

## 時分割形複合交換系の待ち行列モデル

大阪大学 工学部

安田洋史 岡田博美 中西義郎

### 1 まえがき

多元トラヒックを取扱う総合サービスディジタル網の交換方式としては、時分割回線交換(CS)とパケット交換(PS)とが考えられる。しかし、前者は時損系で長大なあるいは同期的なメッセージに適しているのに対し、後者は待時系で短いあるいは非同期的なメッセージに適しており、その適用範囲は明確に限定されている。そこで、両交換機能を有する複合交換方式の必要性が起こってきた。

この複合交換は、一般に2つの待ち行列の複合形としてモデル化されており、その代表的な解析としては Kummerle の解析(1)、岡田や Frank の解析(4)(6)、および Fischer と Harris の解析(5)などがある。しかし、これらはいずれも両待ち行列を、それぞれ一次元のマルコフ過程として解析を行っていたため、PSの待ち時間を過小評価していた。Weinstein等は、

シミュレーションによつてこの点を指摘し、新たに、このモデルを連続系の2次元マルコフ過程で近似した手法を示している(8)。

本報告では、このモデルをより厳密な離散系の2次元マルコフ過程として解析し、その良さを検討している。また、2次元マルコフ過程を用いた、より簡単な近似解法を示し、その有効性を併せ示している。

## 2 方式と解析モデル

複合交換は、これまで多くの方式が提案されているが(1)~(4)、本報告では解析対象として最も基本的と考えられる Kummerle の方式(1)を採用する。この方式を図1に示す。伝送路はフレーム構造を成し、各フレームはさらに固定長スロットに分割される。さらに、CS に対し  $S$  スロット、PS に対し残りの  $N$  スロットが割当

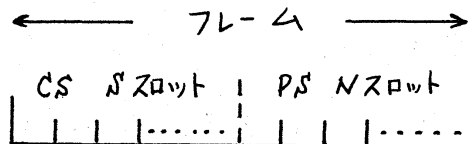


図1 フレーム構造

えられるが、PSトラヒックはCSスロットが未使用の場合に限り、そのスロットを動的に使用することができる。

この方式はシステムをフレーム単位でとらえることにより、図2に示すように、複数サーバを有した2つの待ち行列の複合形としてモデル化される。同図において、サーバはCSに対

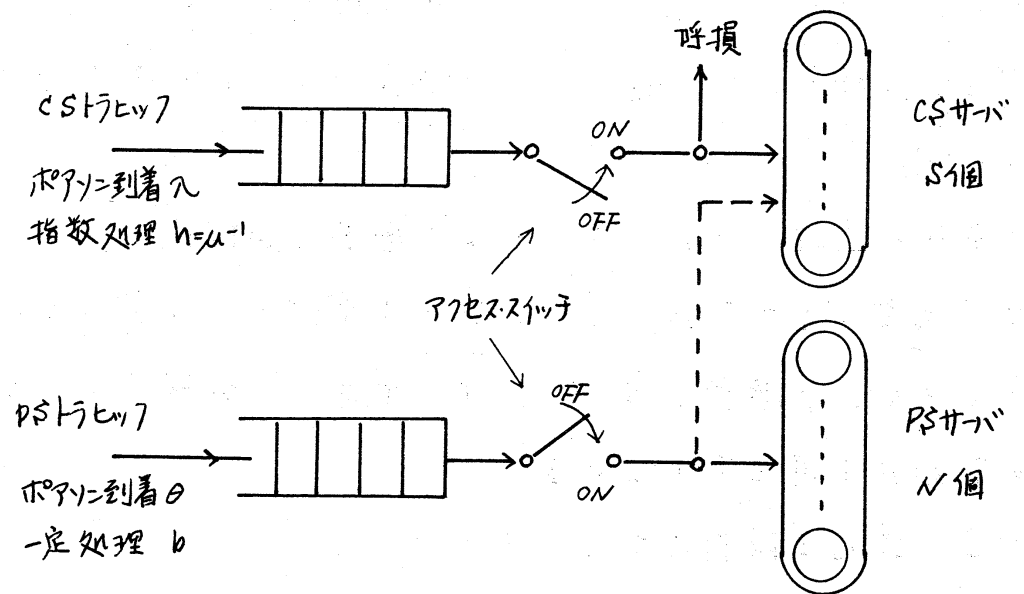


図2 複合交換の待ち行列モデル

して  $N$  個,  $PS$  に対して  $N$  個ある。

まず,  $CS$  については, アクセススイッチは一定時間間隔 (1 フレーム長) で "ON" 状態になるため, 到着した呼はその都度システムにアクセス可能となる。この時点で,  $CS$  サーバに空きがあれば, 呼は処理を受けることができるが, 呼の数が空きサーバの数よりも多い場合, あくまで呼の待ちは許されず, 棄却される。

