

曲面の退化について

京大理 西口 健二

§ 0. 序

以下、曲面といえば、2次元コンパクト複素多様体を意味する。

曲面の退化については、これまで、射影的や、ケーラー的の仮定のもとで、よく調べられてきた。本論では、それらを仮定せずに考察する。いくつかの奇妙な例が構成される。

$\varphi: X \rightarrow \Delta$ を、3次元複素多様体 X から、1次元円板 $\Delta = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < \varepsilon\}$ への、固有全射正則写像で、各ファイバーは連結とする。さらに、 $\varphi^{-1}(\Delta^*) \xrightarrow{\varphi} \Delta^* (\Delta^* = \Delta - \{0\})$ は、smooth な写像であると仮定する。このような $\varphi: X \rightarrow \Delta$ のことを、曲面の退化 とよぶ。もう一つの曲面の退化、 $\varphi': X' \rightarrow \Delta$ が、 $\varphi: X \rightarrow \Delta$ の modification であるとは、双有理型写像 $\psi: X' \dashrightarrow X$ で 次の図式

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & X \\ & \searrow \varphi & \swarrow \varphi \\ & \Delta & \end{array}$$

と可換にし、さらに制限重: $\varphi'^{-1}(\Delta) \rightarrow \varphi^{-1}(\Delta)$ が、双正則になるような重が存在するときをいう。我々の目的は、曲面の退化を、このような、modification を除いて、分類することである。

曲面の退化 $\varphi: X \rightarrow \Delta$ において、 $\varphi = 0$ で定まる X の因子 X_0 を、特異ファイバー とよび、

$X_t = \varphi^{-1}(t)$ ($t \neq 0$) を、一般ファイバー とよぶ。

$X_0 = \sum n_i V_i$ を、 X_0 の既約分解とし、 V_i^* を V_i の非特異モデルとする。小平次元 k が、退化でどのように振舞うかに関して次の予想がある：

予想

$$k(X_t) \geq k(V_i^*) \quad i=1, 2, \dots$$

なお、 k は曲面の smooth な変形に対して不変であり、 $k(V_i^*)$ は V_i の非特異モデル V_i^* のとりかえによらず定まることに注意しておく。(Iitaka)

また、 $\varphi: X \rightarrow \Delta$ が予想を満足していれば、その任意の modification も予想をみたすことがわか

3. (Ueno)

φ が射影的 (と双有理型同値) のとき、上の予想は正しい。これは、Persson [6] が、部分的に示し、Ueno [8] が、Kulikov [3] と Persson - Pinkham [7] の結果をつか、て完全に証明した。さらに、 $k(x_t) \geq 1$ のときは、 φ が射影的という仮定なしで、一般に予想が成立することもわかる。これらと、§1 で簡単に復習する。

φ が一般のとき、上の予想は正しくない。実際、 $k(x_t) = 0, -\infty$ のとき、上の予想の反例がある。§2 でそのような例を構成する。

§3 では、一般ファイバーと $K3$ 曲面として特異ファイバーと、もう少し詳しく分類する。§3 の内容は、時間の関係で、講演では全く述べることはできなかった。

§1. 曲面の退化における小平次元の振舞

この節では、Persson [6] と Ueno [8] の結果を復習する。 $\varphi: X \rightarrow \Delta$ を曲面の退化とする。 X_t は単純正規交叉と仮定する。既約分解を $X_t = \sum k_i V_i$

とする。

(i) $h(X_t) = 2$ のとき。

各 V_i は、射影的である。

(ii) $h(X_t) = 1$ のとき。

各 V_i は、楕円曲面または線織面と、有理型同値である。

これらの場合は、相対標準束 $\omega_{X/\Delta} = \mathcal{O}_X(K_X \otimes \phi^* K_{\Delta}^{-1})$ を考え、 $\phi_* \omega_{X/\Delta}^{\otimes m}$ ($m \gg 0$) によって定まる X から $P(\phi_* \omega_{X/\Delta}^{\otimes m})$ への有理型写像を調べることに、
てわかる。ここで、 ϕ が射影的という仮定は
不要である。もちろん、予想が成立している。

