

退化するガウス写像をもつ $\mathbf{R}^4$ 内の安定 極小曲面について

庄田 敏宏

Toshihiro Shoda

東京工業大学大学院理工学研究科数学専攻

Department of Mathematics

Graduate School of Science and Engineering

Tokyo Institute of Technology

1 安定極小曲面, 正則曲線そして退化するガウス 写像

本セクションでは安定極小曲面, 正則曲線そして退化するガウス写像の 3 つの関係に触れる。 (M^m, ds_M^2) , (N^n, ds_N^2) をそれぞれリーマン多様体とし、 $F: M \rightarrow N$ を等長はめ込みとする。この時 F が任意の (コンパクト台をもつ) 変分の停留点になるならば F を極小はめ込みと云い, その第 2 変分が 0 以上になるとき F を安定極小はめ込みと云う。本セミナーでは特にユークリッド空間の中の安定極小曲面について考えるため $m=2$, $N=\mathbf{R}^n$ とする。今 $F: M \rightarrow \mathbf{R}^n$ を等長はめ込みとする。この時 (一般化された) ガウス写像 $G: M \rightarrow G_{n,2}$ が $P \mapsto F_*(T_P M)$ で与えられる (但し $G_{n,2}$ は n 次元ユークリッド空間の中の 2 次元平面全体からなるグラスマン多様体)。 $G_{n,2}$ は $Q_{n-2} := \{[w] \in \mathbf{C}P^{n-1} | w \cdot w = 0\}$ (但し “ $\cdot$ ” は複素双線形形式) と同型である事が知られている。 $z = x + iy$ を M の局所複素座標とすると $G(P)$ の斉次座標は F_z で与えられる。

Definition 1.1. $A \cdot F_z \equiv 0$ なる $A \in \mathbf{C}^n$ が存在するとき, ガウス写像は

退化すると云う。さらにこの時

$$\alpha := \frac{|A \cdot A|}{|A|^2} \in [0, 1]$$

として α -退化なガウス写像と云う。

よく知られている様に W. Wirtnger によって $\mathbf{C}^n$ 内の正則曲線は安定極小曲面である ([4])。M. Micallef はこの逆問題を考え次のような結果をだした。

Theorem 1.1. ([3]) $F : M \rightarrow \mathbf{R}^4$ を完備で向き付けられた放物的安定極小曲面とする。この時 F は $\mathbf{R}^4$ の適当な複素構造によって正則になる、但し、放物的なリーマン面とは”定数でない正の優調和関数が存在しない”リーマン面の事である。

これが正則曲線と安定極小曲面との関係のひとつである。

さらに M. Micallef は退化するガウス写像をもつ安定極小曲面を考え次をえた。

Theorem 1.2. ([3]) $F : M \rightarrow \mathbf{R}^4$ を完備で向き付けられた安定極小曲面で $1/3$ 以上の退化するガウス写像をもつものとする。この時 M は平面である。

次に正則曲線と退化するガウス写像との関係を見る。今 $F : M \rightarrow \mathbf{C}^n$ を正則はめ込みとすると、この時 F は

$$P \mapsto (Re(F^1), Im(F^1), \dots, Re(F^n), Im(F^n))$$

によって極小はめ込み $F : M \rightarrow \mathbf{R}^{2n}$ となる。又そのガウス写像 $G : M \rightarrow Q_{2n-2}$ は

$$P \mapsto ((F^1)_z, -i(F^1)_z, \dots, (F^n)_z, -i(F^n)_z)$$

で与えられる。よって G は

$$w^2 = -iw^1, \dots, w^{2n} = -iw^{2n-1}$$

で定義される Q_{2n-2} 内の線形部分空間 L に横たわる。これの逆は Lawson によって示された。

Theorem 1.3. ([2]) $F : M \rightarrow \mathbf{R}^{2n}$ を極小等長はめ込みとする。この時 F が $\mathbf{R}^{2n}$ の適当な複素構造によって正則になるための必要十分条件は、そのガウス写像の像が Q_{2n-2} の線形部分空間に横たわっていることである。特に $n=2$ の時、 $F : M \rightarrow \mathbf{R}^4$ が $\mathbf{R}^4$ の適当な複素構造によって正則になるための必要十分条件は、ガウス写像が退化していてしかも $\alpha=0$ となる事である。

以上から完備な向き付けられた安定極小曲面 $F : M \rightarrow \mathbf{R}^4$ で退化するガウス写像をもつものは $\alpha=0$ ならば $\mathbf{R}^4$ の適当な複素構造によって正則になり、 $\alpha \geq 1/3$ ならば平面になる事が判る。では $\alpha \in (0, 1/3)$ の時はどうなるか? と云う問題が生じる。今回の結果は $\alpha > 1/4$ ならば平面になると云うものである。

