

誤り訂正セル空間と d 次元符号化について

京大 理学部 小渕 洋一

西尾 英之助

我々は先に、与えられたセル空間をシミュレートし、かつある種の条件を満たす誤りを訂正できるようなセル空間の設計法を示した⁽¹⁾。本報告では(1)の手法を誤り訂正 d 次元符号の問題として一般化して扱い、得られた結果を使って誤り訂正セル空間の新しい具体例が構成できることを示した。

II. はじめに

d 次元整数格子点の集合 $\mathbb{Z}^d$ の各点に有限集合 S の元を対応させたものを configuration (conf. と略す) と呼ぶ。conf. C は $\mathbb{Z}^d$ から S への写像である。 $\mathbb{Z}^d$ の二点 $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_d)$ 間の距離 $|x - y|$ は $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_d - y_d)^2}$ で定義する。 $\mathbb{Z}^d$ の部分集合 A が連結しているとは $\forall x, y \in A$ に対し A の点列 $z_1, z_2, \dots, z_r$ があって $|z_i - z_{i+1}| = 1$ ($i = 1, \dots, r-1$), $z_1 = x$, $z_r = y$ となることである。

さて $\mathbb{Z}^d$ 上の同値関係 R を考え、 R による $\mathbb{Z}^d$ の類別において各類が連結しているとする。以下このような同値関係のことを分割と呼び、分割 R によって得られる類別を R 分割と呼ぶ。conf. c が分割 R と compatible であるとは $\forall x, y \in \mathbb{Z}^d$ に対し、 $x R y \Rightarrow c(x) = c(y)$ となることである。この時 c は R に関して符号語になっているともいう。 R に関する符号語 c に対し、いくつかの点における値が c のそれと異なっている conf. c' は c のそれらの点に error が生起して得られると考える。任意に conf. c' が与えられた時、分割 R に関する c' の error point の集合 $E_R(c')$ とは、 R に関する符号語 c について $\{x \mid c'(x) \neq c(x)\}$ の濃度が最小になる集合の一つである。 $E_R(c') = \{x \mid c'(x) \neq c(x)\}$ である時、 $x \in E_R(c')$ は $c(x)$ -type の error point であると言う。

一般に誤り訂正の問題を考える際には、誤りの生起する仕方にある種の条件を付けなければならない。例えば、ある固定された大きさの連結領域を $\mathbb{Z}^d$ 内に任意にとった時、その中に error point は高々 k 個しかないとか、距離が 1 である任意の二点は同時に error とならない等である。このような条件を一般に誤り分離条件 K と呼び、以下 K は少なくとも先の例の後者の条件を含んでいると仮定する。なお K は一般に R による分割の形とは独立に与えるものとする。

$\mathbb{Z}^d$ 上の分割系 $\{R_1, R_2, \dots, R_\ell\}$ が与えられ, その内のどれかを使って符号化が行なわれているが, その分割がどれであるかは知らないとする. 分離条件 K を満たす error が生起している任意の conf. が与えられた時, 与えられた有限集合 $D \subset \mathbb{Z}^d$ の部分のみ観察することによって, D 内の与えられた一点に error が生起しているか否か, error がある時は正しく訂正することができるかどうかという問題を考える. D は原点 0 を含むとし, 0 点の error を問題にする. conf. c は $\mathbb{Z}^d$ と D に制限したものを考えておけば十分であり, 以下 $c|_D$ のことを簡単のため c と書く.

定義 1 (D の 0 点の)訂正可能性

少なくとも2つの分割で条件 K を満たしている任意の conf. c を考える. この c に対して K を満たすすべての分割について, 0 点がすべて同じ type の error point であるか, すべて error point でないかである時, D の 0 点は $\{R_1, \dots, R_\ell\}$ に関して条件 K の下で訂正可能であるという.

