

中性子輸送方程式の固有値問題

(Monoenergetic Neutron Transport Equation の場合)

京大 I 鶴飼正二

§ 1. 序

物質(媒質)と相互作用している中性子の集団的振舞は neutron transport equation によって記述される。ここではすべての中性子の速度は一定(monoenergy)という簡単な model について考察する。

D は 3次元空間の bounded convex domain とし媒質が占める領域を表わすとする。 D の点を $\mathbf{r} = (x, y, z)$ で表わす。

U は 3次元空間の単位球面とする。 U の点を $\Omega = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ で表わす: $|\Omega| = \sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2} = 1$ 。 Ω は中性子の運動方向を表すものとする。

$\psi(\mathbf{r}, \Omega, t)$ は時刻 t に於ける点 $(\mathbf{r}, \Omega)$ での中性子密度とする。

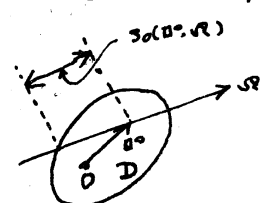
我々が考へる transport eq. は次のものがある。

$$(1-1) \quad \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, \Omega, t) = -\Omega \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, \Omega, t) - \sigma(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}, \Omega, t) + \frac{c(\mathbf{r})}{4\pi} \int_U \psi(\mathbf{r}, \Omega', t) d\Omega',$$

$$\mathbf{r} \in D, \quad \Omega \in U.$$

$\equiv \equiv \equiv \sigma(u^0)$, $c(u^0)$ は D 上で可測, 有界, 非負関数, $R \cdot \nabla = \Omega_1 \frac{\partial}{\partial x} + \Omega_2 \frac{\partial}{\partial y} + \Omega_3 \frac{\partial}{\partial z}$ (R 方向の微分), v は正定数である。

境界条件として通常, 物理的には次の条件が課せられる: 媒質 D に外部から流入する中性子は存在しない。 $\Sigma = \Sigma^{\text{ext}}$

$$(1-2) \quad S_0(u^0, R) = \inf \{s \mid u^0 - sR \notin D, s \geq 0\}$$


と定義する。以下では $S_0(u^0, R)$ は $G = D \times U$ で

可測と仮定する。 $l \in D$ の max. diameter とする。

$$(1-3) \quad 0 \leq S_0(u^0, R) \leq l.$$

$\Sigma = \Sigma^{\text{ext}}$ 境界条件は次のようにする。

$$(1-4) \quad \psi(u^0 - S_0(u^0, R)R, R, t) = 0 \quad \text{for } u^0 \in D, R \in U.$$

$L^2(G)$ ($G = D \times U$) で operator B を

$$(1-5) \quad B\psi = -vR \cdot \nabla \psi - v\sigma(u^0)\psi + v c(u^0) \int_U \psi(u^0, R') dR'$$

で定義する。 B の定義域 $\mathcal{D}(B)$ は $\psi \in L^2(G)$, $R \cdot \nabla \psi \in L^2(G)$ から

境界条件 (1-4) を満たす関数 $\psi(u^0, R)$ から成るものとする。 $\psi(u^0, R) \in$

$\mathcal{D}(B)$ は R と u^0 の R 方向の直線上で u^0 について絶対連続である。

Jöngens [1] は semi-group の理論を用い, 初期値問題

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = B\psi, \quad \psi(u^0, R, t=0) = \psi_0(u^0, R) \text{ (given)}$$

が $L^2(G)$ で well-posed であること, かつ solution operator $E(t)$ が

$t \geq t_0 > 0$ で compact であることを示し, したがって operator B の

$L^2(G)$ 上 T の spectrum について 2 次の結果を得る。

定理 1 (Jöngens [1])

- 1) B の spectrum は discrete eigenvalue であり, half plane $\{\lambda \mid \operatorname{Re} \lambda \leq -\kappa\}$ にあり, 任意の strip $\{\lambda \mid \alpha_1 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \alpha_2\}$ で有限個。
- 2) 任意の固有値の generalized eigenspace は有限次元。
- 3) $C(\mathbb{R}) \neq 0$ in D なら B の固有値は存在可なり。
- 4) 任意の固有関数は有界関数である。

これを 2 次の定理を証明する。

定理 2.