2 Fischer-Colbrie と R. Schoen の手筋

本セクションでは極小曲面の安定性を解析サイドから分析する。そのためにまず安定性の不等式の変形を見てから Fischer-Colbrie と R. Schoen の解析的な手筋 ([1]) を見る。 $F : M \rightarrow \mathbf{R}^4$ を完備な向き付けられた安定極小曲面とする。任意の点 $P \in M$ に対して $N_P M$ には半時計回りの方向の $\pi/2$ 回転による複素構造がはいる。これによる NM の複素化を $N_{\mathbf{C}}M$ とし、固有分解を $N_{\mathbf{C}}M = NM^{(1,0)} + NM^{(0,1)}$ とする。任意の定ベクトル $a \in \mathbf{C}^4$ の $NM^{(1,0)}$, $NM^{(0,1)}$ の成分を各々 $a^{1,0}$, $a^{0,1}$ とかく。安定性から次の不等式が得られる ([3]):

(1)

$$2 \int_M \frac{f^2}{|F_z|^4} |F_{zz} \cdot \sigma|^2 dv + 2 \int_M \frac{f^2}{|F_z|^2} \operatorname{Re}(\bar{\sigma} \cdot D_z D_{\bar{z}} \sigma) dv \leq \int_M |\nabla f|^2 |\sigma|^2 dv,$$

但し、 $f \in C_0^\infty(M)$ そして $\sigma \in \Gamma(N_{\mathbf{C}}M)$ とする。

今、退化するガウス写像を持つ安定極小曲面を考えるのだが (1) の σ に適当な値を代入して好ましい評価式を出したい (今後、記述簡易のため $s := A^{1,0}$, $t := A^{0,1}$ とする)。M. Micallef は Theorem 1.2 の証明において、 $\sigma = s - \bar{s}$ とおいて不等式:

$$\begin{aligned} \int_M f^2 (-K) dv + \int_M \frac{f^2 |F_{zz}^{1,0}|^2}{|F_z|^4 |s|^2} \left\{ |A \cdot A| - \frac{|A|^2}{2} + \frac{|s|^2}{2} + \frac{|A \cdot A|^2}{8|s|^2} \right\} dv \\ (2) \qquad \qquad \qquad \leq \int_M |\nabla f|^2 dv \end{aligned}$$

をえた。しかし $\sigma = |t|(s - \bar{s})$ とおいた方が計算は簡単になり (2) が得られる。さらに (2) は次のように変形できることが判った:

$$(3) \quad \int_M f^2 \left\{ 1 + \frac{|A \cdot A| - \frac{|A|^2}{2} + \frac{|s|^2}{2} + \frac{|A \cdot A|^2}{8|s|^2}}{|s|^2 + |t|^2} \right\} (-K) dv \leq \int_M |\nabla f|^2 dv,$$

但し, K は M のガウス曲率とする。

$\mathbf{R}^3$ 内の完備で向き付けられた安定極小曲面は平面のみであることは知られている。又, より一般に非負のスカラー曲率をもつ 3 次元リーマン多様体の中の完備で向き付けられた安定極小曲面の分類は Fischer-Colbrie と R. Schoen によってなされた ([1])。彼らの発見した手筋は安定性から得られる不等式が $\Delta u - qu = 0$ (ここで q は滑らかな関数) なる正の関数 u の存在と同値であると云う事である: 今 (M, ds_M^2) をコンパクトでない完備なリーマン多様体とし, q を M 上の滑らかな関数とする。 $D \subset M$ を任意の有界領域とし, ∂D 上で 0 になる関数に作用する 2 階楕円型作用素 $\Delta - q$ を考える。 $\lambda_1(D) < \lambda_2(D) \leq \dots$ をこの作用素の離散的スペクトルとする。この作用素の第一固有値 $\lambda_1(D)$ は

$$(4) \quad \lambda_1(D) = \inf \left\{ \int_M |\nabla f|^2 + q f^2 dv \mid \text{supp}(f) \subset D, \int_M f^2 dv = 1 \right\}$$

で与えられる。この時

Theorem 2.1. ([1]) 次は同値:

- (1) 任意の有界領域 $D \subset M$ に対して $\lambda_1(D) \geq 0$;
- (2) 任意の有界領域 $D \subset M$ に対して $\lambda_1(D) > 0$;
- (3) $\Delta u - qu = 0$ なる M 上の関数 $u > 0$ が存在する。

さらに Fischer-Colbrie と R. Schoen は完備な単位円板上での上記の議論を考え次を得た。

Theorem 2.2. ([1]) (M, ds_M^2) を完備な単位円板とする。この時 $\Delta u - aKu = 0$ ($a \geq 1$) なる M 上の関数 $u > 0$ は存在しない, 但し K は M の ds_M^2 によるガウス曲率とする。