(iii) $h(X_t) = 0$ のとき。

ϕ : 射影的と仮定する。予想を示すためには、
次の (iv) をみたす ϕ についての予想を確かめ
たい。

(iv) $\left\{ \begin{array}{l} \phi: X \rightarrow \Delta \text{ は射影的かつ semi-stable (つまり } X_0 \text{ は被約か} \\ \text{つ単純正規交叉), 一般ファイバーは、極小} \\ \text{モデルで } h(X_t) = 0, \quad p_g(X_t) = 1 \end{array} \right.$

(semi-stable reduction をして) (3) のような φ を考える。曲面の分類により、一般ファイバーは、K3 曲面またはアーベル曲面とである(とくに、標準束は自明である)。したがって、予想は、次の Kulikov, Persson-Pinkham の結果に帰着された。

定理 (Kulikov [3], Persson-Pinkham [7])

$\varphi: X \rightarrow \Delta$ を semi-stable な退化で、一般ファイバーは自明な標準束をもつ曲面とする。

さらに

(*) X_0 の各成分は代数曲面

と仮定する。このとき、 φ の modification $\varphi': X' \rightarrow \Delta$ で、semi-stable であって、 $K_{X'} = \mathbb{1}$ となるものが存在する。

とくに、添加公式より、 X'_0 の各成分は、effective な方角標準因子をもつ、小平次元は、0 以下である。(X'_0 については、もっと詳しく記述できるが、ここでは不要。Kulikov [3] を見よ)

仮定 (*) は、 φ が射影的よりも弱いことに注意

する。§3 では、この仮定 (**) を除くことを考える。

(iv) $K(X_t) = -\infty$ のとき、

φ : 射影的と仮定する。このとき、relative Hilbert scheme $\text{Hilb}_{\mathbb{A}^1/k}$ の各既約成分は、 Δ に固有である。この事実をつかうと、 X と適当に、modification すると、一般ファイバーの ruling が、 X_0 にまで extend されることになる。(ただし、 $X_t \cong \mathbb{P}^2$ のときは、 X と blow-up する必要がある。) こうして、各 V_i が、有理曲面または線織面であることが示され、予想が成立する。

§2. 予想の反例

この節では、 $K(X_t) = 0, -\infty$ のとき、予想が、必ずしも成立しないことを示す。実際、そのような例を、変形理論をつかって構成する。

これまでの設定から少しはなれる。 V_1 を relatively minimal な楕円曲面で、 mI_0 型の multiple fiber E_1 をもつものとする。 V_1 の標準束は、

$K_{V_1} = (m-1)E_1 + F$ (F は fibers からなる) とかける。

次の (i) を仮定する:

$$(i) \quad H^1(V_1, \Theta_{V_1}) = 0.$$

ここで、 Θ_{V_1} は V_1 の正則ベクトル場の芽のつくる層である。

一方、 V_2 を次のように定義される Hopf 曲面とする。 $V_2 = \mathbb{C}^2 - \{0\} / \langle g \rangle$, g は $\mathbb{C}^2 - \{0\}$ の自己同型

$$g: (z_1, z_2) \mapsto (\alpha_1 z_1 + z_2^m, \alpha_2 z_2)$$

とする。ここで、

$$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}, \quad 0 < |\alpha_1| < 1, \quad 0 < |\alpha_2| < 1, \quad \alpha_2^m = \alpha_1.$$

E_2 は $z_2 = 0$ で定義される V_2 上の楕円曲線とする。

E_2 は $\mathbb{C}^* / \langle \alpha_1 \rangle$ と同型であり、 V_2 の標準束は、

$$K_{V_2} = (-m-1)E_2 \text{ とかける。}$$

E_1 と E_2 は同型であると仮定する。(以下、 E_1 と E_2 を同一視して、 E とかく。) さらに、

$$N_{E/V_1} \otimes N_{E/V_2} \cong \mathcal{O}_E$$

を仮定する。 $X_0 = V_1 \cup V_2$ とおく。 X_0 は、正規交叉のサをもつコンパクト 2 次元解析空間である。

命題

X_0 は、smoothing をもつ。より正確に言えば、
曲面の退化で、その特異ファイバーが、 X_0 と
なるようなものが存在する。

証明の方針

Friedman [1] による、正規交叉をもつ多様体の
変形理論を、全面的につかう。まず、

$$T_{X_0}^i = \text{Ext}^i(\Omega_{X_0}^1, \mathcal{O}_{X_0}), \quad T_{X_0}^i = \underline{\text{Ext}}^i(\Omega_{X_0}^1, \mathcal{O}_{X_0})$$