次のように定数 $\sigma \geq 0$, $c > 0$ が、領域 $D_0 \subset D$ が存在可なりと仮定する。

- (1) $\operatorname{mes} D_0 \neq 0$,
- (2) $\sigma(u) = \sigma$ for $u \in D_0$,
- (3) $C(u) \geq c$ for $u \in D_0$,

この時 operator B は可算無限個の実固有値を持つ。

尚 B は complex eigenvalue を持つ、 α であり μ の伯数や分布に関し 2 は未解決である。

2. 準備

$\lambda \in B$ の固有値, $\psi(u, \lambda) \in \mathcal{W}(B)$ は λ の固有関数と可なり。

$$(2-1) \quad \varphi(u) \equiv \int_{\mathbb{R}} \psi(u, \lambda) d\lambda$$

とある。 $\psi \in L^2(G)$ ならば $\varphi \in L^2(D)$ は明らか。 D は有界だから $\varphi \in L^1(D)$ である。 $\Delta \psi = \lambda \psi$ より

$$(2-2) \quad \Omega \cdot \nabla \psi(x^0, \Omega) + \left(\frac{\lambda}{v} + \sigma(x^0)\right) \psi(x^0, \Omega) = \frac{c(x^0)}{4\pi} \varphi(x^0),$$

$\Omega \cdot \nabla$ は Ω の方向の微分であるから、

$$-\frac{\partial}{\partial s} \psi(x^0 - s\Omega, \Omega) + \left(\frac{\lambda}{v} + \sigma(x^0 - s\Omega)\right) \psi(x^0 - s\Omega, \Omega) = \frac{1}{4\pi} c(x^0 - s\Omega) \varphi(x^0 - s\Omega).$$

よって

$$(2-3) \quad T_\lambda(x^0, \Omega, s) = \frac{\lambda}{v}s + \int_0^s \sigma(x^0 - s'\Omega) ds'$$

と $\frac{\lambda}{v} < 1$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(e^{-T_\lambda(x^0, \Omega, s)} \psi(x^0 - s\Omega, \Omega) \right) = -\frac{1}{4\pi} e^{-T_\lambda(x^0, \Omega, s)} c(x^0 - s\Omega) \varphi(x^0 - s\Omega)$$

よって s について 0 から $s_0(x^0, \Omega)$ まで積分し、境界条件(1-4)を考慮すれば、

$$(2-4) \quad \psi(x^0, \Omega) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{s_0(x^0, \Omega)} e^{-T_\lambda(x^0, \Omega, s)} c(x^0 - s\Omega) \varphi(x^0 - s\Omega) ds,$$

よって Ω について積分し、(2-1)を用いると

$$(2-5) \quad \begin{aligned} \varphi(x^0) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} d\Omega \int_0^{s_0(x^0, \Omega)} e^{-T_\lambda(x^0, \Omega, s)} c(x^0 - s\Omega) \varphi(x^0 - s\Omega) ds \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{e^{-T_\lambda(x^0, x^0')}}{|x^0 - x^0'|^2} c(x^0') \varphi(x^0') dx^0' \end{aligned}$$

ここで変数変換 $x^0 - s\Omega = x^0'$ と $\bar{T} = T_\lambda$ と

$$(2-6) \quad T_\lambda(x^0, x^0') = T_\lambda\left(x^0, \frac{x^0 - x^0'}{|x^0 - x^0'|}, |x^0 - x^0'| \right) = \frac{\lambda}{v} |x^0 - x^0'| + \int_0^{|x^0 - x^0'|} \sigma(x^0 - s' \frac{x^0 - x^0'}{|x^0 - x^0'|}) ds'.$$

