

Stokes 方程式の有限要素解に対する a priori 誤差評価

A Priori Error Estimate for Finite Element Solutions of the Stokes Equations

中尾 充宏[†] 山本 野人[†] 渡部 善隆[‡]
Mitsuhiro T. Nakao Nobito Yamamoto Yoshitaka Watanabe

[†]九州大学大学院数理学研究科 [‡]九州大学大型計算機センター

1 introduction

我々は [11] において, Stokes 方程式の弱解の存在を保証する条件である inf-sup condition に関わる定数を数値評価することによって, 厳密な意味での a posteriori 誤差の数値的保証を与えた. 本稿では, この a posteriori 誤差評価と同様な手法を用いることにより, Stokes 方程式の有限要素解に対する構成的 a priori 誤差評価が得られることを示し, あわせて数値例を与える.

次の同次境界条件を持つ Stokes 問題を考える:

$$\begin{cases} -\nu \Delta u + \nabla p = f & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

領域 Ω は $\mathbb{R}^2$ の凸多角形, $u = (u_1, u_2)^T$, $f = (f_1, f_2)^T$ は 2 次元ベクトル値関数, $\nu > 0$ である. なお, 以下 “ T ” は転置記号とする. $H^k(\Omega)$ を通常の k 次 Sobolev 空間とし, 関数空間を以下で定義する.

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &\equiv \{v \in H^1(\Omega) ; v = 0 \text{ on } \partial\Omega\}, \\ L_0^2(\Omega) &\equiv \{v \in L^2(\Omega) ; \int_{\Omega} v \, dx \, dy = 0\}, \\ \mathcal{S} &\equiv H_0^1(\Omega)^2 \times L_0^2(\Omega). \end{aligned}$$

さらに $(\cdot, \cdot)$ を Ω 上の L^2 -内積とし, norm を以下で定める.

$$\begin{aligned} |\cdot|_0 &: L^2(\Omega)\text{-norm}, |v|_0^2 = \int_{\Omega} v^2 \, dx \, dy. \\ |\cdot|_1 &: H_0^1(\Omega)\text{-seminorm}, |v|_1 = |\nabla v|_0. \end{aligned}$$

このとき, $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ 上の bilinear form $\mathcal{L}$ を

$$\mathcal{L}([u, p], [v, q]) \equiv \nu(\nabla u, \nabla v) - (p, \operatorname{div} v) - (q, \operatorname{div} u) \quad [u, p], [v, q] \in \mathcal{S}. \quad (1.2)$$

で定義するとき, Stokes 方程式 (1.1) は次の同値な問題に置き換えられる:

$$\begin{aligned} \text{find } [u, p] \in \mathcal{S} \text{ such that} \\ \mathcal{L}([u, p], [v, q]) = (f, v) \quad \forall [v, q] \in \mathcal{S}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

よく知られているように, (1.3) は $\mathcal{S}$ 内に一意解を持つ.

また, [11] の議論から, 任意の $[u, p] \in \mathcal{S}$ に対し

$$\delta(u, p) \equiv \sup_{\substack{[v, q] \in \mathcal{S} \\ [v, q] \neq 0}} \frac{\mathcal{L}([u, p], [v, q])}{|v|_1 + |q|_0}$$

とおくとき, 次の評価が成り立つ:

$$\begin{cases} |u|_1 \leq \left(\frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{\beta^2} \right)^{\frac{1}{2}} \delta(u, p), \\ |p|_0 \leq \left(\frac{1}{\beta} + \frac{\nu}{\beta^2} \right) \delta(u, p). \end{cases} \quad (1.4)$$

ここで, $\beta > 0$ は領域 Ω にのみ依存する定数であり, 数値的に算定可能であるとする. 実際, Ω が正
方領域の場合は $1/\beta < 2.614$, また, 正 n 角形のときは $\frac{1}{\beta} = \sqrt{\frac{2}{1 - \sin(\pi/n)}}$ となる (cf. [3]).

2 有限要素解と a priori 誤差評価

この節では, (1.3) の有限要素近似解に対し, (1.4) の評価を用いた真の解と離散解との定量的 a priori 誤差評価を導く. まず, 有限要素近似空間を設定する.