とおく。 X_0 の特異性は正規交叉のみであるか
ら、 $T_{X_0}^1 = N_{E/X_0} \otimes N_{E/X_0} (\cong \mathcal{O}_E)$, $T_{X_0}^i = 0$ ($i \geq 2$) である。
スペクトル列

$$E_2^{p,q} = H^q(X_0, \text{Ext}^p(\Omega_{X_0}^1, \mathcal{O}_{X_0})) \Rightarrow \text{Ext}^{p+q}(\Omega_{X_0}^1, \mathcal{O}_{X_0})$$

から、次の完全列を得る：

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(T_{X_0}^0) \rightarrow T_{X_0}^1 \rightarrow H^0(T_{X_0}^1) \\ \rightarrow H^2(T_{X_0}^0) \rightarrow T_{X_0}^2 \rightarrow H^1(T_{X_0}^1) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

ここで次の2つの補題を示される。

補題 1 ([4])

$$H^2(T_{X_0}^0) = 0.$$

補題 2 ([4])

次の自然な pairing は、全射である:

$$H^1(T_{X_0}') \otimes H^0(T_{X_0}') \longrightarrow H^1(T_{X_0}').$$

上の完全列と補題 1, 2 から, Douady - Grauert - Palamodov による一般変形理論をつかうと、命題が示される。実際、補題 1, 2 は、それぞれ、次の (1), (2) に対応する:

- (1) smoothing に対応する deformation of the first order が存在する。
- (2) それの obstruction を調べると、実際に global deformation に lift できるようなものが、存在する。

より詳しくは、Friedman [1] を見よ。

さて、この命題が適用できる例を、いくつか挙げる。

例 1. V_1 は、 $\mathbb{P}^1$ 上の relatively minimal な楕円曲面で、 mI_0 型の multiple fiber E をもつ。

$$K_{V_1} = (m-1)E, \quad \rho(V_1) = 1, \quad q(V_1) = 0, \quad h(V_1) = 1$$

とみたすとする。このような V_1 は、楕円的 K3 曲面を対数変換することによって得られる。

(ii) $H^2(V_1 \oplus V_1) = 0$ は容易にわかる。 V_2 を Hopf 曲面で、 $K_{V_2} = -(m+1)E$ なるものとする。 V_1 とうまく選べば、 $N_{E/V_1} \otimes N_{E/V_2} = \mathcal{O}_E$ と仮定できる。

$X_0 = V_1 \sqcup V_2$ とおき、 $\pi: X \rightarrow \Delta$ と、上の命題から得られる退化とする。このとき、一般ファイバー X_t は、K3 曲面である。すなわち、K3 曲面の退化で、特異ファイバーの既約成分が、 $K=1$ の曲面と Hopf 曲面であるようなものが得られ E_0 。

X_t が K3 曲面になることを簡単にみよう。

i: $\tilde{X}_0 = V_1 \sqcup V_2 \rightarrow X_0$ と、 X_0 の正規化とすると、

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{X_0} \rightarrow i_* \mathcal{O}_{\tilde{X}_0} \rightarrow \mathcal{O}_E \rightarrow 0$$

なる完全列があるから、次の完全列を得る：

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(\mathcal{O}_{X_0}) &\rightarrow H^1(\mathcal{O}_{V_1}) \oplus H^1(\mathcal{O}_{V_2}) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_E) \\ &\rightarrow H^2(\mathcal{O}_{X_0}) \rightarrow H^2(\mathcal{O}_{V_1}) \oplus H^2(\mathcal{O}_{V_2}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

ここで、 $H^1(\mathcal{O}_{V_1}) = 0$ 、 $H^2(\mathcal{O}_{V_2}) = \mathbb{C}$ 、 $H^2(\mathcal{O}_{V_2}) = 0$ であり、 $H^1(\mathcal{O}_{V_2}) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_E)$ は、同型である。よって、 $H^1(\mathcal{O}_{X_0}) = 0$ 、 $H^2(\mathcal{O}_{X_0}) = \mathbb{C}$ である。