逆に (2-5) の任意の解 $\varphi(\mathbf{w}) \in L^2(D)$ を (2-4) の右辺より $\psi(\mathbf{w}, \mathbf{R})$ を定義しよう。

$$(2-7) \quad \psi(\mathbf{w}, \mathbf{R}) \equiv \frac{1}{4\pi} \int_0^{s_0(\mathbf{w}, \mathbf{R})} e^{-T_\lambda(\mathbf{w}, \mathbf{R}, s)} c(\mathbf{w}-s\mathbf{R}) \varphi(\mathbf{w}-s\mathbf{R}) ds$$

この $\psi(\mathbf{w}, \mathbf{R})$ は 36 頁の (1) の点 $(\mathbf{w}, \mathbf{R}) \in G$ で意味を持つから $\psi \in L^2(G)$ である。以下に之を証明。まず変数変換 $\mathbf{w}-s\mathbf{R} = \mathbf{w}'$ による

$$\int_D \frac{d\mathbf{w}'}{|\mathbf{w}-\mathbf{w}'|^2} = \int_V d\mathbf{w} \int_0^{s_0(\mathbf{w}, \mathbf{R})} ds \leq 4\pi L < +\infty$$

が得られる。従って $\forall \varphi \in L^2(D) \Rightarrow \int \varphi(\mathbf{w}') d\mathbf{w}' < +\infty$, $\varphi \in L^1(D)$ でもあるから

$$\iint_{D \times D} \frac{|\varphi(\mathbf{w}')|}{|\mathbf{w}-\mathbf{w}'|^2} d\mathbf{w} d\mathbf{w}' \leq 4\pi L \int_D |\varphi(\mathbf{w}')| d\mathbf{w}' < +\infty$$

より Fubini の定理より

$$\iint_{D \times D} \frac{\varphi(\mathbf{w}')}{|\mathbf{w}-\mathbf{w}'|^2} d\mathbf{w} d\mathbf{w}' = \int_D d\mathbf{w} \int_0^{s_0(\mathbf{w}, \mathbf{R})} \varphi(\mathbf{w}-s\mathbf{R}) ds,$$

即ち積分

$$\int_0^{s_0(\mathbf{w}, \mathbf{R})} \varphi(\mathbf{w}-s\mathbf{R}) ds$$

は 36 頁の (1) の点 $(\mathbf{w}, \mathbf{R}) \in G$ で意味を持つ。よって $\psi \in L^2(G)$ であることは容易に示せる。 $T_\lambda(\mathbf{w}, \mathbf{R}, s)$ についても同様。(証明終り)。

$$\pm 2 \quad s_0(\mathbf{w}-s\mathbf{R}, \mathbf{R}) = s_0(\mathbf{w}, \mathbf{R}) - s, \quad T_\lambda(\mathbf{w}-s\mathbf{R}, \mathbf{R}, s'-s) = T_\lambda(\mathbf{w}, \mathbf{R}, s') - T_\lambda(\mathbf{w}, \mathbf{R}, s)$$

を考慮すれば, (2-7) より,

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{w}-s\mathbf{R}, \mathbf{R}) &= \int_0^{s_0(\mathbf{w}-s\mathbf{R}, \mathbf{R})} e^{-T(\mathbf{w}-s\mathbf{R}, \mathbf{R}, s')} c(\mathbf{w}-s'\mathbf{R}) \varphi(\mathbf{w}-s'\mathbf{R}) ds', \quad s' = s + s'' \\ &= e^{-T_\lambda(\mathbf{w}, \mathbf{R}, s)} \int_s^{s_0(\mathbf{w}, \mathbf{R})} e^{-T_\lambda(\mathbf{w}, \mathbf{R}, s')} c(\mathbf{w}-s'\mathbf{R}) \varphi(\mathbf{w}-s'\mathbf{R}) ds'. \end{aligned}$$

