

関数微分方程式の非線形周期系の周期解の存在について

岩手大 教育 古用哲夫

1. まえがき

最近, S. Buzenberg と K.L. Cooke は, 論文 [1] で, 次のスカラー差分微分方程式を考えている。

$$(E) \quad x'(t) = p(t)x(t-\tau)(1-x(t)) - cx(t), \quad t \geq 0,$$

ここで, c, τ は正の定数で, $p(t)$ は最小周期 $\omega > 0$ をもち, 正で連続な周期関数である。方程式 (E) は, 蚊などの病毒媒介昆虫によって媒介される流行病の患者の比率をモデルとしている。彼らの, このモデルを研究する動機は, ある種の流行病の周期的な発生を説明することである。[1] において, c が, ある臨界値 c_k より小さければ正の周期解が存在し, $c \geq c_k$ であれば正の周期解は存在しないことが示されている。以下では, [1] の ideas を用いて, (E) よりも一般の方程式に対して, 同様の問題を考える。

2. 記号と仮定

$I = [0, \infty)$, $R = (-\infty, \infty)$ とする。 I 上で定義されている連続なスカラー一周期関数 $u(t)$ に対し, $\underline{u} = \min_{t \in I} u(t)$, $\bar{u} = \max_{t \in I} u(t)$ とし, 与えられた $h > 0$ に対し,

$$C^h = \{\varphi: [-h, 0] \rightarrow R, \text{連続}\},$$

$$C_+^h = \{\varphi \in C^h, \varphi(\theta) \geq 0 \text{ for } \theta \in [-h, 0]\},$$

とする。以下で, norm は全て supremum norm とする。 $-h \leq \Delta < A$ ($A > 0$) で定義された連続関数 $x(\omega)$ と, 任意に固定した $t, 0 \leq t < A$, に対し, x_t で $x(\omega)$ の $[t-h, t]$ への制限を表わす。すなわち, x_t は, $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $-h \leq \theta \leq 0$, なる C^h の元である。

次のような, スカラーの関数微分方程式を考える。

$$(1) \quad x'(t) = p(t)f(t, x_t) - c(t)x(t), \quad t \geq 0,$$

ここで, $p(t)$, $c(t)$ は周期 $\omega > 0$ をもった連続な周期関数で, $p(t) > 0$ とする。集合, C_ω^h , K , K_r をそれぞれ,

$$C_\omega^h = \{x: [-h, \infty) \rightarrow R, x(t) \text{ は連続で } \omega\text{-periodic}\},$$

$$K = \{x \in C_\omega^h: x(t) \geq 0 \text{ for all } t \in [-h, \infty)\},$$

$$K_r = \{x \in K: 0 \leq x(t) \leq r \text{ for all } t \in [-h, \infty)\},$$

と定義する。 $f(t, \varphi)$ に対し, 必要に応じて, 次の内の幾つかを仮定する。

(H1) $f(t, \varphi)$ は $I \times C^h \rightarrow R$ なる functional で, (t, φ) について連続で,

$f(t, \varphi) \geq 0$ for $\varphi \in C_+^h$, $f(t+\omega, \varphi) = f(t, \varphi)$ for all $t \in I$, $\varphi \in C^h$.

(H2) $M(r) = \sup \{f(t, \varphi) : t \in I, 0 \leq \varphi(\theta) \leq r \text{ for } \theta \in [-h, 0]\}$ に対し, $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r)}{r} = 0$.

(H3) 連続な functional $\Lambda(t, \varphi)$ で, φ について linear なものが存在して, 次の条件をみたす。

(i) $a \int_0^\omega x(t) dt \leq \int_0^\omega \Lambda(t, x_t) dt \leq b \int_0^\omega x(t) dt$ for $x \in K$, ただし, a, b は正の定数である。

(ii) $\frac{\Lambda(t, \varphi) - f(t, \varphi)}{|\varphi|} \rightarrow 0$ uniformly in t as $\varphi (\in C_+^h \setminus \{0\}) \rightarrow 0$.