一方,  $PS$  では, 到着したパケットは一旦待ち行列に入り, スイッチが "ON" 状態になる都度  $FCFS$  則に従って逐次処理を受ける。この場合, 到着して最初にスイッチが "ON" 状態にな

った時点で処理を受けなくとも、そのパケットは棄却されることはない。また、先に述べたように、パケットはPSサーバのみならず、CSの空マサーバとも動的に利用することができる。

CSは呼の到着が平均  $\lambda$  call/sec のポアソン分布に従い、その保留時間は平均  $h = \mu^{-1}$  sec の指数分布に従うものとする。また、PSはパケットの到着が平均  $\theta$  packet/sec のポアソン分布に従い、その処理時間は  $b$  sec の単位分布に従うものとする。

以上、このモデルから明らかのように、複合交換ではCSのPSに及ぼす影響の評価が重要な問題となる。従来、最も正確と考えられていた Fischer と Harris の解析では、2つの待ち行列とそれぞれ1次元のマルコフ過程として取扱っていた。すなわち、この影響に対しては、1フレームでのCS呼数をCSの定常確率分布で与えることにより、各フレーム毎に独立な確率過程として処理していた。しかし、実際には、呼数は呼設定/解除時のみ変化するため、隣接したフレーム間では呼数に対して強い相関性を有している。Fischer と Harris の解析では、この呼数によるフレーム間の相関性を無視していたため、PSの待ち時間をかなり低く評価していた。また、その他の解析モデルにおいても、このフレーム間の相関性は考慮されていなかった。

Weinstein 等は, シミュレーションによってこの点を指摘し, 新たな解析モデルを示している。このモデルは, フレーム化に伴う時間の量子化効果を無視し, パケット長が指数分布に従うと仮定することによって, 連続系の2次元マルコフ過程として取扱われたものである。しかし, 筆者の知る限り, このモデルによる数値結果は特定の場合( $\beta=1$ ,  $N=0$ )を除き, 未だ示されていない。

次節では, 従来の解析の問題点を解消する手法として, 図2-2-2に示したモデルを離散系の2次元マルコフ過程としてとらえ, 解析を行う。

### 3 解析

本節では, 前節で示したモデルに対し, 2次元マルコフ過程として解析を行う。

解析に先立ち, CBTラヒックに対して次の仮定を行う。

#### < 仮定 >

呼量およびフレーム長は十分小さく, 1フレーム当たりの呼の到着および解除は高々1つである。

実際, 1フレーム内に呼が2つ以上到着あるいは解除する確率は $10^{-4}$ 以下であり, この仮定は実用範囲において十分成り立つものである。

まず, 平衡状態確率を次のように定義する。

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_{ij} : \text{アセススイッチが"ON"状態になった直後, 系内に} \\ \quad i \text{ 個の呼と } j \text{ 個のパケットが存在する確率} \\ \pi_i^c : \text{アセススイッチが"ON"状態になった直後, 系内に} \\ \quad i \text{ 個の呼が存在する確率} \end{array} \right.$$

これより, 明らかに

$$\pi_i^c = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{ij} \quad (1)$$

である。ここで,  $\pi_i^c$  は  $b < \infty$  のとき, また  $\pi_{ij}$  は  $b < \infty$ ,  $\theta b < N + S - \sum_i i \pi_i^c$  のとき一意的存在し, マルコフ連鎖を形成する。