右辺の積分は s に関する可積分函数の積分だから s に関する絶対連続,
 $T_\lambda(u, v, s)$ に関するも同様 $T_\lambda = 0$ は定義 (2-3) で見れば明らか。従って
 $\psi(u-s, v, s)$ は s に関する絶対連続, 微分すれば $\varphi(u)$ なる (2-5) を
 満たす v 及び (2-7) を用いては (2-2) 即ち $B\psi = \lambda\psi$ を得る。以上より
 2 次の Lemma が証明出来た。

Lemma 2-1. $\lambda \in B$ の固有値, $\varphi(u, v) \in D(B)$ は λ の固有函数,

$$\varphi(u) \equiv \int_v \psi(u, v) dv$$

とすれば, $\varphi(u) \in L^2(D)$ かつ次の積分方程式を満たす。

$$(2-8) \quad \varphi(u) = \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{e^{-T_\lambda(u, u')}}{|u - u'|^2} \underbrace{\varphi(u')}_{C(u')} du'$$

逆にこの積分方程式の任意の解 $\varphi \in L^2(D)$ に対し

$$\psi(u, v) \equiv \frac{1}{4\pi} \int_0^{S(u, v)} e^{-T_\lambda(u, v, s)} C(u-s, v) \varphi(u-s) ds$$

で定義した $\psi(u, v)$ は $\in D(B)$ かつ $B\psi = \lambda\psi$ を満たす。

λ を λ operator $G_\lambda \in$

$$(2-9) \quad (G_\lambda \varphi)(u) \equiv \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{e^{-T_\lambda(u, u')}}{|u - u'|^2} C_1(u) \varphi(u') du', \quad u \in D$$

$$C_1(u) = \sqrt{C(u)}$$

と定義可也

Lemma 2-2 $\lambda \in \mathbb{C}$ の complex number とすると G_λ は $L^2(D)$ 上の
 compact operator である

証明) 例として Mikhlin [2] p.32 を見よ。

λ を λ parameter と見做し G_λ の固有値問題を考へる:

$$P\psi = G_\lambda \psi, \quad \psi \in L^2(\Omega)$$

明らかに固有値 P は λ の関数である。 $P = P(\lambda)$ 。従って Lemma 2-1

より $B\psi = \lambda\psi$ を解くことは $P(\lambda) = 1$ なる λ を求めることに等しい。

以下我々は B の real eigenvalue のみを考察する。従って以下では λ は real である。容易に次のことが証明出来る。

$$T_\lambda(u^0, u^0) = T_\lambda(u^0, u^0)。$$

従って次のことが成立する。

Lemma 2-3. λ が real ならば G_λ は self-adjoint である。

従って G_λ の固有値 $P(\lambda)$ は real, その集積点は (もし存在すれば)

$P=0$ のみである。我々の目的は $P(\lambda)=1$ を解くことにある。

従って正の固有値 P のみに興味がある。 G_λ の正の固有値を大々ものから順に番号を附す。

$$P_1(\lambda) \geq P_2(\lambda) \geq \dots \geq P_n(\lambda) \geq \dots \geq 0$$

Lemma 2-4. $P_n(\lambda) (\neq 0)$ は λ の連続関数である。

証明) 良く知られた定理 (例えば Zaanen [3], p. 426) により

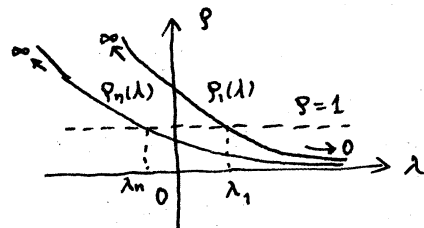
$$|P_n(\lambda) - P_n(\lambda')| \leq \|G_\lambda - G_{\lambda'}\|$$