2. 分割等に関する諸定義と基本的性質

定義 2 $R(A)$

D 上の分割 R に対し, $A \subset D$ とすると, $R(A)$ は D 上の分割で次の条件を満たすものである.

$$x R(A) y \Leftrightarrow \begin{array}{ll} x R y & \text{if } x, y \notin A \\ x = y & \text{if } x \text{ or } y \in A. \end{array}$$

定義3 A_R

D 上の分割 R に対し, $A \subset D$ とするとき, A_R は D の被覆で次の条件を満たすものである.

$$x A_R y \Leftrightarrow \begin{array}{ll} x R y, |x - y| = 1 & \text{if } (x \in A, y \notin A) \text{ or } (y \in A, x \notin A) \\ x = y & \text{if } (x \in A, y \in A) \text{ or } (x \notin A, y \notin A). \end{array}$$

明らかに, 被覆 A_R の 1 つの類には D の元は高々 2 つしかない.

定義4 分割と被覆の積

D 上の分割 R と被覆 C の積 $R \cdot C$ とは次の条件を満たす被覆である.

$$x R \cdot C y \Leftrightarrow x R y \text{ かつ } x C y.$$

定義5 Error set の compatibility

R_i, R_j を D の分割, A, B を D の subsets とする. A が R_i の, B が R_j の error set として compatible である (記法 $(R_i - A, R_j - B)$ compatible) とは

$$(R_i(A) \cup R_j(B)) \cdot A_{R_i} = 0$$

$$(R_i(A) \cup R_j(B)) \cdot B_{R_j} = 0$$

0: 単位分割

となることである.

この時, 次の補題が成立する.

補題 1

R_i 分割で A が, R_j 分割で B が各 $1/2$ error
 (R_i-A, R_j-B) compatible $\Leftrightarrow$ points の集合 (即ち, $A = E_{R_i}(c)$, $B = E_{R_j}(c)$)
 となるような conf. c が存在する.

証明

$\Rightarrow$ ある分割が与えられた時, その分割に compatible で,
 かつ異なる類の点には異なる S の元が割当られているよう
 な conf. を標準的 conf. と呼ぶ. $R_i(A) \cup R_j(B)$ に関して
 標準的な conf. c が求まるものであることを示す.

まず, R_i 分割において A の点のみが error points になっ
 ていることを言う. $\forall x, y \in D - A$ については, $x R_i y \rightarrow$
 $x R_i(A) y \rightarrow x(R_i(A) \cup R_j(B)) y$ より R_i の同じ類に属して
 いる点には同じ元が割当られている.

$x \in A$, $y \in D - A$ で $x R_i y$ とする. R_i の分割が連結領域
 をつくること, 及び分離条件 K より $|y - x| = 1$ としてよ
 い. この時 $x A_{R_i} y$ である. 仮定より $(R_i(A) \cup R_j(B)) \cdot A_{R_i}$
 $= 0$ であるから, $x(R_i(A) \cup R_j(B)) y$ とはならない. 故に x
 と y は異なる元が割当られている. R_j 分割と B についても
 同様.

$\Leftarrow (R_i-A, R_j-B)$ compatible でないとする. この時, $(R_i(A)$
 $\cup R_j(B)) \cdot A_{R_i} \neq 0$ としてよい. 従って被覆 $(R_i(A) \cup R_j(B)) \cdot A_{R_i}$

の類の中に2つの元を含むものがある。その類の2つの元を x, y ($x \neq y$) とすると $x(R_i(A) \cup R_j(B))y$, $x A_{R_i} y$ となる。 $c(x) = c(y)$ とすると, $x A_{R_i} y$ より例えば $x \in A$, $y \notin A$, $x R_i y$ となり x が error point であることに矛盾する。 $c(x) \neq c(y)$ とすると $x(R_i(A) \cup R_j(B))y$ と矛盾。

定義 6. (R, R') ring

D 上の2つの分割を R, R' とする。 D 上の (R, R') ring とは, D の相異なる点列 $x_1, x_2, \dots, x_{2m}$ であって

$$x_{2i-1} R x_{2i}, x_{2i} R' x_{2i+1} \quad (i=1, \dots, m; \text{但し } x_1 = x_{2m+1} = 0)$$

となるものである。

3. 主定理

定理 1

D の0点が $\{R_1, \dots, R_k\}$ に関して条件 K の下で訂正可能となるための必要十分条件は, $\forall R_i, R_j \in \{R_1, \dots, R_k\}$ に対し, 条件 K を満たす D の subsets A, B ($0 \in A$ または $0 \in B$) で $(R_i - A, R_j - B)$ compatible となっているものについて, $(R_i(A') R_j(B'))$ ring が存在することである。但し $A' = A - \{0\}$, $B' = B - \{0\}$ とする。