T_h を領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ の三角形または四角形分割, h を T_h の scale parameter とする. $h > 0$ は領域の分割幅を通常表す. 次に, $X_h \subset H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ を速度場 u の各成分を近似する有限要素部分空間, $Y_h \subset L_0^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ を圧力場 p を近似する有限要素部分空間とする.

続いて, 無限次元空間から有限次元空間への projection を定義する. P_0 は $L^2(\Omega)$ から X_h への L^2 -projection, P_1 を $H_0^1(\Omega)$ から X_h への $H_0^1(\Omega)$ -projection とする.

(1.3) の離散解は次で与える:

$$\begin{aligned} & \text{find } [u_h, p_h] \in X_h^2 \times Y_h \text{ such that} \\ & \mathcal{L}([u_h, p_h], [v_h, q_h]) = (f, v_h) \quad \forall [v_h, q_h] \in X_h^2 \times Y_h. \end{aligned} \quad (2.1)$$

また, X_h の近似性として次を仮定する:

$$\inf_{\xi \in X_h} |v - \xi|_1 \leq C_0 h |v|_2 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega). \quad (2.2)$$

ただし, C_0 は数値的に算定可能な正定数, $|\cdot|$ は Ω 上の H^2 -seminorm とする. 仮定 (2.2) は, 一般の有限要素空間で成立することが知られている. また, C_0 が数値的に決められるような X_h の例は多い. 例えば, 1 次元の区分 1 次要素の空間では $C_0 = 1/\pi$ となる ([6]). また, 1 次元の区分 2 次要素のテンソル積として定義される 2 次元矩形要素では, 一様メッシュの場合 $C_0 = 1/(2\pi)$, また, 三角形一様分割の区分 1 次要素では $C_0 \leq 0.81$ となることがいえる.

(2.2) から, projection の性質と Aubin-Nitsche's trick を用いると, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, $v_h = P_1 v$ とおくと, 以下の不等式が成立する:

$$|v - v_h|_0 \leq C_0 h |v|_1. \quad (2.3)$$

ここで, (1.3) の解 $[u, p]$ と (2.1) の有限要素解 $[u_h, p_h]$ の誤差を

$$\begin{cases} e_h \equiv u - u_h \\ \varepsilon_h \equiv p - p_h \end{cases}$$

とおくと,

$$\mathcal{L}([e_h, \varepsilon_h], [v, q]) = \nu (\nabla(u - u_h), \nabla(v - \xi_h)) - (p - p_h, \operatorname{div}(v - \xi_h)) + (q, \operatorname{div} u_h)$$

が各 $[v, q] \in \mathcal{S}$, $\xi_h \in X_h^2$ について成立する. ここで, ξ_h を $v = (v_1, v_2)^T$ の各成分の H_0^1 -projection として

$$v_h = (P_1 v_1, P_1 v_2)^T$$

とおけば, H_0^1 -projection の性質より

$$\mathcal{L}([e_h, \varepsilon_h], [v, q]) = \nu(\nabla u, \nabla(v - v_h)) - (p - p_h, \operatorname{div}(v - v_h)) + (q, \operatorname{div} u_h)$$

が成り立つ. 従って, Green の公式, Schwarz の不等式, (2.3) より,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}([e_h, \varepsilon_h], [v, q]) &= (f - \nabla p_h, v - v_h) - (q, \operatorname{div} u_h) \\ &\leq |f - \nabla p_h|_0 C_0 h |v|_1 + |q|_0 |\operatorname{div} u_h|_0 \\ &\leq (C_0 h |f - \nabla p_h|_0 + |\operatorname{div} u_h|_0)(|v|_1 + |q|_0) \end{aligned}$$

を得る. 以上より, 次の lemma が成立する.