一方 $\lambda' \rightarrow \lambda$ ならば右辺は $\rightarrow 0$ であることが容易に示せる (証明略)。

よって $P_n(\lambda)$ のグラフを描き、これと直線 $P=1$ との交点を探ればそれより B の固有値 λ が求まる (Graph method)。

以下では任意の λ に対し正の固有値 $P_n(\lambda)$ の個数は

無限個, λ_n 各 $p_n(\lambda)$ は概ね右図のような様子であること証明可也。



このため 1.1 以下で多くの積分作用素の正の固有値を min-max 定理 (Courant-Hilbert [4]) に基づいて比較することになる。

Min-Max 定理 [4]. $\mathcal{H}$ は Hilbert space, $Q \in \mathcal{H}$ 上の compact, self-adjoint operator とする。 $v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \in \mathcal{H}$ とし

$m(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}; Q) = \max_{\|\varphi\|=1, (\varphi, v_i)=0, 0 \leq i \leq n-1} (Q\varphi, \varphi)$ と定義すると, Q の n 番目の正の固有値 $\mu_n(Q)$ は次式で与えられる。

$$\mu_n(Q) = \min_{\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}} m(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}; Q).$$

§3 $\lambda \geq -\nu$ での $p_n(\lambda)$ の性質

Lemma 3-1. $p_n(\lambda) \rightarrow 0$ ($\lambda \rightarrow \infty$), for each n が成立する。

証明) $C(\infty)$ は仮定 (1.5) 有界:

$$0 \leq C(\infty) \leq C_0.$$

更に $\lambda > 0$ とすれば

$$\int_D \frac{e^{-\lambda|u^2-v^2|}}{|u^2-v^2|^2} d\mu \leq \int_D \frac{e^{-\lambda|u^2-v^2|}}{|u^2-v^2|^2} d\mu \leq \int_{R^3} \frac{e^{-\lambda|u^2-v^2|}}{|u^2-v^2|^2} d\mu = 4\pi \int_0^\infty e^{-\lambda r} dr = \frac{4\pi}{\lambda}$$

が成立する。従って $\forall \varphi \in L^2(D)$ に対し, Schwartz により

$$|Q_\lambda \varphi|^2 \leq \left(\frac{C_0}{4\pi}\right)^2 \int_D \frac{e^{-\lambda|u^2-v^2|}}{|u^2-v^2|^2} d\mu \int_D \frac{e^{-\lambda|u^2-v^2|}}{|u^2-v^2|^2} |\varphi(u,v)|^2 d\mu \leq$$

$$\leq \left(\frac{c_0}{4\pi}\right)^2 \frac{4\pi}{\lambda} \int_D \frac{e^{-\lambda|q^0 - q^0'|^2}}{|q^0 - q^0'|^2} |\varphi(q^0)|^2 dq^0.$$

= h.s.)

$$\|G_\lambda \varphi\| \leq \left(\frac{c_0}{\lambda}\right) \|\varphi\|$$

が成り立つ。即ち $\|G_\lambda\| \leq (c_0/\lambda) \rightarrow 0 (\lambda \rightarrow \infty)$ 。(証明終り)。

2.2 定理 2 の条件の領域 D_0 を考えよ。 D_0 の中に半径 a の球 K をとる (= 可能)。 $K \subset D_0 \subset D$. operator G_λ の積分核は $G_\lambda(q^0, q^0')$ と書く。

$$(3-1) \quad G_\lambda(q^0, q^0') = \frac{1}{4\pi} c_1(q^0) \frac{e^{-\lambda|q^0 - q^0'|^2}}{|q^0 - q^0'|^2} c_1(q^0')$$

2.2 operator E_λ は積分核

$$(3-2) \quad E_\lambda(q^0, q^0') = \begin{cases} G_\lambda(q^0, q^0') & ; q^0, q^0' \in K \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

で定義する。明らかに E_λ は $L^2(D)$ (従って $L^2(K)$) で compact, self-adjoint である。 $\mu_n(E_\lambda)$ は E_λ の n 番目の正の固有値と可する。