証明

十分: 2つ以上の分割で条件 K を満たす error を起し

ている conf. C を考える. C についてその error points が条件 K を満たす任意の 2 つの分割 R_i, R_j をとる. この時,

[1] 0 点が R_i と R_j で異なる type の error point

[2] 0 点が R_i で error point でなく, R_j で error point

とはならないことを示せばよい.

[1] が起っていると仮定する. 分割 R_i, R_j における C の error points の集合を各々 A, B とする. 補題 1 より $(R_i - A, R_j - B)$ compatible であり, 仮定から $(R_i(A'), R_j(B'))$ ring が存在する. それを $x_1, x_2, \dots, x_{2m}$ ($x_1 = 0$) とすると, $0 R_i(A) x_2$ で x_2 は R_i で error point でないから R_i 分割で 0 点は $C(x_2)$ type の error となる. 同様に, $x_{2m} R_j(B') 0$ で, x_{2m} は R_j 分割で error point でないから R_j 分割で 0 点は $C(x_{2m})$ type の error となる. 一方 ring の存在より $C(x_2) = C(x_{2m})$ となり, 0 点が異なる type の error point であることに反する.

[2] が起っているとすると [1] の場合と同様に ring $x_1, x_2, \dots, x_{2m}$ ($x_1 = 0$) が存在し, $0 R_i(A) x_2, x_2 R_j(B') x_3, \dots, x_{2m-1} R_i(A) x_{2m}$ より $C(0) = C(x_2) = \dots = C(x_{2m})$ となる.

一方 $x_{2m} R_j 0$ であり, x_{2m} は R_j で error point でないから, 0 点も R_j で error point でなくなる.

必要: $\exists R_i, \exists R_j$ に対し, 条件 K を満たす D の subsets A, B で $(0 \in A \text{ または } 0 \in B) (R_i - A, R_j - B)$ compatible になっ

ているものが存在し, $(R_i(A') R_j(B'))$ ring が存在しないとする。 $R_i(A) \cup R_j(B)$ に関して標準的な conf. c を考える。

$0 \in A, 0 \in B$ とすると 0 点は異なる type の error となって訂正可能ではないことを示す。 0 点が R_i, R_j において同じ type の error になっているとすると $\exists x, \exists y$ に対して,
 $0 R_i(A') x, y R_j(B') 0, c(x) = c(y)$ となる。従って
 $x(R_i(A) \cup R_j(B)) y$ となっている。故に $x R_j(B) x_3,$
 $x_3 R_i(A) x_4, \dots, x_{2\ell-1} R_i(A) y$ となる $x_i (i=3, \dots, 2\ell-1)$ がある。 $0 \in A, 0 \in B$ であるから $x_i (i=3, \dots, 2\ell-1)$ の中に 0 はなく, 従って $0 R_i(A') x, x R_j(B') x_3, x_3 R_i(A') x_4, \dots,$
 $x_{2\ell-1} R_i(A') y, y R_j(B') 0$ となり $(R_i(A') R_j(B'))$ ring が存在することになって矛盾。

$0 \in A, 0 \notin B$ または $0 \notin A, 0 \in B$ となっていれば明らかに訂正可能でない。

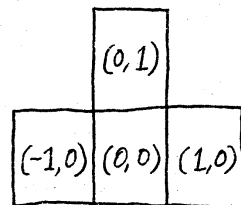
従っていずれの場合にも上記の仮定の下では訂正可能ではない。故に $(R_i(A') R_j(B'))$ ring が存在しなければならない。

4 具体例

ここでは, ある与えられた分割系に関して, ある D の 0 点が, 与えられた K 条件の下で訂正可能となることを定理1を

便って示す.