(H4) $t \in I$ と $\varphi(\theta) > 0$ for $\theta \in [-h, 0]$ に対し, $\Lambda(t, \varphi) > f(t, \varphi)$.

3. 正の周期解の存在

ここでは, 不動点定理を用いて, (1) の正の周期解の存在について考える。 $x \in C_\omega^h$ に対し, operator G , linear operator L を次のように定義する。

$$(Gx)(t) = x(t) + f(t, x_t), \quad t \geq 0,$$

$$(Gx)(t) = (Gx)(k\omega + t), \quad -h \leq t < 0,$$

$$(Lx)(t) = e^{-\gamma(t)} \left\{ \frac{1}{e^{\gamma\omega} - 1} \int_0^\omega e^{\gamma s} p(s) x(s) ds + \int_0^t e^{\gamma s} p(s) x(s) ds \right\}, \quad t \geq 0,$$

$$(Lx)(t) = (Lx)(k\omega + t), \quad -h \leq t < 0,$$

ただし, $\gamma(t) = \int_0^t (c(s) + p(s)) ds$ で, $\gamma(\omega) > 0$ とし, k は $k\omega > h$ なる最小の自然数とする。 $N = L \circ G$ は, C_ω^h 上の operator であるが, この N に対し, 以下の lemmas が成立する。

Lemma 1. $f(t, \varphi)$ は (H1), (H2) をみたすとする。このとき, N は次の性質をもつ。

(i) $\gamma(\omega) > 0$ であって,

$$(2) \quad d(t) = \frac{1}{e^{\gamma(\omega)} - 1} \int_0^\omega c(\omega) e^{\gamma(\omega)} d\omega + \int_0^t c(\omega) e^{\gamma(\omega)} d\omega > 0, \quad t \geq 0,$$

をみたす任意の $c \in C_\omega^h$ に対し, $r = r(c) > 0$ と $\alpha = \alpha(c) \in (0, 1)$ が存在して, N は K_r を $K_{\alpha r}$ に写す。

(ii) $x(t)$ が $0 \leq x(t) \leq r^*$ for $t \in [-h, \infty)$ なる (1) の周期解であるための必要にして十分な条件は $Nx = x$ かつ $x \in K_{r^*}$ であることである。

証明. $x \in C_\omega^h$ のとき $Gx \in C_\omega^h$ であることは明らかだから, $x \in C_\omega^h$ のとき $Lx \in C_\omega^h$ であることを示すことにより, $N = L \circ G: C_\omega^h \rightarrow C_\omega^h$ を示す。そのためには, $t > 0$ で $(Lx)(t)$ が連続で, ω -periodic であることを示せばよい。 $(Lx)(t)$ の定義から, 明らかに $(Lx)(t)$ は $t > 0$ で連続である。そして, $c(t)$ と $p(t)$ の周期性により, $\gamma(t) - \gamma(t + \omega) = -\gamma(\omega)$ だから, $t > 0$ で次が成立する。

$$\begin{aligned} (Lx)(t + \omega) &= e^{-\gamma(t + \omega)} \left\{ \frac{1}{e^{\gamma(\omega)} - 1} \int_0^\omega e^{\gamma(\omega)} p(\omega) x(\omega) d\omega + \int_0^{t + \omega} e^{\gamma(\omega)} p(\omega) x(\omega) d\omega \right\} \\ &= e^{-\gamma(t)} e^{\gamma(t) - \gamma(t + \omega)} \left\{ \frac{e^{\gamma(\omega)}}{e^{\gamma(\omega)} - 1} \int_0^\omega e^{\gamma(\omega)} p(\omega) x(\omega) d\omega + \int_0^t e^{\gamma(\omega + \omega)} p(\omega) x(\omega) d\omega \right\} \\ &= e^{-\gamma(t)} \left\{ \frac{1}{e^{\gamma(\omega)} - 1} \int_0^\omega e^{\gamma(\omega)} p(\omega) x(\omega) d\omega + \int_0^t e^{\gamma(\omega)} p(\omega) x(\omega) d\omega \right\} = (Lx)(t). \end{aligned}$$