Lemma 3-2 $\rho_n(\lambda) \geq \mu_n(E_\lambda)$ for each n as $-\infty < \lambda < \infty$

で成り立つ。

証明) Min-Max 定理を使う。まず

$$m'(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}; G_\lambda) = \max_{\substack{\varphi \in L^2(D) \\ (\varphi, v_i) = 0, i=1, \dots, n-1 \\ \varphi = 0 \text{ for } q^0 \notin K}} \frac{(G_\lambda \varphi, \varphi)}{\|\varphi\|^2}$$

と定義すると, max の定義より

$$m(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}; G_\lambda) \geq m'(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}; G_\lambda)$$

は明らか。よって Min-Max 定理より

$$(3-3) \quad \mu_n(\lambda) = \mu_n(G_\lambda) = \min_{(v_1, \dots, v_{n-1})} m(v_1, \dots, v_{n-1}; G_\lambda) \geq \min_{(v_1, \dots, v_{n-1})} m'(v_1, \dots, v_{n-1}; G_\lambda)$$

$\lambda=3$ で $\varphi(u^0) \equiv 0$ かつ $u^0 \notin K$ とすれば, $(G_\lambda \varphi, \varphi) = (E_\lambda \varphi, \varphi)$ であるから (3-3) の最後の項は $\mu_n(E_\lambda)$ に等しい (証明終り)。

$\lambda \geq 0$ と $u^0 \in K$ とすると定理 2 の条件 2 によつて $c_1(u^0) \geq \sqrt{c}$, 条件 3 によつて $T_\lambda(u^0, u^0) = (\frac{\lambda}{\sqrt{c}} + \sigma) \|u^0 - u^0\|$, ($u^0 \in K$), が成立つ。これに着目して operator F_λ を積分核

$$(3-4) \quad F_\lambda(u^0, u^0) = \frac{c}{4\pi} \frac{e^{-(\frac{\lambda}{\sqrt{c}} + \sigma) \|u^0 - u^0\|}}{\|u^0 - u^0\|^2} \quad ; \quad u^0, u^0 \in K$$

で定義する。明らかに F_λ は $L^2(K)$ 上 compact, self-adjoint である。

Lemma 3-3. $\mu_n(E_\lambda) \geq \mu_n(F_\lambda)$ for each n かつ $-\infty < \lambda < \infty$ である。

証明) $\forall \varphi \in L^2(K)$ に対し $\psi(u^0) = c_1(u^0) \varphi(u^0)$ と置く。明らかに $\|\psi\|^2 \leq \|\varphi\|^2 / c$ が成立つ。従つて (3-2) と (3-4) を比較すれば

$$\frac{(E_\lambda \varphi, \varphi)}{\|\varphi\|^2} = \frac{1}{c} \frac{(F_\lambda \psi, \psi)}{\|\psi\|^2} \geq \frac{(F_\lambda \psi, \psi)}{\|\psi\|^2}$$

を得る。最後の不等号は $(F_\lambda \psi, \psi) \geq 0$ の時成立つ。 φ が $L^2(K)$ を動く時 ψ もやはり $L^2(K)$ 全体を動く ($0 < \sqrt{c} \leq c_1(u^0) \leq \sqrt{c_0} < +\infty$, $u^0 \in K$ である)。従つて Min-Max 定理より Lemma が得られる。

Lemma 3-4. $\lambda \geq -\sqrt{c}$ とする。この時 F_λ の固有値はすべて正, かつ可算無限個である。

証明) $(F_\lambda \varphi, \varphi) \geq 0$ for $\varphi \in L^2(K)$ から $F_\lambda \varphi \equiv 0 \Rightarrow \varphi \equiv 0$ を示す。
 以下に H. Lehnert-Wing [5] の方法を 3次元空間に拡張すれば
 811。 $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ に対し, Fourier 変換

$$\tilde{\varphi}(w) \equiv \int_K e^{i w \cdot x^0} \varphi(x^0) dx^0$$

$$(\tilde{F}_\lambda \varphi)(w) \equiv \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i w \cdot w^0} (F_\lambda \varphi)(w^0) dw^0$$