Lemma 2.1 $0 \neq \forall [v, q] \in \mathcal{S}$,

$$\frac{\mathcal{L}([e_h, \varepsilon_h], [v, q])}{|v|_1 + |q|_0} \leq C_0 h |f - \nabla p_h|_0 + |\operatorname{div} u_h|_0.$$

次に, $f \in L^2(\Omega)^2$ に対し, $P_0 f \in X_h^2$ を成分毎の L^2 -projection として

$$P_0 f = (P_0 f_1, P_0 f_2)^T$$

で定義する. このとき, L^2 -projection の性質から

$$|f - P_0 f|_0^2 = |f|_0^2 - |P_0 f|_0^2, \quad (2.4)$$

が成り立つことから, ある $0 \leq \theta \leq \pi/2$ を用いることで, $|P_0 f|_0$ と $|f - P_0 f|_0$ は

$$\begin{cases} |P_0 f|_0 = |f|_0 \sin \theta, \\ |f - P_0 f|_0 = |f|_0 \cos \theta. \end{cases} \quad (2.5)$$

と書ける.

次に, 定数 K_1, K_2 が f に依らずに決まり,

$$|\operatorname{div} u_h|_0 \leq K_1 |P_0 f|_0, \quad (2.6)$$

$$|-\nabla p_h + P_0 f|_0 \leq K_2 |P_0 f|_0. \quad (2.7)$$

を満足すると仮定する. 具体的な K_1, K_2 の構成方法は次節で考察する. このとき, Stokes 方程式に対する a priori 評価が以下のように成り立つ.

Theorem 2.1 (a priori error estimate) $\forall f \in L^2(\Omega)^2$,

$$\begin{cases} |u - u_h|_1 \leq \left(\frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{\beta^2} \right)^{\frac{1}{2}} C(h) |f|_0, \\ |p - p_h|_0 \leq \left(\frac{1}{\beta} + \frac{\nu}{\beta^2} \right) C(h) |f|_0, \end{cases} \quad (2.8)$$

where

$$C(h) \equiv \sqrt{(C_0 h K_2 + K_1)^2 + (C_0 h)^2}. \quad (2.9)$$

Proof. 任意の $f \in L^2(\Omega)^2$ に対し, Lemma 2.1, (2.6), (2.7) および (2.5) より

$$\begin{aligned}
 \delta(e_h, r_h) &\leq C_0 h (|-\nabla p_h + P_0 f|_0 + |f - P_0 f|_0) + K_1 |P_0 f|_0 \\
 &\leq C_0 h (K_2 |P_0 f|_0 + |f - P_0 f|_0) + K_1 |P_0 f|_0 \\
 &= ((C_0 h K_2 + K_1) \sin \theta + C_0 h \cos \theta) |f|_0 \\
 &\leq ((C_0 h K_2 + K_1)^2 + (C_0 h)^2)^{\frac{1}{2}} |f|_0 \\
 &= C(h) |f|_0.
 \end{aligned}$$

よって, (1.4) より結論が得られる. $\square$

3 定数 K_1, K_2 の評価

この節では, (2.6), (2.7) を満足する定数 K_1, K_2 の評価方法を述べる. これらの定数が数値的に評価可能であれば, (2.9) によって $C(h)$ が求まり, 定量的な a priori 誤差評価が可能となる.

まず, 有限要素空間 X_h, Y_h の次元をそれぞれ n, m とし, 基底をそれぞれ $\{\phi_j\}_{1 \leq j \leq n}, \{\psi_j\}_{1 \leq j \leq m}$ で定義する. このとき, 実係数 $\{a_j^{(1)}\}_{1 \leq j \leq n}, \{a_j^{(2)}\}_{1 \leq j \leq n}$ および $\{b_j\}_{1 \leq j \leq m}$ によって, 有限要素近似解 $u_h = (u_h^{(1)}, u_h^{(2)})^T \in X_h^2, p_h \in Y_h$ は

$$\begin{aligned}
 u_h^{(1)} &= \sum_{i=1}^n a_i^{(1)} \phi_i, \\
 u_h^{(2)} &= \sum_{i=1}^n a_i^{(2)} \phi_i, \\
 p_h &= \sum_{i=1}^m b_i \psi_i.
 \end{aligned}$$