χ の不変性より、 $\chi(\mathcal{O}_{X_t}) = \chi(\mathcal{O}_{X_0}) = 2$ 。また、
 上半連続性より、 $q(X_t) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X_t, \mathcal{O}_{X_t}) = 0$ 。こ
 れから、 $p_g(X_t) = \dim_{\mathbb{C}} H^2(X_t, \mathcal{O}_{X_t}) = 1$ 。
 さらに、 $K_{X_t} = 1$ となることがわかり (証明は、
 [4] をみよ。), したがって、 X_t は K3 曲面で
 ある。

最後のステップは、もっと安直なみかたが
 ある: V_2 は、非代数曲面、非楕円曲面である
 から、§1 の結果から、 $k(X_t) \leq 0$ である。ま
 た $p_g(X_t) = 1$, $q(X_t) = 0$ であるから、結局、 X_t の
 (相対) 極小モデルは、K3 曲面であることがわか
 る。

例 2 V_1 を Enriques 曲面とする。 V_1 は、 $\mathbb{P}^1$ 上
 の楕円曲面で、 $2I_0$ 型の multiple fiber を 2 つ持つ。
 (E, E' とかく) $\dim H^2(V_1 \oplus V_1) = 0$ となること
 は、よく知られている。 V_2 を $K_{V_2} = -3E$ とする
 Hopf 曲面とする。 $X_0 = V_1 \times V_2$ とおいて、
 $\pi: X \rightarrow \Delta$ と、命題から得られた退化とする。
 このとき、一般ファイバー X_t は、有理曲面と

なる。これは例1と同様に示される。(詳しくは、
[]をみよ。) 　　こうして、有理曲面の退化で、
特異ファイバーの既約成分が、Enriques曲面と、
Hopf曲面になるものが得られた。

例3 V_1 は $\mathbb{P}_0$ 型の積円曲面で、ちやうど、
3つの multiple fiber E, E', E'' (それぞれ $mI_0, m'I_0,$
 $m''I_0$ 型) ともつものとする。

・ V_1 は $\mathbb{P}^1 \times C$ (C は積円曲線) から 円数変換を
施して得られる。

・ $H^2(V_1, \mathbb{Q}) = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} + \frac{1}{m'} + \frac{1}{m''} < 1 & \Rightarrow \kappa(V_1) = 1 \\ & = 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \\ & < 1 \quad \Rightarrow \quad -\infty \end{aligned}$$

これらの事実については、Kodaira [2] をみよ。

V_2 は $K_{V_2} = -(m+1)E$ となる Hopf 曲面とする。

$X_0 = V_1 \cup V_2$ とおいて、 $\varphi: X \rightarrow \Delta$ を命題から得
られる退化とする。このとき、一般ファイバ
ー X_t は、小平次元が $-\infty$ の $\mathbb{P}_0$ 型曲面である。
すなわち、 $\kappa = -\infty$ の $\mathbb{P}_0$ 型曲面の退化で、特異

ファイバーが

$(K = 1, 0 \text{ or } -1 \text{ の elliptic surface}) \cup (\text{Hopf surface})$
となるものが得られた。

§ 3. $K3$ 曲面の退化.

$\varphi: X \rightarrow \Delta$ を、semi-stable な退化で、一般ファイバーが、 $K3$ 曲面であるとする。§ 1 で述べた Kulikov と Persson - Pinkham の定理で、(*) の仮定をはずす。

定理 ([5])

上のような $\varphi: X \rightarrow \Delta$ は、次のいずれかと満足する。

- (i) φ の modification $\varphi': X' \rightarrow \Delta$ で、semi-stable であって、 $K_{X'} = 1$ となるものが存在する。
- (ii) 特異ファイバー X_0 の既約成分に、Hopf 曲面または、その blow-up がある。
- (iii) 特異ファイバー X_0 の既約成分に、次のような M_0 型曲面 S または、その blow-up がある:

S は、有限個の非特異有理曲線による
枝付きの輪を、ちょうど1つ持つ。



— 非特異有理曲線

証明に 13, I. Enoki: Surfaces of class VI_0 with curves, Tohoku
Math. J. 33, 457-492 (1981) をつかう。詳しくは[5]を参照。