従って, $Lx \in C_\omega^h$ であり, $N: C_\omega^h \rightarrow C_\omega^h$ である。

次に, $\gamma(\omega) > 0$ と (2) をみたす任意の $c \in C_\omega^h$ に対し, $r = r(c) > 0$ と $\alpha = \alpha(c) \in (0, 1)$ が存在して, $N: K_r \rightarrow K_{\alpha r}$ となることを示す。

$$0 \leq x(\omega) + f(\omega, x_0) \leq r + M(r) \quad \text{for } x \in K_r, \quad s \geq 0.$$

だから,

$$\begin{aligned} 0 \leq (Nx)(t) &\leq (r + M(r)) e^{-\gamma(t)} \left\{ \frac{1}{e^{\gamma(\omega)} - 1} \int_0^\omega e^{\gamma(s)} p(s) ds + \int_0^t e^{\gamma(s)} p(s) ds \right\} \\ &\leq (r + M(r)) e^{-\gamma(t)} \left\{ \frac{1}{e^{\gamma(\omega)} - 1} [e^{\gamma(\omega)}]_{s=0}^{s=\omega} + [e^{\gamma(s)}]_{s=0}^{s=t} - \frac{1}{e^{\gamma(\omega)} - 1} \int_0^\omega c(s) e^{\gamma(s)} ds - \int_0^t c(s) e^{\gamma(s)} ds \right\} \\ &\leq (r + M(r)) \left[1 - e^{-\gamma(t)} \left\{ \frac{1}{e^{\gamma(\omega)} - 1} \int_0^\omega c(s) e^{\gamma(s)} ds + \int_0^t c(s) e^{\gamma(s)} ds \right\} \right] \quad \text{for } t \geq 0, \end{aligned}$$

である。

$$d(t) = e^{-\gamma(t)} \left\{ \frac{1}{e^{\gamma(\omega)} - 1} \int_0^\omega c(s) e^{\gamma(s)} ds + \int_0^t c(s) e^{\gamma(s)} ds \right\}, \quad t \geq 0,$$

は、仮定から $d(t) > 0$ かつ連続で、 $x \in C_\omega^R$ のとき $Lx \in C_\omega^R$ となることの証明と同様にして、 $d(t+\omega) = d(t)$, $t \geq 0$, がいえ、次が成立する。

$$d(t) \geq m(c) = \min_{t \geq 0} d(t) > 0, \quad m(c) \leq d(0) < 1,$$

$$\text{今, } \alpha = \alpha(c) = \frac{2-m(c)}{2} \text{ とし, } r = r(c) \text{ を } \frac{M(r)}{r} \leq \frac{m(c)}{2(1-m(c))} \text{ なる数とする}$$

と, $0 < \alpha < 1$ であって,

$$0 \leq (Nx)(t) \leq \left(1 + \frac{M(r)}{r}\right) (1 - m(c)) r \leq \frac{2-m(c)}{2} r \leq \alpha r, \quad t \geq 0,$$

が成立するので、(i) が証明された。

次に、(ii) を示す。まず $x \in K_{r^*}$, $Nx = x$ とすると、 $x(t)$ は $t > 0$ で連続的微分可能で、

$$(*) \quad \frac{d}{dt} (e^{\gamma(t)} x(t)) = \frac{d}{dt} (e^{\gamma(t)} (Nx)(t)) = e^{\gamma(t)} p(t) \{x(t) + f(t, x_t)\},$$

だから,

$$x'(t) + (c(t) + p(t)) x(t) = p(t) \{x(t) + f(t, x_t)\},$$

となり、 $x(t)$ は (i) の ω -周期解である。

逆に、 $x(t)$ を (i) の ω -周期解で、 $x \in K_{r^*}$ なるものとする。すると、

(*) が成立するから,

$$(**) \quad x(t) = e^{-\gamma(t)} \left[x(0) + \int_0^t e^{\gamma(s)} p(s) \{x(s) + f(s, x(s))\} ds \right],$$

