M}) < \infty$ ,

とすると, (イ)  $I_m \sim I_{m'} (\Gamma_M \text{上});$

(ロ)  $S_{m,\pi} \cong S_{m',\pi'} \Leftrightarrow \pi \cong \pi'.$

これと逆方向の結果としては,

命題 7.3.  $m, m'$  は  $M$  上,  $\exists C > 1$ , s.t.

$m(\{p \in M; \frac{dm'(p)}{dm(p)} \geq C\}) = \infty$ , とする。

(イ)  $I_m \not\sim I_{m'} [I_{m'} \neq I_m \text{ に } M \text{ 上で絶対連続でない}]$

(ロ) かつ  $S_{m,\pi} \neq S_{m',\pi'}.$

(注) 証明には,  $A = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \Gamma(B_j, 0)^c$ ,  $B_j \subset M$ ,  $\Gamma$  は  $\mathbb{Z}_1$  素, の形の  $\Gamma_M$  の部分集合で,  $I_m(A) = 0$ ,  $I_{m'}(A) > 0$  とするものを見付ける。ここは  $D^c = \Gamma_M \setminus D$  (補集合)。

命題 7.3 の否定は緩められる。

### 7.3. テンソル種表現の既約分解

$m_i, i \in \mathbb{N}$ , を  $M$  上の  $L$ -測度とする。  $L^2(M, m_i)$  上の  $G$  の自然表現の ( $i \in \mathbb{N}$  にあたる) テンソル種の既約分解を, 我々の IUR  $T_M$  を用いて, かなりの場合に実行できる。

#### 7.4. $G_\infty$ の IUR の具体的な構成 [6] との関係

我々は,  $\mu$ -unital 集合  $E = \prod_{i \in \mathbb{N}} E_i$  の定義に, “ $E_i$  は  $\mathbb{R}$  に素” という条件 (U1) を置いた。この条件から “測度  $\nu_{\mu, E}$  が  $\hat{X} \subset X$  に乗っている” ことが出るので非常に重要なものである。しかし, [6] の結果を見ると, この条件を緩められることが分る。即ち,  $N \geq 2$  を fix して, ( $M$  の代りに)  $M^N = M \times \cdots \times M$  ( $N$  回) を単位として, 考えていこうとすることができる。

#### 参考文献

- [1] S. Albeverio, R. Hoegh-Krohn & D. Testad, Irreducibility and reducibility for the energy representation of the group of a Riemannian manifold into a compact semisimple Lie group, J. Funct. Anal., **41**(1981), 378-396.
- [2] H. Araki, Factorizable representations of current algebras, Publ. RIMS, **5**(1969/70), 361-422.
- [3] P. Delorme, Irréductibilité de certaines représentations de  $G^{(X)}$ , J. Funct. Anal., **30**(1977), 36-47.
- [4] M.I. Golenishcheva-Kutuzova, Local classification of moments for groups of diffeomorphisms, Usp. Mat. Nauk, **42**(1987), 181-182 (= Russ. Math. Surv., **42**(1987), 217-218).
- [5] -----, Functional moduli of moments for groups of diffeomorphisms of two-dimensional manifolds, Funct. Anal. Appl., **21**(1987), 69-70 (= Funct. Anal., **21**(1988), 315-316).

- [6] T. Hirai, Construction of irreducible unitary representations of the infinite symmetric group  $S_\infty$ , J. Math. Kyoto Univ., **31**(1991), 495-541.
- [7] -----, Irreducible unitary representations of the group of diffeomorphisms of a non-compact manifold, preprint.
- [8] R.S. Ismagilov, Unitary representations of the group of diffeomorphisms of a circle, Funct. Anal. Appl., **5**(1971), 45-53 (= Funct. Anal., **5**(1971), 209-216).
- [9] -----, On unitary representations of diffeomorphisms of a compact manifold, Izv. Akad. Nauk SSSR, **36**(1972), 180-208 (= Math. USSR Izv., **6**(1972), 181-209).
- [10] -----, Unitary representations of the group of diffeomorphisms of the space  $\mathbf{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , Funct. Anal. Appl., **9**(1975), 144-145 (= Funct. Anal., **9**(1975), 154-155).
- [11] -----, Imbedding of a group of measure-preserving diffeomorphisms into a semidirect product and its unitary representations, Mat. Sb., **113**(1980), 81-97 (= Math. USSR Sb., **41**(1982), 67-81).
- [12] S. Kakutani, On equivalence of infinite product measures, Ann. Math., **49**(1948), 214-224.
- [13] A.A. Kirillov, Orbits of the group of diffeomorphisms of a circle and local Lie superalgebras, Funct. Anal. Appl., **15**(1981), 75-76 (= Funct. Anal., **15**(1981), 135-137).
- [14] -----, Kähler structures on K-orbits of the group of diffeomorphisms of a circle, ibid., **21**(1987), 42-45 (= Funct. Anal., **21**(1987), 122-125).

- [15] ----- & D.V. Yu'rev, Kähler geometry of the infinite-dimensional homogeneous space  $M = \text{Diff}_+(S^1)/\text{Rot}(S^1)$ , *ibid.*, **21**(1987), 35-46 (= *Funct. Anal.*, **21**(1988), 284-294).
- [16] Yu.A. Neretin, The complementary representations of the group of diffeomorphisms of the circle, *Usp. Mat. Nauk*, **37**(1981), 213-214 (= *Russ. Math. Surv.*, **37**(1982), 229-230).
- [17] N. Obata, Measures on the configuration space, 1-42, unpublished.
- [18] G.B. Segal, Unitary representations of some infinite dimensional groups, *Commun. Math. Phys.*, **80**(1981), 301-342.
- [19] A.M. Vershik, I.M. Gelfand & M.I. Graev, Irreducible representations of the group  $G^X$  and cohomology, *Funct. Anal. Appl.*, **8**(1974), 67-69 (= *Funct. Anal.*, **8**(1974), 151-153).
- [20] -----, ----- & -----, Representations of the group of diffeomorphisms, *Usp. Mat. Nauk*, **30**(1975), 3-50 (= *Russ. Math. Surv.*, **30**(1975), 1-50).
- [21] H. Weyl, The Classical Groups, Their Invariants and Representations, 2nd ed., Princeton University Press, Princeton, 1946.
- [22] Y. Yamasaki, Measures on infinite dimensional spaces, Vol.2, Kinokuniya, 1978, Tokyo (in Japanese).