次に, CSおよびPSトラフィックに関する確率を次のように定める。

$$\left\{ \begin{array}{l} r : 1 \text{ フレーム時間内に呼が到着する確率} \\ g : 1 \text{ フレーム時間内に特定の呼が解除する確率} \\ g_i : \text{系内に } i \text{ 個の呼がある場合, } 1 \text{ フレーム時間内に任} \\ \quad \text{意の } 1 \text{ 個が接続を解除する確率} \\ p_j : 1 \text{ フレーム時間内にパケットが } j \text{ 個到着する確率} \end{array} \right.$$

これらの確率は次式で与えられる。

$$r = \lambda b \quad (2)$$

$$g_i = i g = i \mu b \quad (3)$$

$$p_j = \frac{(\theta b)^j}{j!} e^{-\theta b} \quad (4)$$

以上より、 $\pi_{ij}$  に関する状態方程式は次式の通りに表される。

$$i) \quad i = 0, \quad j = 0, 1, \dots, \infty$$

$$\begin{aligned} \pi_{0j} = & (1-r) \left\{ \sum_{n=0}^{S+N-1} \pi_{0,n} \cdot P_j + \sum_{n=0}^j \pi_{0,n+S+N} \cdot P_{j-n} \right\} \\ & + (1-r)q \left\{ \sum_{n=0}^{S+N-2} \pi_{1,n} \cdot P_j + \sum_{n=0}^j \pi_{1,n+S+N-1} \cdot P_{j-n} \right\} \end{aligned}$$

$$ii) \quad i = 1, \dots, S-1, \quad j = 0, 1, \dots, \infty$$

$$\begin{aligned} \pi_{ij} = & r \left\{ 1 - (i-1)q \right\} \left\{ \sum_{n=0}^{S+N-i} \pi_{i-1,n} \cdot P_j \right. \\ & \left. + \sum_{n=0}^j \pi_{i-1,n+S+N-i+1} \cdot P_{j-n} \right\} \\ & + \left\{ irq + (1-r)(1-iq) \right\} \left\{ \sum_{n=0}^{S+N-i-1} \pi_{i,n} \cdot P_j \right. \\ & \left. + \sum_{n=0}^j \pi_{i,n+S+N-i} \cdot P_{j-n} \right\} \\ & + (i+1)(1-r)q \left\{ \sum_{n=0}^{S+N-i-2} \pi_{i+1,n} \cdot P_j + \sum_{n=0}^j \pi_{i+1,n+S+N-i-1} \cdot P_{j-n} \right\} \end{aligned}$$

$$iii) \quad i = S, \quad j = 0, 1, \dots, \infty$$

$$\begin{aligned} \pi_{Sj} = & r \left\{ 1 - (S-1)q \right\} \left\{ \sum_{n=0}^N \pi_{S-1,n} \cdot P_j + \sum_{n=0}^j \pi_{S-1,n+N+1} \cdot P_{j-n} \right\} \\ & + \left\{ Srq + 1 - Sq \right\} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \pi_{S,n} \cdot P_j + \sum_{n=0}^j \pi_{S,n+N} \cdot P_{j-n} \right\} \end{aligned}$$

..... (5)

次に,  $\pi_{ij}$ ,  $P_j$  の  $j$  に関する母関数をそれぞれ

$$\pi_i(z) \triangleq \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{ij} z^j \quad (6)$$

$$P(z) \triangleq \sum_{j=0}^{\infty} P_j z^j = e^{-\theta b(1-z)} \quad (7)$$

と定義する。また, 便宜上

$$v_{ik} \triangleq \sum_{j=0}^k \pi_{ij} \quad (8)$$

$$V_i(z) \triangleq \sum_{j=0}^{S+N-i-1} v_{ij} z^j \quad (9)$$

とおくと, (2)~(9)式より, 次のような  $\pi_i(z)$  に関する方程式を得る。

$$A(z) \cdot \pi(z) = B(z) \quad (10)$$

ここで,  $A(z)$ ,  $\pi(z)$  および  $B(z)$  は行列を表し, それぞれ次の要素を有している。

$$A(z) = \begin{bmatrix} a_{00}(z) & a_{01}(z) & 0 & \cdots & 0 \\ a_{10}(z) & a_{11}(z) & a_{12}(z) & \ddots & 0 \\ 0 & a_{21}(z) & a_{22}(z) & a_{23}(z) & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{s-1,s-1}(z) & a_{s-1,s}(z) & 0 \\ 0 & \cdots & a_{s,s-1}(z) & a_{s,s}(z) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\pi(z) = {}^t [\pi_0(z), \dots, \pi_s(z)]$$