と一意に表現される. 従って, (2.1) は

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i^{(1)} (\nabla \phi_i, \nabla \phi_j) - \sum_{i=1}^n b_i (\psi_i, \frac{\partial \phi_j}{\partial x}) = (f_1, \phi_j) & 1 \leq j \leq n, \\ \sum_{i=1}^n a_i^{(2)} (\nabla \phi_i, \nabla \phi_j) - \sum_{i=1}^n b_i (\psi_i, \frac{\partial \phi_j}{\partial y}) = (f_2, \phi_j) & 1 \leq j \leq n, \\ -\sum_{i=1}^m a_i^{(1)} (\psi_j, \frac{\partial \phi_i}{\partial x}) - \sum_{i=1}^m a_i^{(2)} (\psi_j, \frac{\partial \phi_i}{\partial y}) = 0 & 1 \leq j \leq m. \end{cases} \quad (3.1)$$

を満たす $\{a_j^{(1)}\}, \{a_j^{(2)}\}, \{b_j\}$ を求めることと同値となる.

ここで, ベクトルを以下で定義する:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_1 &= (a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_n^{(1)})_{1 \times n}, \\
 \mathbf{a}_2 &= (a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \dots, a_n^{(2)})_{1 \times n}, \\
 \mathbf{a} &= (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)_{1 \times 2n}, \\
 \mathbf{b} &= (b_1, b_2, \dots, b_m)_{1 \times m}, \\
 \mathbf{f}_1 &= ((f^{(1)}, \phi_1), (f^{(1)}, \phi_2), \dots, (f^{(1)}, \phi_n))_{n \times 1}^T, \\
 \mathbf{f}_2 &= ((f^{(2)}, \phi_1), (f^{(2)}, \phi_2), \dots, (f^{(2)}, \phi_n))_{n \times 1}^T, \\
 \mathbf{f} &= \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{pmatrix}_{2n \times 1}.
 \end{aligned}$$

さらに、行列を以下で定義する：

$$\begin{aligned}
 (D_0)_{ij} &= (\nabla \phi_i, \nabla \phi_j)_{n \times n}, \\
 (D)_{ij} &= \begin{pmatrix} D_0 & 0 \\ 0 & D_0 \end{pmatrix}_{2n \times 2n}, \\
 (E_x)_{ij} &= (\psi_i, \frac{\partial \phi_j}{\partial x}) = -(\frac{\partial \psi_i}{\partial x}, \phi_j)_{m \times n}, \\
 (E_y)_{ij} &= (\psi_i, \frac{\partial \phi_j}{\partial y}) = -(\frac{\partial \psi_i}{\partial y}, \phi_j)_{m \times n}, \\
 (E)_{ij} &= (E_x \ E_y)_{m \times 2n}, \\
 (G)_{ij} &= \begin{pmatrix} D & -E^T \\ -E & 0 \end{pmatrix}_{(2n+m) \times (2n+m)}.
 \end{aligned}$$

以上の定義により、(3.1) は連立 1 次方程式

$$G \begin{pmatrix} \mathbf{a}^T \\ \mathbf{b}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

に帰着される。さらに、 G の可逆性を仮定し、逆行列 G^{-1} を

$$(G^{-1})_{ij} = \begin{pmatrix} G_a & G_b^T \\ G_b & G_* \end{pmatrix}_{2n \times 2n},$$

の形に分解する。 G_a , G_b および G_* はそれぞれ $2n \times 2n$, $m \times 2n$, $m \times m$ 行列として定義される。従って、与えられた $f \in L^2(\Omega)^2$ に対し、(2.1) を満たす有限要素解 $[u_h, p_h] \in X_h^2 \times Y_h$ は、次の演算で与えられる：

$$\begin{cases} \mathbf{a}^T = G_a \mathbf{f}, \\ \mathbf{b}^T = G_b \mathbf{f}. \end{cases} \quad (3.3)$$

次に、各 L^2 -norm $|P_0 f|_0$, $|\operatorname{div} u_h|_0$, $|\nabla p_h + P_0 f|_0$ を行列の 2 次形式で表現することで、 K_1, K_2 の評価式を求める。