$\{(0,0), (0,1), (-1,0), (1,0)\}$ の4つのセルから成る凸型を同じ向きに規則的に並べて二次元平面をしきつめることができる. $\mathbb{Z}^2$ の0点に凸型の $(i,j) \in \{(0,0), (0,1), (-1,0), (1,0)\}$ がきている分割を (i,j) 分割と呼び, (i,j) 分割を与える同値関係を $R_{(i,j)}$ と書く.



定理2.

$D \subset \mathbb{Z}^2$ を7行11列の長方形とし, その中心が0点であるとする. K 条件として, 任意の2行3列の長方形の中に誤りは高々1つしかなく, D の中に誤りが高々2つしかないとすれば, D の0点は $\{R_{(0,0)}, R_{(0,1)}, R_{(-1,0)}, R_{(1,0)}\}$ に関し条件 K の下で訂正可能である.

証明

定理1.において一般性を失うことなく $0 \in B$ として考えてよい. また ring は $A' = A - \{0\}$ について考えるのだから $0 \notin A$ と考えてよい.

I. $(0,0)$ 分割と $(0,1)$ 分割

$$(1) \quad x_{00} - x_{10} - x_{20} - x_{1-1}$$

$$(2) \quad x_{00} - x_{10} - x_{20} - x_{1-1}$$

この2つの ring の存在より, A として考える必要があるのは i) $\{(2,0), (-2,0)\}$ ii) $\{(2,0), (-1,0)\}$ iii) $\{(2,0), (-1,-1)\}$

iv) $\{(-2,0), (1,0)\}$ v) $\{(-2,0), (1,-1)\}$ のみである.

$$(3) \quad x_{00} - x_{40} - x_{21} - x_{31} - x_{41} - x_{40} - x_{3-1} - x_{2-1} - x_{1-2} - x_{01}$$

$$(4) \quad x_{00} - x_{10} - x_{21} - x_{31} - x_{41} - x_{40} - x_{3-1} - x_{2-1} - x_{1-2} - x_{01}$$

$$(5) \quad x_{00} - x_{01} - x_{02} - x_{12} - x_{22} - x_{21} - x_{20} - x_{1-1}$$

$$(6) \quad x_{00} - x_{01} - x_{02} - x_{12} - x_{22} - x_{21} - x_{20} - x_{1-1}$$

この(3)~(6)のring 4本の中で上の5つの場合いずれも2本のringが残り, しかも B' の一点によってこれらの2本のringを切ることはできない. (各場合の残るringは次の通り: i) (3), (4), ii) (3), (6), iii) (3), (4), iv) (4), (5), v) (3), (4))

II (0,0)分割と(1,0)分割 ((0,0)分割と(-1,0)分割: y 軸対称)

$$(1) \quad x_{00} - x_{10}$$

このringの存在より, $(-1,0)$ が A に含まれないと $(R_{(0,0)}(A), R_{(1,0)}(B'))$ ringが存在することになる. 従って以下 $(-1,0) \in A$ として考える.

$$(2) \quad x_{00} - x_{01} - x_{12} - x_{12} - x_{22} - x_{11}$$

$$(3) \quad x_{00} - x_{10} - x_{0-1} - x_{0-2} - x_{1-1} - x_{20}$$

$$(4) \quad x_{00} - x_{01} - x_{11} - x_{31} - x_{20} - x_{1-1} - x_{0-1} - x_{1-2} - x_{1-1} - x_{20}$$

$$(5) \quad x_{00} - x_{10} - x_{2-1} - x_{20} - x_{31} - x_{21} - x_{12} - x_{02} - x_{22} - x_{11}$$

(2)~(5)の4本のringについてこれらをすべて切断する可能性を検討する. まず, 一点を切断することによって, 高高2本のringしか切断できないことが直ちにわかる. 一方,

K条件より, 2本のringを切断する点の中で B' としてとり得るのは $(3, 1)$, $(1, 2)$, または $(-2, 2)$ の3点のみである.

$(3, 1) \in B'$ とすると $(2), (3)$ のringが残りこれらを一点で切断できない. $(1, 2) \in B'$ (または $(-2, 2) \in B'$)とすると $(3), (4)$ のringが残りこれらを一点で切るには $(0, -1)$, $(-1, -1)$ または $(-2, 0)$ を A に入れなければならない. ところが $(-1, 0) \in A$ であるから, K条件よりこれらの点はいずれも A に入り得ない.