$$B(z) = (1-z) \cdot {}^t [b_0(z), \dots, b_N(z)]$$

ただし,  ${}^t$  は行列の転置を表わす。

また,  $a_{ij}(z), b_i(z)$  は次式で与えられる。

$$i) \quad i=0$$

$$a_{0j}(z) = \begin{cases} (1-r) - z^{N+1} e^{ob(1-z)} & j=0 \\ (1-r) z & j=1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$ii) \quad i=1, \dots, N-1$$

$$a_{ij}(z) = \begin{cases} r \{ 1 - (i-1) z \} & j=i-1 \\ \{ irz + (1-r)(1-iz) - z^{N+1-i} e^{ob(1-z)} \} z & j=i \\ (i+1)(1-r) z^2 & j=i+1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$iii) \quad i=N$$

$$a_{Nj}(z) = \begin{cases} r \{ 1 - (N-1) z \} & j=N-1 \\ \{ Nrz + 1 - Nz - z^N e^{ob(1-z)} \} z & j=N \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$b_i(z) = \begin{cases} (1-r) v_0(z) + (1-r) z v_1(z) & i=0 \\ r \{ 1 - (i-1) z \} v_{i-1}(z) + \{ irz + (1-r)(1-iz) \} z v_i(z) \\ \quad + (i+1)(1-r) z^2 v_{i+1}(z) & i=1, \dots, N-1 \\ r \{ 1 - (N-1) z \} v_{N-1}(z) \\ \quad + \{ Nrz + 1 - Nz \} z v_N(z) & i=N \end{cases}$$

したがって、フラマーの公式より  $\pi_i(z)$  は

$$\pi_i(z) = \frac{\Delta_i(z)}{\det \{A(z)\}} \quad i=0, \dots, N \quad (11)$$

として求まる。ここで、 $\Delta_i(z)$  は  $A(z)$  の第  $i$  列を  $B(z)$  で置換えたときの行列式を表わす。

さて、(11)式には  $\{(N+1)(N+2N)/2\}$  個の未知数  $v_{ij}$  ( $i=0, 1, \dots, N$ ,  $j=0, 1, \dots, N+N-i-1$ ) が含まれている。本解析では、この未知数を消去するため、次の2条件を用いる。

- i) (11)式の分母は  $|z| < 1$  の領域で  $\{(N+1)(N+2N)/2 - 1\}$  個の零点を持つが、母関数の性質より  $\pi_i(z)$  はこの領域で解析的であるため、分子も同じ零点を同じ個数だけ持つ。
- ii) 確率保存則より  $\sum_{i=0}^N \pi_i(z) = 1$  である。

以上の解析より、まずCSトラヒックでは、呼の平均系内数  $L_c$  および呼損失率  $P_{loss}$  はそれぞれ

$$\begin{aligned} L_c &= \sum_{i=0}^N i \pi_i^c \\ &= \sum_{i=0}^N i \pi_i(z) \Big|_{z=1} \end{aligned} \quad (12)$$

$$P_{loss} = 1 - \frac{\rho}{T} \cdot L_c \quad (13)$$

として求まる。一方、PSトラヒックでは、パケットの平均系内数  $L_p$  は

$$L_P = \sum_{i=0}^N \frac{d}{dz} \Pi_i(z) \Big|_{z=1} \quad (14)$$

となり，平均待ち時間  $W_P$  は，リトルの公式より

$$W_P = \frac{b}{z} + \frac{L_P}{\theta} \quad (15)$$

として求まる。ただし， $W_P$  はパケットの伝送処理時間  $b$  を含む。また，右辺第一項はアクセススロットの開閉に伴う平均遅延を表す。

#### 4 数値例と検討

本節では，前節で行った解析に対して数値結果を示し，FischerとHarrisの解析およびシミュレーションとの比較検討を行う。また，本解析に対し，CSトラヒックを  $M/M/1$  モデルで近似した手法の結果についても併せ示す。なお，ここではPSの待ち時間に焦点を絞り，議論を進める。