3 Main results

まず Fischer-Colbrie と R. Schoen の Theorem 2.2 を次のように改善

Theorem 3.1. (M, ds_M^2) を完備な単位円板とする。この時 $\Delta u - aKu = 0$ ($a > 1/2$) なる M 上の関数 $u > 0$ は存在しない, 但し K は M の ds_M^2 によるガウス曲率とする。

Proof. $a \geq 1$ の場合は Theorem 2.2 より成り立つので $1/2 < a < 1$ とする。計量を $ds_M^2 = \lambda(z)|dz|^2$ と M 上の局所複素座標 $z = x + iy$ で表しておく。今, $h = \lambda^{-1/2}$ とおく。よく知られているようにガウス曲率は $K = -\frac{1}{2}\Delta \log \lambda$ で与えられる。この時

$$(5) \quad K = \Delta \log h = \frac{\Delta h}{h} - \frac{|\nabla h|^2}{h^2}$$

$D \subset M$ を有界領域とし, ζ を M 上の関数で D 内にコンパクト台を持つ関数とする。この時

$$\begin{aligned} (6) \quad & \int_M (|\nabla(\zeta h)|^2 + aK(\zeta h)^2) dv \\ &= \int_M (|\nabla \zeta|^2 h^2 + 2\zeta h(\nabla \zeta \cdot \nabla h) + \zeta^2 |\nabla h|^2 + a(\zeta^2 h \Delta h - \zeta^2 |\nabla h|^2)) dv \\ &= \int_M (|\nabla \zeta|^2 h^2 + 2\zeta h(\nabla \zeta \cdot \nabla h) + \zeta^2 |\nabla h|^2 \\ &\quad - 2a\zeta h(\nabla \zeta \cdot \nabla h) - a\zeta^2 |\nabla h|^2 - a\zeta^2 |\nabla h|^2) dv \\ &= \int_M (|\nabla \zeta|^2 h^2 + (1 - 2a)\zeta^2 |\nabla h|^2 + 2(1 - a)\zeta h(\nabla \zeta \cdot \nabla h)) dv \\ &\leq \int_M (|\nabla \zeta|^2 h^2 + (1 - 2a)\zeta^2 |\nabla h|^2 + (1 - a)(\varepsilon \zeta^2 |\nabla h|^2 + \frac{1}{\varepsilon} h^2 |\nabla \zeta|^2)) dv \\ &\quad \text{(for any } \varepsilon > 0) \\ &= (1 + \frac{1-a}{\varepsilon}) \int_M |\nabla \zeta|^2 h^2 dv + (1 - 2a + (1-a)\varepsilon) \int_M \zeta^2 |\nabla h|^2 dv, \end{aligned}$$

ここで最初の等式は (5), 2 番目の等式は部分積分から, 最後の不等式はシュワルツの不等式と相加相乗平均による。(4) と (6) から

$$\begin{aligned} & \lambda_1(D) \int_M (\zeta h)^2 dv \\ & \leq (1 + \frac{1-a}{\varepsilon}) \int_M |\nabla \zeta|^2 h^2 dv + (1 - 2a + (1-a)\varepsilon) \int_M \zeta^2 |\nabla h|^2 dv \end{aligned}$$

よって

$$(7) \quad \lambda_1(D) \int_M (\zeta h)^2 dv + (2a - 1 + (a - 1)\varepsilon) \int_M \zeta^2 |\nabla h|^2 dv$$

$$\leq (1 + \frac{1-a}{\varepsilon}) \int_M |\nabla \zeta|^2 h^2 dv$$

ここで $\zeta(r)$ を

$$(8) \quad \begin{aligned} \zeta(r) &\equiv 1 \quad \text{for } r \leq \frac{1}{2}R, \\ \zeta(r) &\equiv 0 \quad \text{for } r \geq R, \\ \zeta &\geq 0 \quad \text{for all } r, \\ |\zeta'| &\leq \frac{C}{R} \quad \text{for all } r, \end{aligned}$$

但し, r は M 内の P からの計量 ds_M^2 による距離, R は正数で C は R に独立な定数とする。この時 $\zeta(r)$ は M 上のリプシッツ関数で $B_R(P)$ 内にコンパクト台をもつ ($B_R(P)$ は中心 P , 半径 R の測地球)。

$a \in (1/2, 1)$ であるので, 十分小さい $\varepsilon > 0$ をとれば

$$(a-1)\varepsilon + 2a - 1 > 0, \quad 1 + \frac{1-a}{\varepsilon} > 0,$$

即ち

$$a > \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon+2} = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2\varepsilon+4}, \quad a < 1 + \varepsilon.$$

(7) と (8) から

$$(9) \quad \begin{aligned} \lambda_1(B_R(P)) \int_M (\zeta h)^2 dv + (2a - 1 + (a-1)\varepsilon) \int_M \zeta^2 |\nabla h|^2 dv \\ \leq (1 + \frac{1-a}{\varepsilon}) \int_M |\nabla \zeta|^2 dx dy \leq (1 + \frac{1-a}{\varepsilon}) \frac{C^2}{R^2} \pi, \end{aligned}$$