で従って,

$$(***) \quad x(0) = x(\omega) = e^{-\gamma(\omega)} \left[x(0) + \int_0^\omega e^{\gamma(s)} p(s) \{x(s) + f(s, x(s))\} ds \right],$$

を得る。(**) を $x(0)$ について解いて, (**) に代入すれば,

$$(Nx)(t) = x(t), \quad t \geq 0, \quad \text{で,} \quad \text{これから } Nx = x \text{ と見える。}$$

Lemma 2. $f(t, \varphi)$ は (H1), (H2), (H3) をみたすとし, $N: C_\omega^h \rightarrow C_\omega^h$ は Lemma 1 のようにとする。このとき, N は completely continuous で, 次のような K に関する Fréchet derivative をもつ。

$$(N'(\omega)x)(t) = e^{-\gamma(t)} \left[\frac{1}{e^{\gamma(\omega)} - 1} \int_0^\omega e^{\gamma(s)} p(s) \{x(s) + \Lambda(s, x(s))\} ds + \int_0^t e^{\gamma(s)} p(s) \{x(s) + \Lambda(s, x(s))\} ds \right], \quad t \geq 0,$$

$$(N'(\omega)x)(t) = (N'(\omega)x)(k\omega + t), \quad k\omega > h, \quad \text{for } t \in [-h, 0).$$

$N'(\omega)$ は C_ω^h 上の operator と見て, compact operator である。

証明. $x \in C_\omega^h$ に對し, $(Nx)(t) = (L \circ G)x(t)$ for $t \geq 0$ である。Lemma 1 (i) の証明と同様にして, $\|Lx\| \leq \|x\|$ が示されるから, L は連続である。また, $(Lx)(t)$ は

$$\frac{d}{dt}(Lx)(t) = -(c(t) + p(t))(Lx)(t) + p(t)x(t),$$

をみたすから, $\|(Lx)'\| \leq (\hat{c} + 2\hat{p})\|x\|$ である。従って, L は completely continuous である。一方, G は, 明らかに連続で, 有界集合を有界集合に写すから, 結局, $N = L \circ G$ は, completely continuous である。

次に, L は linear で, 連続だから, N の 0 での Fréchet derivative は,
 $N'(0) = (L \circ G')(0)$ である。 G の定義と (H3) とから,

$$(G'(0)x)(t) = x(t) + \Delta(t, x_t), \quad t \geq 0,$$

である。従って, $G'(0)$ は連続で, 有界集合を有界集合に写す。
 これと, L が compact であることから, $N'(0)$ は compact である。

さて, operator $N'(0)$ のスペクトル半径 $\rho(N'(0))$ を調べる必要がある。
 以下で, $x, y \in C_{\omega}^k$ に対し, $y \geq x$ は $y - x \in K$ を意味し, $y > x$ は $y - x$
 が K の内点であることを意味する。[1]におけると同様にし, K rein and Rutman の結果(次の Theorem K1, K2)と Nussbaum の結果(次の Theorem N)
 を用いて, C に対応する operator を $N'_C(0)$ とするとき, $\rho(N'_C(0))$ が C の
 連続減少関数であることが示される。更に, Lemma 3 が成立する。

Theorem K1. K を cone とし, A を $K \rightarrow K$ なる linear, completely continuous,
 positive operator とする。 $y \in K \setminus \{0\}$ が存在して, $Ay \geq \lambda y, \lambda > 0$, とする。こ
 のとき, A は, $\lambda' \geq \lambda$ なる固有値 λ' に対応する固有ベクトル
 $x \in K$ を少なくとも一つ持つ。

Theorem K2. K を内点をもった cone とし, A は $K \rightarrow K$ なる,
 completely continuous, strongly positive, linear operator とする。このとき,
 (a) A は K の内部に unit norm の一意な eigenvector を持つ。