を定義する。 $e^{-\alpha |w^0|} / |w^0|^2 \in L^1(\mathbb{R}^3)$ ($\alpha > 0$) であるから, 単純計算により

$$(\tilde{F}_\lambda \varphi)(w) = \frac{c}{|w|} \tan^{-1} \frac{|w|}{\frac{\lambda}{\alpha} + \alpha} \tilde{\varphi}(w), \quad \lambda > -\nu^0$$

を得る。但し $|w| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}$ 。 Fourier 変換に於ては Parseval の
 等式から

$$(3-5) \quad (F_\lambda \varphi, \varphi) = c \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|w|} \tan^{-1} \frac{|w|}{\frac{\lambda}{\alpha} + \alpha} |\tilde{\varphi}(w)|^2 dw.$$

$\lambda > -\nu^0$ であるから $\tan^{-1}$ の被積分関数 ≥ 0 であるから, $(F_\lambda \varphi, \varphi) \geq 0$ を得る。

更に $F_\lambda \varphi \equiv 0$ とすると (3-5) より $\tilde{\varphi}(w) \equiv 0$ とならなければならない。即ち
 $\varphi(x^0) \equiv 0$ を得る。(証明終り)

以上の Lemma 3-2~4 より 次の Lemma が従う。

Lemma 3-5. $\lambda > -\nu^0$ とする。 G_λ は可算無限個の正の固有値
 を持つ。

§4 $\lambda \leq -v^2$ の $p_n(\lambda)$ の性質

$\lambda \leq -v^2$ の時, F_λ は正值ではないので $\beta = 1$ 複雑になる。まず $\beta = -(\frac{\lambda}{v^2} + \epsilon)$ とおく。今の場合は $\beta \geq 0$ 。 $R_\beta = \{u = (u_1, u_2, u_3); |u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \leq \beta\}$ なる球 ($\subset \mathbb{R}^3$) を考える。次式が成立。

$$(4-1) \quad F_\lambda(\eta^0, \eta'^0) = \frac{c}{4\pi} \int_{R_\beta} \cosh R(\eta^0 - \eta'^0) \cdot u \frac{du}{|u|} + \frac{1}{|\eta^0 - \eta'^0|^2} (2 - e^{-\beta|\eta^0 - \eta'^0|}) \\ \equiv F_\lambda^{(1)}(\eta^0, \eta'^0) + F_\lambda^{(2)}(\eta^0, \eta'^0) \quad ; \quad \eta^0, \eta'^0 \in K.$$

operator $F_\lambda^{(1)}, F_\lambda^{(2)}$ は $L^2(K)$ 上で共に compact, self-adjoint であること, 及び $F_\lambda = F_\lambda^{(1)} + F_\lambda^{(2)}$ であることは明らかである。

Lemma 4-1. $\lambda \leq -v^2$ に対し, 必ず $\beta \geq 0$ に対し

$$\mu_n(F_\lambda) \geq \mu_n(F_\lambda^{(1)}) \quad \text{for each } n.$$

証明) Lemma 3-4 と同様の方法で operator $F_\lambda^{(2)}$ は正值であることがわかる。(証明終り)。

$\xi = 0$ の原点を球 K の中心に選ぶ (一般性は失われない)。

$$(4-2) \quad \cosh(\eta^0 - \eta'^0) \cdot u = \cosh \eta^0 \cdot u \cosh \eta'^0 \cdot u - \sinh \eta^0 \cdot u \sinh \eta'^0 \cdot u$$