ここで $\int_M dx dy = \pi$ を使った。 $\lambda(z)|dz|^2$ は単位円板上の完備な計量なので λ は定数にはならない。よって $|\nabla h|$ は M 上 0 にはならないので (9) において十分大きい R をとると $\lambda_1(B_R(P)) < 0$ となる。よって Theorem 2.1 から $\Delta u - aKu = 0$ ($1/2 < a < 1$) なる M 上の関数 $u > 0$ は存在しない。 $\square$

安定性の不等式 (3) と Theorem 3.1 から主定理を得る。

Main Theorem. $F : M \rightarrow \mathbf{R}^4$ を完備な向き付けられた安定極小曲面で α -退化 ($\alpha > 1/4$) なガウス写像をもつとする。この時 M は平面で

Proof of Main Theorem. (3) が任意のコンパクト台をもつ関数 f に対して成り立つので Theorem 2.1 から

$$(10) \quad \Delta u + \left\{ 1 + \frac{|A \cdot A| - \frac{|A|^2}{2} + \frac{|s|^2}{2} + \frac{|A \cdot A|^2}{8|s|^2}}{|s|^2 + |t|^2} \right\} (-K)u = 0$$

を満たす M 上の関数 $u > 0$ が存在する。この u の M の普遍被覆面へのリフトも u と同じく (10) を満たす。まず M の普遍被覆面が単位円板であるとする。この時 $-Ku$ の係数と $\frac{1}{2}$ を比較すると

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 + \frac{|A \cdot A| - \frac{|A|^2}{2} + \frac{|s|^2}{2} + \frac{|A \cdot A|^2}{8|s|^2}}{|s|^2 + |t|^2} \right\} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{|s|^2 + |t|^2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2}\right)(|s|^2 + |t|^2) + |A \cdot A| - \frac{|A|^2}{2} + \frac{|s|^2}{2} + \frac{|A \cdot A|^2}{8|s|^2} \right\} \\ &= \frac{1}{|s|^2 + |t|^2} \left\{ \frac{1}{2}(|s|^2 + \frac{|A \cdot A|^2}{4|s|^2}) + |A \cdot A| - \frac{|A|^2}{2} + \frac{|s|^2}{2} + \frac{|A \cdot A|^2}{8|s|^2} \right\} \\ &= \frac{1}{|s|^2 + |t|^2} \left\{ |s|^2 + \frac{|A \cdot A|^2}{4|s|^2} + |A \cdot A| - \frac{|A|^2}{2} \right\} \\ &> \frac{1}{|s|^2 + |t|^2} \left\{ |s|^2 + \frac{|A|^4}{4|s|^2} \frac{1}{16} + \frac{|A|^2}{4} - \frac{|A|^2}{2} \right\} \\ &= \frac{1}{|s|^2 + |t|^2} \left\{ |s|^2 - \frac{|A|^2}{4} + \frac{|A|^4}{64|s|^2} \right\} \\ &= \frac{1}{|s|^2 + |t|^2} \left(|s| - \frac{|A|^2}{8|s|} \right)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

ここで2番目の等式では条件 $A \cdot F_z \equiv 0$ から得られる関係式 $|A \cdot A| = 2|s||t|$ を, 1番目の不等式には $|A \cdot A| > |A|^2/4$ と云う仮定を使った。よって

$$1 + \frac{|A \cdot A| - \frac{|A|^2}{2} + \frac{|s|^2}{2} + \frac{|A \cdot A|^2}{8|s|^2}}{|s|^2 + |t|^2} > \frac{1}{2}$$

であるので Theorem 3.1 から (10) を満たす u は存在しない, よって M の普遍被覆面は複素平面 $\mathbf{C}$ となる。しかし (10) における u の係数は非負なので u は $\mathbf{C}$ 上の正の優調和関数になる。 $\mathbf{C}$ は放物的であるので u は定数になることから $K \equiv 0$ を得る。□

参考文献

- [1] D. Fischer-Colbrie and R. Schoen. The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of non-negative scalar curvature. *Comm. Pure Appl. Math.* 33, pp. 199–211, 1980.
- [2] H. B. Lawson Jr. *Lectures on minimal submanifolds, Vol.I*. Publish of Perish, Berkeley, 1980.
- [3] M. Micallef. Stable minimal surfaces in Euclidean space. *J. Diff. Geom.*, pp. 57–84, 1984.
- [4] W. Wirtinger. Eine determinanteidentität und ihre anwendung auf analytische gebilde und Hermitesche massbestimmung. *Monatsh. Math. Physik* 44, pp. 343–365, 1936.