(b) この eigenvector に対応する固有値 $\lambda > 0$ は, A のスペクトル半径に等しい。

Theorem N. X を real Banach space とし, 各 $c \in [a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$, に対し, A_c は $X \rightarrow X$ なる compact bounded linear operator とする。また, mapping $c \mapsto A_c$ は, uniform operator topology で連続とする。このとき, mapping $c \mapsto \rho(A_c)$ は, 連続である。

Lemma 3. $f(t, \varphi)$ と $N'(0)$ は, Lemma 2 のようにとする。このとき, $c_R \in C_\omega^R$ が存在して, $c = c_R$ のとき, $N'(0)x = x$ なる $x \in K \setminus \{0\}$ が存在する。また, $c < c_R$ であれば, $N'(0)x = x$ のとき, $x \notin K \setminus \{0\}$ である。更に, $y \in K \setminus \{0\}$ と $\alpha > 1$ が存在して, $N'(0)y = \alpha y$ である。また, $c > c_R$ のとき, $\rho(N'(0)) < 1$ である。最後に, そのような c_R は, $[a, b] \cap [c_R, \infty) \neq \emptyset$ を満たす。

証明. $N'(0)$ は c に依存しているのだから, 必要に応じて, $N'_c(0)$ と書くことにする。今, $x \in K \setminus \{0\}$ が $N'_c(0)x = \lambda x$, $\lambda > 0$, を満たしているとする。 $x(t)$ は ω -periodic かつ連続的に微分可能で, 次のようにする。

$$\lambda \frac{d}{dt} \{e^{\lambda t} x(t)\} = e^{\lambda t} p(t) \{x(t) + \Delta(t, x(t))\},$$

すなわち,

$$(4) \quad x'(t) = \{p(t)(\lambda - 1) - c(t)\} x(t) + \lambda p(t) \Delta(t, x(t)).$$

次に,

$$I_c = \int_0^\omega [\{p(t)(\frac{1}{\lambda} - 1) - c(t)x(t) + \frac{1}{\lambda} p(t)\Delta(t, x(t))\}] dt,$$

とかけば, (*) を 0 から ω まで積分することにより, $I_c = 0$ である。もし $\lambda < 1$ であれば,

$$0 = I_c \geq p(\frac{1+a}{\lambda} - 1) \int_0^\omega x(t) dt - \int_0^\omega c(t)x(t) dt,$$

であり, $c(t) = ap$ のとき,

$$0 \geq p \left\{ \frac{1+a}{\lambda} - (1+a) \right\} \int_0^\omega x(t) dt > 0$$

となり, 矛盾である。一方, $\lambda > 1$ であれば,

$$0 = I_c \leq \frac{bp}{\lambda} \int_0^\omega x(t) dt - \int_0^\omega c(t)x(t) dt,$$

となり, これは $c(t) = bp$ のとき, 不可能である。 $\rho(N'_c(0))$ は C の連続減少関数だから, $\rho(N'_{ap}(0)) \geq 1 \geq \rho(N'_{bp}(0))$ であることが,

Theorem K2 から得られる。従って, $N'_{c_k}(0)x = x$, $x \in K \setminus \{0\}$ なる $c_k \in C_\omega^k$ が存在して, $[ap, bp] \cap [c_k, \hat{c}_k] \neq \emptyset$ である。また $C < c_k$ であれば,

$\rho(N'_c(0)) > 1$ だから, $N'_c(0)x = x$ のとき, $x \notin K \setminus \{0\}$ であり, 更に, $y \in K \setminus \{0\}$ が存在して, $\alpha = \rho(N'_c(0)) > 1$ に対し, $N'_c(0)y = \alpha y$ となることが,