パラメータ設定として，フレーム長を  $b=0.1 \text{ sec}$ ，CSトラヒックの平均保留時間を  $h=\mu^{-1}=50 \text{ sec}$  とする。

図3に，CSおよびPSサーバ数がそれぞれ  $J=1$ ， $N=1$  のときの本解析，FischerとHarrisの解析，およびシミュレーションによる待ち時間特性を示す。ここで，平均呼量と  $a=0.1$ ， $0.5$ ， $2.0 \text{ erlang}$  とする。また，図4に， $J=2$ ， $N=2$  のときの本解析，近似解析，FischerとHarrisの解析，およびシミュ

レーションによる待ち時間特性を示す。ここで、 $a=0.5$  erlang  
とする。

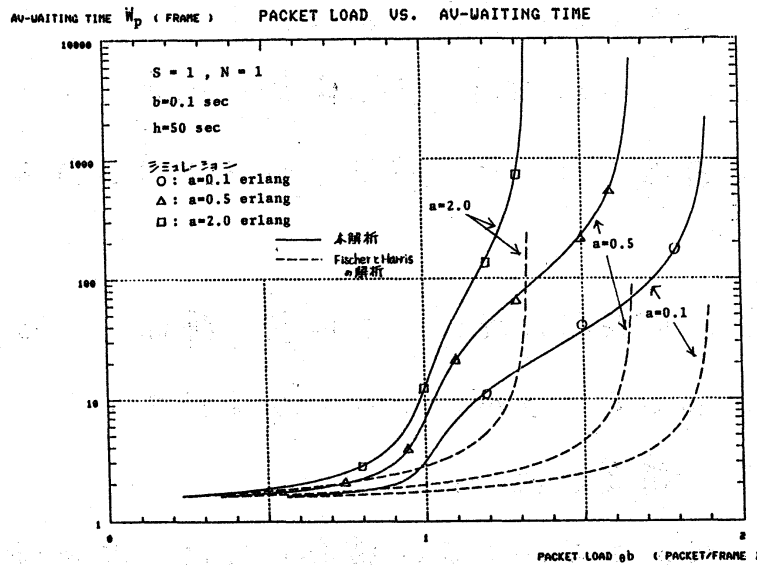


図3 PSトラヒックの待ち時間特性 ( $N=1, N=1$ )

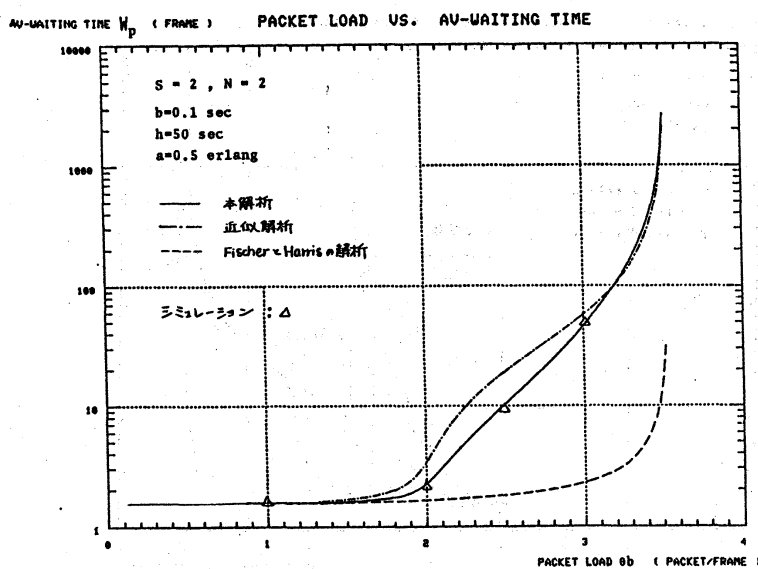


図4 PSトラヒックの待ち時間特性 ( $N=2, N=2$ )

これより、次の結果が得られた。

i) 本解析は、全領域にわたりシミュレーションと良く一致しており、極めて高い精度である。

ii) FischerとHarrisの解析は、PSの負荷がPSサーバの処理能力を越えた領域では、待ち時間をかなり過小評価している。

iii) 図4より、近似解析は $\rho b < 0.2$ では過大評価し、 $\rho b > 0.2$ では過小評価しているが、このようなパラメータの下ではかなり良い精度である。