Lemma 3.1 $n \times n$ 行列 L および $2n \times 2n$ 行列 F を

$$\begin{aligned}
 (L)_{ij} &= (\phi_i, \phi_j)_{n \times n}, \\
 (F)_{ij} &= \begin{pmatrix} L^{-1} & 0 \\ 0 & L^{-1} \end{pmatrix}_{2n \times 2n}.
 \end{aligned}$$

で定義する。このとき、 $|P_0 f|_0^2$ は

$$|P_0 f|_0^2 = \mathbf{f}^T F \mathbf{f} \quad (3.4)$$

と表現される。

Proof. $\forall f = (f_1, f_2)^T$ は、実係数 $\{q_j^{(1)}\}_{1 \leq j \leq n}$, $\{q_j^{(2)}\}_{1 \leq j \leq n}$ を用いて

$$P_0 f_1 = \sum_{i=1}^n q_i^{(1)} \phi_i, \quad P_0 f_2 = \sum_{i=1}^n q_i^{(2)} \phi_i.$$

と書ける。従って

$$\mathbf{q}_1 = (q_1^{(1)}, \dots, q_n^{(1)})_{1 \times n}, \quad \mathbf{q}_2 = (q_1^{(2)}, \dots, q_n^{(2)})_{1 \times n}.$$

とおけば, L^2 -projection の定義より, $1 \leq j \leq n$ に対し

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n q_i^{(1)} (\phi_i, \phi_j) &= (f_1, \phi_j), \\ \sum_{i=1}^n q_i^{(2)} (\phi_i, \phi_j) &= (f_2, \phi_j) \end{aligned}$$

であるので,

$$\mathbf{q}_1^T = L^{-1} \mathbf{f}_1, \quad \mathbf{q}_2^T = L^{-1} \mathbf{f}_2.$$

を得る。よって

$$\begin{aligned} |P_0 f|_0^2 &= (P_0 f_1, P_0 f_1) + (P_0 f_2, P_0 f_2) \\ &= \sum_{i=1}^n q_i^{(1)} (\phi_i, P_0 f_1) + \sum_{i=1}^n q_i^{(2)} (\phi_i, P_0 f_2) \\ &= \mathbf{q}_1 L \mathbf{q}_1^T + \mathbf{q}_2 L \mathbf{q}_2^T \\ &= \mathbf{f}_1^T L^{-1} L L^{-1} \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2^T L^{-1} L L^{-1} \mathbf{f}_2 \\ &= \mathbf{f}^T F \mathbf{f}. \end{aligned}$$

□

次に, $n \times n$ 行列 D^{xx}, D^{xy}, D^{yy} を

$$(D^{xx})_{ij} = \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x}, \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right)_{n \times n},$$

$$(D^{xy})_{ij} = \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x}, \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right)_{n \times n},$$

$$(D^{yy})_{ij} = \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial y}, \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right)_{n \times n}.$$

で, さらに $2n \times 2n$ 行列 Q_1 を

$$(Q_1)_{ij} = \begin{pmatrix} D^{xx} & D^{xy} \\ (D^{xy})^T & D^{yy} \end{pmatrix}_{2n \times 2n}.$$

で定義する。このとき, 次が成り立つ。

Lemma 3.2 $2n \times 2n$ 行列 A_1 を

$$(A_1)_{ij} = (G_a Q_1 G_a)_{2n \times 2n}.$$

で定める。このとき K_1 は行列 A_1, F に対し, 次で評価される

$$K_1 \leq \left(\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}} \frac{\mathbf{x}^T A_1 \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T F \mathbf{x}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.5)$$

Proof. 行列の定義と (3.3) より

$$\begin{aligned}
 |\operatorname{div} u_h|_0^2 &= (\operatorname{div} u_h, \operatorname{div} u_h) \\
 &= \left(\frac{\partial u_h^{(1)}}{\partial x}, \frac{\partial u_h^{(1)}}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u_h^{(1)}}{\partial x}, \frac{\partial u_h^{(2)}}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u_h^{(2)}}{\partial y}, \frac{\partial u_h^{(1)}}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u_h^{(2)}}{\partial y}, \frac{\partial u_h^{(2)}}{\partial y} \right) \\
 &= \mathbf{a}_1 D^{xx} \mathbf{a}_1^T + \mathbf{a}_1 D^{xy} \mathbf{a}_2^T + \mathbf{a}_2 (D^{xy})^T \mathbf{a}_1^T + \mathbf{a}_2 D^{yy} \mathbf{a}_2^T \\
 &= \mathbf{a} Q_1 \mathbf{a}^T \\
 &= \mathbf{f}^T G_a Q_1 G_a \mathbf{f} \\
 &= \mathbf{f}^T A_1 \mathbf{f}.
 \end{aligned}$$