Ⅲ $(0, 1)$ 分割と $(1, 0)$ 分割 $((0, 1)$ 分割と $(-1, 0)$ 分割: y 軸対称)

$$(1) \quad x_{00} - x_{1-1} - x_{10} - x_{21} - x_{11} - x_{02} - x_{12} - x_{32} - x_{21} - x_{10}$$

$$(2) \quad x_{00} - x_{1-1} - x_{1-2} - x_{21} - x_{30} - x_{20}$$

$$(3) \quad x_{00} - x_{0-1} - x_{10} - x_{20} - x_{31} - x_{42} - x_{32} - x_{12} - x_{01} - x_{11}$$

$$(4) \quad x_{00} - x_{1-1} - x_{2-2} - x_{2-1} - x_{30} - x_{20}$$

$$(5) \quad x_{00} - x_{1-1} - x_{2-1} - x_{3-2} - x_{3-1} - x_{40} - x_{31} - x_{42} - x_{22} - x_{12} - x_{11} - x_{02} - \\ x_{22} - x_{32} - x_{41} - x_{31} - x_{21} - x_{10}$$

$$(6) \quad x_{00} - x_{0-1} - x_{2-1} - x_{2-2} - x_{3-1} - x_{40} - x_{30} - x_{21} - x_{01} - x_{11}$$

$$(7) \quad x_{00} - x_{1-1} - x_{1-2} - x_{2-1} - x_{3-1} - x_{40} - x_{51} - x_{41} - x_{21} - x_{10}$$

$$(8) \quad x_{00} - x_{1-1} - x_{2-2} - x_{3-2} - x_{3-3} - x_{4-2} - x_{51} - x_{40} - x_{51} - x_{42} - x_{53} - x_{43} - \\ x_{23} - x_{12} - x_{02} - x_{11}$$

$$(9) \quad x_{00} - x_{1-1} - x_{10} - x_{21} - x_{12} - x_{23} - x_{13} - x_{13} - x_{22} - x_{32} - x_{21} - x_{10}$$

$$(10) \quad x_{00} - x_{0-1} - x_{2-1} - x_{1-2} - x_{0-3} - x_{0-2} - x_{2-2} - x_{3-2} - x_{4-3} - x_{4-2} - x_{5-1} - x_{4-1} -$$

$$x_{30} - x_{20}$$

上記10本の ring を考える。一点を切ることによって高々4本の ring しか切れないので、少なくとも一点は4本の ring を切るものでなければならぬ。4本の ring を切るのは $(-2, 1)$, $(-1, 0)$, $(-1, -1)$ の3点のみであるが、K条件よりこれらはいずれも B' に入り得ないので A に属さねばならない。

1) $(-1, 0) \in A$ の場合

この時 $(0, 1)$ 分割と $(1, 0)$ 分割の積において $(-2, 0)$ と $(-1, 0)$ は同じ類にあるため $(-2, 0)$ も A または B に入らねばならないがこれはK条件より許されない。

2) $(-1, -1) \in A$ の場合

この時残るのは $(1), (3), (5), (6), (9), (10)$ の6本で、それらは一点を切ることによって高々3本しか切断できないから、残りの2点は少なくとも3本の ring を切断する点から選ばねばならない。(即ち, $(2, 1)$, $(2, -1)$, $(1, 2)$, $(1, 0)$, $(1, -1)$, $(0, -1)$, $(-1, 0)$, $(-2, 1)$, $(-3, 2)$ のうちから。)

- まず, $(1, -1)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, -1)$ はK条件より A にも B にも入り得ない。
- $(1, 2)$ がとられると残るのは (1) , (6) , (10) の3本, $(2, 1)$ がとられると (3) , (5) , (10) の3本が残るが、いずれの場合も

あと一点によって3本のringをすべて切断することはできない。

- $(-2, 1)$ または $(-3, 2)$ のいずれか一点がとられると残るのは $(3), (6), (10)$ の3本。これらを同時に切るのは $(0, -1)$ のみであるが、K条件より $(0, -1)$ は A にも B にも入り得ない。
- $(2, -1)$ がとられると残りは $(1), (3), (9)$ 。これら3本をすべて切るのは $(1, 0)$ のみであるが、これもK条件から許されない。