Theorem K2 から得られる。最後に, $C > c_k$ のとき, $\rho(N'_c(0)) < 1$ だから, 証明は終わる。

以上の準備のもとに, [2] にある, 次の Schmitt の定理を用いて, (1) の正の周期解の存在が与えられる。

Theorem S. E を real Banach space, $K \subset E$ を cone, D を $0 \in E$ の open, bounded, nonempty neighborhood とする。 $\bar{D}$ を D の closure とし, $N: K \cap \bar{D} \rightarrow K$ を completely continuous operator で $N(0)=0$, N は, 0 で, K に関する Fréchet derivative $N'(0)$ をもつとする。更に次を仮定する。

- (i) $x = \lambda Nx$, $0 < \lambda < 1$, の全ての解 $x \in K$ は $x \notin \partial D$ をみたす。
 - (ii) $\|y\|=1$ なる $y \in K$ と $\alpha > 1$ が存在して, $N'(\alpha)y = \alpha y$ である; そして, $N'(0)x = x$ のとき, $x \notin K \setminus \{0\}$ である。
- このとき, N は $K \cap \bar{D}$ に自明でない不動点をもつ。

Theorem. $f(t, \varphi)$ は (H1), (H2), (H3) をみたし, $c \in C_\omega^h$ は $\gamma(\omega) > 0$, (2) をみたすとする。このとき, $c_h \in C_\omega^h$ で, $[a, b] \cap [c, c_h] \neq \emptyset$ なるものが存在して, 次をみたす。

- (i) $c < c_h$ のとき, (1) は正の周期解をもつ; そして更に, (1) の解が r_0 を bound とし, ultimately bounded であれば, 正の周期解 $x(t)$ は, $0 < x(t) < r_0$ for all $t \geq -h$ をみたす。

- (ii) $f(t, \varphi)$ が更に (H4) をみたし, $c \leq c_h$ であれば, (1) は正の周期解をもたない。

証明. (i) Theorem S で, $E = C_\omega^h$, $K \subset E$ を先に定義した cone, $D = \{x \in E: \|x\| < r\}$ とする。 $K \cap \bar{D} = K_r$ であり, N は Lemmas 1-3 により, Theorem S の, (ii) を除く全ての条件をみたす。 $c < c_h$ のとき,

(ii) もみたされ, (i) は正の周期解をもつ。

(ii) (i) が正の周期解 $x \in K_{\text{pr}} \setminus \{0\}$ をもっているとする。すると Lemma 1 により, $Nx = x$ だから, N の性質により, $x > 0$ である。従って, Nx と $N'(0)x$ の定義と (H4) により,

$$N'(0)x \geq (1+\varepsilon)Nx = (1+\varepsilon)x \text{ for some } \varepsilon > 0,$$

である。これと Theorem K1 により, $N'(0)$ は 1 より大きい eigenvalue に対応する eigenvector をもつ。これは, $c \geq c_h$ のとき $\rho(N'(0)) \leq 1$ であることに反する。従って Theorem が成立する。

4. Theorem の応用

次の差分微分方程式を考える。

$$(3) \quad x'(t) = p(t)F(x(t), x(t-h)) - cx(t), \quad t \geq 0,$$

ここで, $c, h, p(t)$ は (E) と同様で, $F(x, y)$ は次のような $R \times R$ 上の関数とする。

$$F(x, y) = \begin{cases} (1-x)y, & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \\ 1-x, & 0 \leq x \leq 1, \quad y > 1, \\ \min(1, y), & x < 0, \quad y > 0, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

すると, $f(t, \varphi) = F(\varphi(0), \varphi(-h))$ は (H1) をみたす。また, (H2) の $M(r)$ は $M(r) \leq 1$ をみたすから, (H2) も成立する。(H3), (H4) は, $\Delta(t, \varphi) = \varphi(-h)$, $a=b=1$ に対して成立する。更に,