従って結論が得られる. □

次に, $m \times m$ 行列 $\tilde{D}$ を

$$(\tilde{D})_{ij} = (\nabla \psi_i, \nabla \psi_j)_{m \times m}$$

とすると, K_2 について次の lemma が成り立つ.

Lemma 3.3 $2n \times 2n$ 行列 A_2 を

$$(A_2)_{ij} = (G_b^T EF + (G_b^T EF)^T + G_b^T \tilde{D} G_b + F)_{2n \times 2n}.$$

で定義する. このとき K_2 は行列 A_2, F に対し, 次で評価される

$$K_2 \leq \left(\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}} \frac{\mathbf{x}^T A_2 \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T F \mathbf{x}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.6)$$

Proof. $|\nabla p_h + P_0 f|_0^2$ を展開することにより,

$$\begin{aligned}
 |\nabla p_h + P_0 f|_0^2 &= (\nabla p_h, \nabla p_h) - (\nabla p_h, P_0 f) - (P_0 f, \nabla p_h) + |P_0 f|_0^2 \\
 &= \mathbf{b} E F \mathbf{f} + \mathbf{f}^T F^T E^T \mathbf{b} + \mathbf{b} \tilde{D} \mathbf{b}^T + \mathbf{f}^T F \mathbf{f} \\
 &= \mathbf{f}^T G_b^T E F \mathbf{f} + \mathbf{f}^T (G_b^T E F)^T \mathbf{f} + \mathbf{f}^T G_b^T \tilde{D} G_b \mathbf{f} + \mathbf{f}^T F \mathbf{f} \\
 &= \mathbf{f}^T A_2 \mathbf{f}.
 \end{aligned}$$

従って結論が得られる. □

(3.5), (3.6) の評価は, A を対称行列, B を対称正定値行列とするときの一般固有値問題

$$Ax = \lambda Bx$$

の最大固有値を求める問題に帰着することができ, [10] で提案された手法を用いることで, これらの値が評価できる.

4 数値例

領域 Ω は $(0, 1) \times (0, 1)$ の正方領域, $\nu = 1$ として, 以下の Stokes 方程式を考える:

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla p = f & \text{in } \Omega = (0, 1) \times (0, 1), \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{in } \Omega. \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.1)$$

正方領域 Ω は矩形要素に等分割する. x (または y) 軸方向の分割数を N とおく. 分割の parameter h は $h = 1/N$ となる. 有限要素空間 $X_h \subset H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ の基底は区分的 2 次要素 (piecewise bi-quadratic) を用いる. また, $Y_h \subset L^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ の基底は区分的 1 次要素 (piecewise bilinear) を用いる. 区分的 2 次の基底も, 同じく 1 次元の区分 2 次要素のテンソル積で定義する.

数値計算はFUJITSU VP2600/10, 言語はFortran, 精度は倍精度計算で行なった. もちろん, 数値結果には丸め誤差が混入しているため, 正確な a priori 評価を得るためには有理数演算, または精度保証付きソフトウェアでの計算が必要である.

図1は(2.9)の速度・圧力に対する a priori 定数

$$\left(\frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{\beta^2}\right)^{1/2} C(h) \quad \text{and} \quad \left(\frac{1}{\beta} + \frac{\nu}{\beta^2}\right) C(h),$$

の値をプロットしたものである.