注意

- (a) (i) の場合で、特異ファイバー内に、 VI 型曲面のあらわれるようなものは、多く知られている。実際、双曲型井上曲面のあらわれるものが、Loijenga, Nakamura, Wahl, Friedman-Miranda によって構成されている。前者人は、カスプ特異点の smoothing によってつくり、Friedman-Miranda は、正規交叉をもつコンパクト多様体の smoothing をつけた。
- (b) (i) と (ii) の両方を満足するような例が、Ueno により構成されている。
- (c) (ii) をみたすが、(i) をみたさない例(つまり、どのように modification しても $K_X = 1$ とならない

ii)として、§2の例1がそうである。もっと簡単に、対数変換をつかって構成できる。(下の例4)

ii) i)とiii)は、互いに disjoint である。iii)の例も存在する。実際、ii)に述べた2つの方法、すなわち

① 2次元正規特異点(今の場合、 $p_g=2$ のゴレンシュタイン特異点)の smoothing とその globalization による方法。

② 正規交叉をもつコンパクト2次元多様体の smoothing による方法(Friedman [1]の方法)をつかって iii)の例を構成できる。(例5)

例4 (どのような modification も $K=1$ とするには、 $K=3$ 曲面の semi-stable 退化)

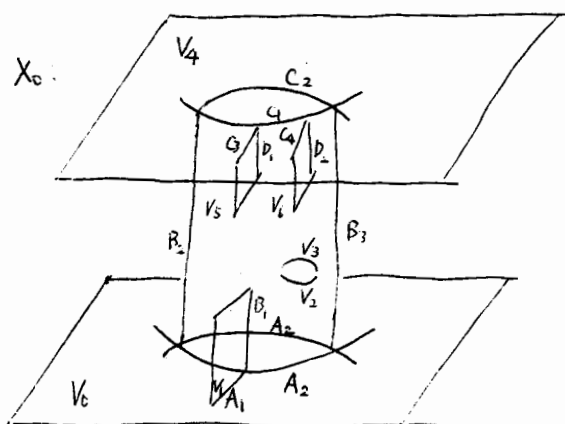
S を楕円的 $K=3$ 曲面で、section $C \cong \mathbb{P}^1$ をもつものとする。 $\pi: S \rightarrow C$ とかく (section C と base curve $\mathbb{P}^1$ を同一視していい)。 $Y = \Delta \times S$ とおく。ここで、 $\Delta = \{z_1 \in \mathbb{C} \mid |z_1| < \varepsilon\}$ 。 z_2 は $C \cong \mathbb{P}^1$ の非斉次座標とする。 $E = \pi^{-1}(0)$ は、 π の非特異ファイバー

となるものが得られた。この $\varphi: X \rightarrow \Delta$ の任意の modification $\varphi': X' \rightarrow \Delta$ が $K_{X'} \neq 1$ であることは、明らか。

例 5 (定理の例) の例) (詳しくは [5] を参照)

注意 4) の ② の方法をつかって、 $K3$ 曲面の、semi-stable な退化 $\varphi: X \rightarrow \Delta$ で、次のような特異ファイバーをもつものが構成される。

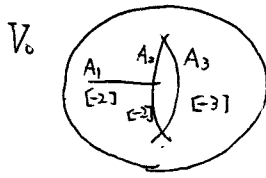
$X_0 = V_0 + \dots + V_6$ は、次のような配置をもつ。



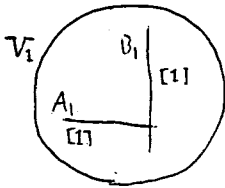
A_i, B_i, C_i, D_i は double curve であり、非特異有理曲線。 V_i は次のように記述される。

V_0 は、 Π_0 型曲面で、ちょうど 3 本の曲線をもつ、 $K_{V_0} = -2A_1 - 4A_2 - 3A_3$ となるもの。

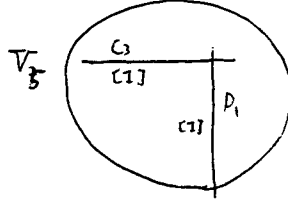
(次の図で $C \cdot D$ は 自己交点数を表す)