$$p(t)F(x, y) - cx < 0 \quad \text{for } x \geq 1, y \in \mathbb{R},$$

$$p(t)F(x, y) - cx > 0 \quad \text{for } x < 0, y \in \mathbb{R},$$

だから, (3) の解は, 1 を bound とし, ultimately bounded で, Theorem により, 次が得られる。

Corollary 1. 定数 $c_h \in [p, \hat{p}]$ が存在して, 次が成立する。

(i) $c \geq c_h$ であれば, (3) は $0 < x < 1$ に周期解をもたない。

(ii) $0 < c < c_h$ であれば, (3) は, $0 < x < 1$ に周期解をもつ。

次に, $I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上で定義された次のような関数 $F(t, x, y)$ を考える。

$$F(t, x, y) = \begin{cases} a(t)x + b(t)y - xy, & t \in I, 0 \leq x \leq b(t), 0 \leq y \leq a(t), \\ a(t)x, & t \in I, 0 \leq x \leq b(t), y < 0, \\ b(t)y, & t \in I, x < 0, 0 \leq y \leq a(t), \\ 0, & t \in I, x < 0, y < 0, \\ a(t)b(t), & \text{otherwise,} \end{cases}$$

ここで, $a(t), b(t)$ は, 非負連続な ω -周期関数で, $a + b > 0$ とす

る。この $F(t, x, y)$ に対し, 方程式

$$(4) \quad x'(t) = p(t)F(t, x(t), x(t-h)) - c(t)x(t), \quad t \geq 0,$$

を考える。ここで, $h, p(t), c(t)$ は (1) と同様とする。 $f(t, \varphi) = F(t, \varphi(h), \varphi(-h))$

は, (H1) を満たす。(H2) の $M(r)$ は, $M(r) \leq \hat{a}\hat{b}$ を満たすのて, (H2) も

成立する。(H3), (H4) は $\Delta(t, \varphi) = a(t)\varphi(0) + b(t)\varphi(-h)$, $a = \hat{a} + \hat{b}$, $b = \hat{a} + \hat{b}$

に対して, 明らかに成立する。従って, Theorem から, (4) に対して, 次が得られる。

Corollary 2. $c \in C_\omega^h$ は, $\gamma(\omega) > 0$ と (2) をみたすとする。このとき, $c_h \in C_\omega^h$ で $[a, b] \cap [c_h, \hat{c}_h] \neq \emptyset$ なるものが存在して, $c \geq c_h$ であれば, (4) は正の周期解をもたず, $c < c_h$ のとき, (4) は正の周期解をもつ。

最後に, 方程式

$$(5) \quad x'(t) = p(t) F(x(t-r)) - c(t)x(t), \quad t \geq 0,$$

を考える。ここで, $h, p(t), c(t)$ は (1) と同様とし, $F(y)$ は, 次のような $\mathbb{R}$ 上の関数である。

$$F(y) = \begin{cases} \sin y, & |y| \leq \pi, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

すると, $f(t, \varphi) = F(\varphi(-r))$ は, $\Lambda(t, \varphi) = \varphi(-r)$, $a=b=1$ に対して, (H1), (H2), (H3), (H4) をみたす。従って (5) に対しても, Theorem により, 次が得られる。

Corollary 3. $c \in C_\omega^h$ は $\gamma(\omega) > 0$ かつ (2) をみたすとする。このとき, $c_h \in C_\omega^h$ で, $[p, \hat{p}] \cap [c_h, \hat{c}_h] \neq \emptyset$ なるものが存在して, $c \geq c_h$ であれば, (5) は正の周期解をもたない。また, $c < c_h$ であれば, (5)

は正の周期解をもつ。特に c が定数であつて、 $\hat{p} < \pi p$ であれば、定数 $c_h \in [p, \hat{p}]$ が存在して、 $\hat{p}/\pi < c < c_h$ であれば、(5) は、 $0 < \pi < \pi$ に自明でない周期解をもつ。

References

- [1] S. Busenberg and K. L. Cooke, Periodic solutions of a periodic nonlinear delay differential equations, SIAM. J. Appl. Math., 35 (1978), 704-721.
- [2] K. Schmitt, Fixed points and coincidence theorems with applications to nonlinear differential and integral equations, Rapp. #97, Univ. Cath. de Louvain, Belgium, 1976.