次に、 $\rho, N$ の値がさらに大きい場合における近似解析の適用性を検討するため、図5に $\rho=5, N=5$ のときの近似解析、

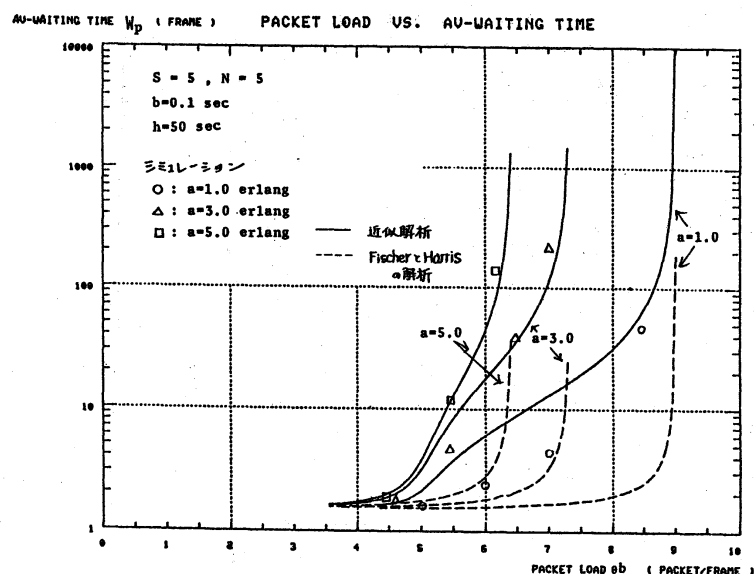


図5 PSトラヒックの待ち時間特性 ( $\rho=5, N=5$ )

FischerとHarrisの解析, およびシミュレーションによる待ち時間特性を示す。ここで,  $a=1.0, 3.0, 5.0$  erlangである。これより, 近似解析はCSの負荷が高い程, 良い精度を示すことがわかる。

## 5 おわりに

本報告では, 複合交換を2次元のマルコフ過程としてとらえ, 解析を行った。これより, 本解析は全領域にわたってシミュレーションと良く一致しており, 従来の解析に比べ極めて高い精度を有することが明らかになった。また, 近似解析については, 一般にCSの負荷が高い程, 良い精度が得られることを示した。

## 謝辞

本報告に対し, 種々の面で御協力, 御助力頂いた大阪大学高橋理氏, 足利靖氏, 広瀬憲治氏に深謝する。

## 参考文献

- [1] K.Kummerle,  
"Multiplexor Performance for Integrated Line and Packet  
Switched Traffic" ICC 1974
- [2] P.Zafiropulo,  
"Flexible Multiplexing for Networks Supporting Line-  
Switched and Packet-Switched Data Traffic" ICC 1974

- [ 3 ] G.J.Coviello and P.A.Vena,  
"Integration of Circuit/Packet Switching by a SENET  
(Slotted Envelope NETwork) Concept" NTC 1975
- [ 4 ] H.Okada and Y.Tezuka,  
"Block Switching System" IECE Trans. (A) 1976
- [ 5 ] M.J.Fischer and T.C.Harris,  
"A Model for Evaluating the Performance of an Integrated  
Circuit- and Packet-Switched Multiplex Structure"  
IEEE Trans. Commun. 1976
- [ 6 ] I.Gitman, H.Frank, B.Occhiogrosso and W.Hsieh,  
"Issues in Integrated Networks Design" ICC 1977
- [ 7 ] M.J.Fischer,  
"Data Performance in a System Where Data Packets Are  
Transmitted during Voice Silent Periods - Single Channel  
Case" IFFF Trans. Commun. 1979
- [ 8 ] C.J.Weinstein, M.L.Malpass and M.J.Fischer,  
"Data Traffic Performance of an Integrated Circuit- and  
Packet-Switched Multiplex Structure"  
IEEE Trans. Commun. 1980
- [ 9 ] C.J.Weinstein, A.J.McLaughlin and T.Bially,  
"Efficient Multiplexing of Voice and Data in Integrated  
Digital Networks" ICC 1980