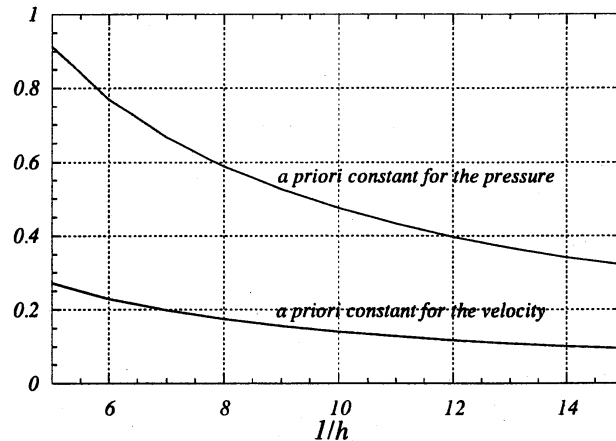


図1: A priori 誤差評価

また, 図2は

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= 20x^2(1-x)^2y(1-y)(1-2y), \\ u_2(x, y) &= 20y^2(1-y)^2x(1-x)(1-2x), \end{aligned}$$

および

$$p(x, y) = 4x(-1+2y)(10x^2 - 15x^3 + 6x^4 - 10y + 30xy - 20x^2y + 10y^2 - 30xy^2 + 20x^2y^2)$$

が(4.1)の解となるように f を選んだ場合の相対誤差を, [11] の手法を用いて計算した a posteriori 誤差評価と比較したものである.

参考文献

- [1] Bank, R. E., Welfert, B. D. : A Posteriori Error Estimates for the Stokes Problem, *SIAM J. Numer. Anal.*, **28**, 591–623 (1991).
- [2] Grisvard, P. : *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman, Boston (1985).
- [3] Horgan, C. O., Payne, L. E. : On Inequalities of Korn, Friedrichs and Babuška-Aziz, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **82**, 165–179 (1983).
- [4] Nakao, M. T. : A Numerical Approach to the Proof of Existence of Solutions for Elliptic Problems, *Japan J. Appl. Math.*, **5**, 313–332 (1988).
- [5] Girault, V., Raviart, P. A. : *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes equations*, Series in Computational Mathematics. Berlin Heidelberg New York : Springer (1986).

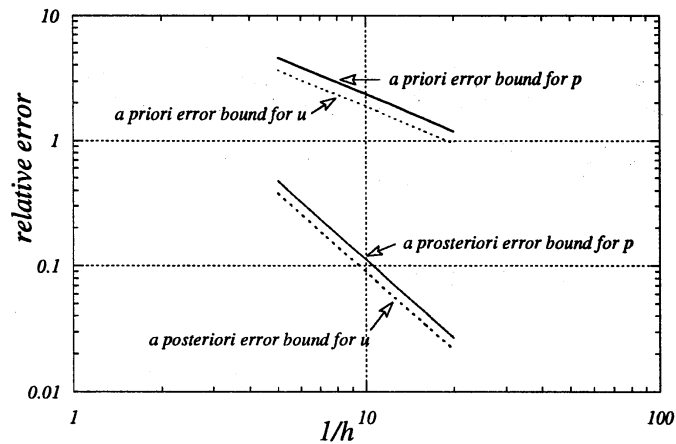


図 2: a posteriori および a priori 誤差評価の比較

- [6] Schultz, M. H. : *Spline Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jergey (1973).
- [7] Verfürth, R. : A Posteriori Error Estimators for the Stokes Equations, *Numer. Math.*, **55**, 309–325 (1989).
- [8] Verfürth, R. : A Posteriori Error Estimators for the Stokes Equations II non-conforming discretizations, *Numer. Math.*, **60**, 235–249 (1991).
- [9] Verfürth, R. : A Posteriori Error Estimates for Nonlinear Problems. Finite Element Discretizations of Elliptic Equations. *Math. Comp.*, **62**, 445–475 (1994).
- [10] Yamamoto, N., Nakao, M. T. : Numerical Verifications of Solutions for Elliptic Equations in Nonconvex Polygonal Domains. *Numer. Math.*, **65**, 503–521 (1993).
- [11] 渡部 善隆, 山本 野人, 中尾 充宏 : Stokes 方程式の有限要素解に対する a posteriori 誤差評価, 短期共同研究・数値計算における品質保証とその応用 – 感度解析から証明まで –, 京都大学数理解析研究所講究録, Vol.928 (1995) pp.20–31.