3) $(-2, 1) \in A$ の場合

この時残るのは $(2), (3), (4), (6), (8), (10)$ の6本でこれらは一点によって高々3本しか切断できない。3本を切る点は $(-1, 1), (-1, -1), (-3, 0), (-2, 0), (0, -1), (-2, -2)$ であるが、K条件より $(-1, 1), (-2, 0)$ は選び得ない。

- $(-1, -1) \in A$ とすると残りの3本 $(3), (6), (10)$ を切るのは $(0, -1)$ のみであるがK条件より $(0, -1) \in B$ とはなれない。
- $(-3, 0) \in B$ とすると残りの3本 $(3), (6), (8)$ を切るのは $(-1, 1)$ のみであるがK条件より $(-1, 1) \in A$ とはなれない。
- $(0, -1) \in A$ とすると残りの3本 $(2), (4), (8)$ を切るのは $(-1, -1)$ のみであるが、 $(-1, -1) \in B$ とはなれない。
- $(-2, -2)$ を選ぶと残りの3本 $(2), (3), (6)$ は一点で切れない。

IV $(1,0)$ 分割と $(-1,0)$ 分割

$$(1) \quad x_{00} - x_{10} - x_{0-1} - x_{-10}$$

$$(2) \quad x_{00} - x_{11} - x_{01} - x_{-11}$$

この2本の ring と K 条件より, これらの ring を切るためには A の点として $(0, -1)$ をとり, 他の一点として $(1, 1)$, $(0, 1)$, $(-1, 1)$ のいずれかをとらねばならない。(これらの点は B の点ではあり得ない.)

$$(3) \quad x_{00} - x_{20} - x_{30} - x_{2-1} - x_{1-1} - x_{0-2} - x_{-1-1} - x_{-10}$$

$$(4) \quad x_{00} - x_{20} - x_{31} - x_{21} - x_{12} - x_{02} - x_{12} - x_{21} - x_{31} - x_{20}$$

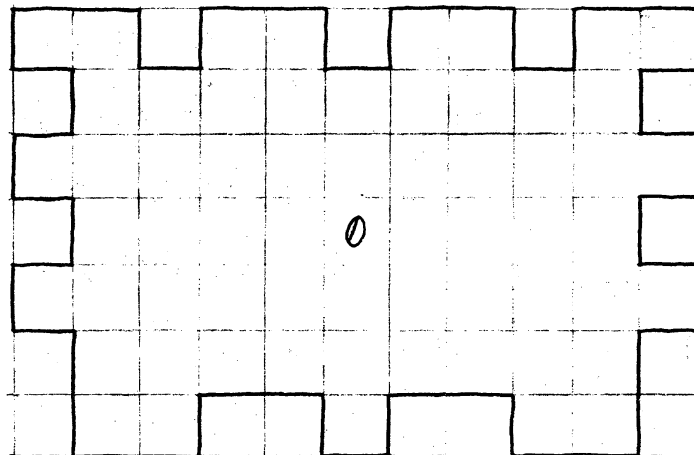
さらに (3), (4) 2本の ring を B' の一点で切るためには $(2, 0)$ で切るほかないが, K 条件より $(2, 0)$ は B' となり得ない。

(証明終)

系 2.1

定理 2 の D は下図のような 62 個のセルとして十分であ

3.



補題 2.

定理 2 において, D をいくら大きくとっても K 条件をゆるやかにすることはできない。(2行3列の長方形の中に誤りが高々1つしかないという部分)

証明

$c(x_{00}) = c(x_{10}) = c(x_{0-1}) = c(x_{1-1}) = 1$, その他のすべてのセルに 0 が割り当てられている conf. c を考えると $(0,1)$ 分割で $(-1,-1)$ と $(1,0)$ が誤り, $(1,0)$ 分割で 0 点と $(2,-1)$ が誤りとなる。

文献

- (1) 西尾, 小渕 「Cellular Automaton における誤り検出および誤り訂正の問題」 信学会オートマトンと言語研資料 AL73-48 (1973-10)