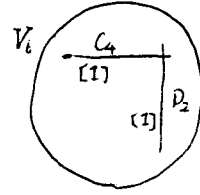
V_1, V_5, V_6 は、 $\mathbb{P}^2$ であり、 $A_1, B_1; C_3, D_1; C_4, D_2$ は、それぞれ上の lines である。



$$K_{V_1} = -3B_1$$

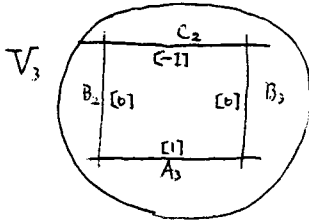


$$K_{V_5} = -2C_3 - D_1$$



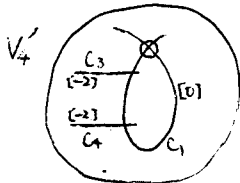
$$K_{V_6} = -2C_4 - D_2$$

V_3 は Hirzebruch 曲面 Σ_1 である



$$K_{V_3} = A_3 - 2B_2 - 2B_3 - 3C_2$$

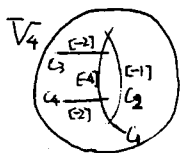
V_4 は、次のようにして得られる楕円的 K3 曲面の 1 点 blow-up.



V_4' は minimal な楕円的 K3 曲面で、2 つの sections C_3, C_4 と、 I_1 型の特異ファイバー C_1 をもつ。

上の図において、 V_4' に、 $\circ$ で blow-up すると、

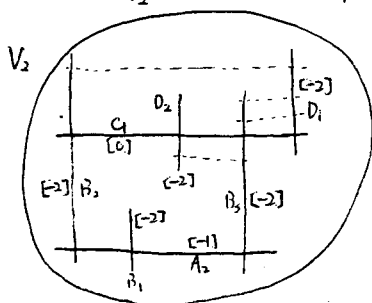
V_4 を得る :



$$K_{V_4} = C_2.$$

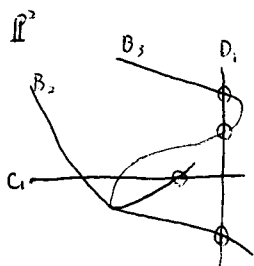
V_2 は有理曲面で、次のような曲線の配置をも

ち、 $K_{V_2} = 2A_2 + B_1 - 2C_1 - D_1 - D_2$ となるもの。



(--- は第一種例外曲線)

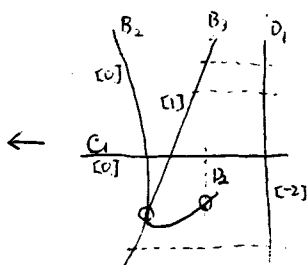
このような有理曲面は、 $\mathbb{P}^2$ から 7 点 blow-up し
て得られる。実際、次のように、 $\circ$ で blow-up する:



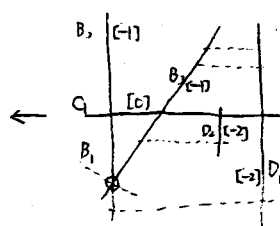
$$K = -2C_1 - D_1$$

B_3 は conic

D_1, C_1, B_2 は lines



$$K = -2C_1 - D_1 - D_2$$



$$K = -2C_1 - D_1 - D_2 + B_1$$

$\leftarrow V_2$

References

- [1] Friedman, R. D., Global smoothings of varieties with normal crossings, (to appear).
- [2] Kodaira, K., On the structure of compact analytic surfaces, II, Amer. J. Math., 88, 682-721 (1966).
- [3] Kulikov, V. S., Degenerations of K3 surfaces and Enriques surfaces, Math. USSR Izvestija, 11, 957-989 (1977).
- [4] Nishiguchi, K., Kodaira dimension is not necessarily lower semi-continuous under degenerations of surfaces, (to appear)
- [5] Nishiguchi, K., Degenerations of K3 surfaces [provisional title] (in preparation).
- [6] Persson, U., Degenerations of Algebraic Surfaces, Memoirs of the A. M. S., 189, (1977).
- [7] Persson, U. and Pinkham, H., Degeneration of surfaces with trivial canonical bundle, Ann. of Math., 113, 45-66, (1981).
- [8] Ueno, K., Appendix to T. Ashikaga's paper, Tohoku Math. J., 33, 210-214, (1981).