に着目し 2 次のように定義可とする。

$$(4-3) \quad H_{\beta c}(\eta^0, \eta'^0) = \frac{c}{4\pi} \int_{R_\beta} \cosh \eta^0 \cdot u \cosh \eta'^0 \cdot u \frac{du}{|u|}$$

$$(4-4) \quad H_{\beta s}(\eta^0, \eta'^0) = \frac{c}{4\pi} \int_{R_\beta} \sinh \eta^0 \cdot u \sinh \eta'^0 \cdot u \frac{du}{|u|}$$

但し $\eta^0, \eta'^0 \in K$ とする。operator $H_{\beta c}, H_{\beta s}$ は $L^2(K)$ 上で compact

は self-adjoint である。又 $F_\lambda^{(1)} = H_{\beta c} - H_{\beta s}$.

Lemma 4-2. operator $H_{\beta c}$ は可算無限個の正の固有値を持つ。

証明) $\varphi \in L^2(K)$, $\varphi(v^0) = \varphi(-v^0)$ は関数の全体 $\in L^2_c(K)$ と書く。明らかにこれは $L^2(K)$ の部分空間かつ無限次元である。更に $\forall \varphi \in L^2_c(K)$, $\varphi \neq 0$ に対して (4-3) より

$$(4-5) \quad (H_{\beta c} \varphi, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{R_\beta} \frac{1}{|u|} \left| \int_K \cosh v^0 \cdot u \varphi(v^0) dv^0 \right|^2 du > 0$$

を得る (証明終り)。

Lemma 4-3. $\mu_n(F_\lambda^{(1)}) = \mu_n(H_{\beta c})$ for each n .

証明) $F_\lambda^{(1)} = H_{\beta c} - H_{\beta s}$ より $H_{\beta c} H_{\beta s} = H_{\beta s} H_{\beta c} = 0$ であるから
より。 $\lambda = 3/2$

$$\begin{aligned} \int_K H_{\beta c}(v^0, v^{0'}) H_{\beta s}(v^{0'}, v^{0''}) dv^{0''} &= \int_{R_\beta} \frac{1}{|u|} \cosh v^0 \cdot u du \int \frac{1}{|u'|} \cosh v^{0'} \cdot u' du' \\ &\quad \times \left[\int_K \cosh v^{0'} \cdot u \sinh v^{0''} \cdot u' dv^{0''} \right]. \end{aligned}$$

右辺の [...] $\equiv 0$ for $\forall u, u' \in R_\beta$ である (証明終り)。

従って Lemma 3-2, 3-3, 4-1, 4-3 より $\lambda \leq -\nu\sigma$ ($\nu > 0$) の時

$$(4-6) \quad \rho_n(\lambda) \geq \mu_n(E_\lambda^{(1)}) \geq \mu_n(F_\lambda) \geq \mu_n(F_\lambda^{(1)}) = \mu_n(H_{\beta c}).$$

を得る。Lemma 4-2 により $\mu_n(H_{\beta c}) \neq 0$ for each n , より 2 次の Lemma を得る。

Lemma 4-4 G_λ ($\lambda \leq -\nu\sigma$) は無限個の正の固有値 $\rho_n(\lambda)$

を待つ。

最後に $\rho_n(\lambda) \rightarrow \infty$ ($\lambda \rightarrow -\infty$) for each n を証明する。

まず $\sigma = \beta a$ とおく。 a は K の半径であり、 $\Gamma = (4-3)$ z''

$u \rightarrow \sigma u$ とおきなおせば

$$(4-7) \quad H_{\beta c}(\varphi, \varphi') = \frac{c}{4\pi} \sigma^2 \int_K \cosh \sigma \varphi \cdot u \cosh \sigma \varphi' \cdot u \frac{du}{|u|}.$$

$$\chi = z''$$

$$(4-8) \quad I_{\sigma}(\varphi, \varphi') = \frac{c}{4\pi a} \int_K \cosh \sigma \varphi \cdot u \cosh \sigma \varphi' \cdot u du; \varphi, \varphi' \in K.$$

に σ の operator I_{σ} を定義する。明らかに compact, self-adjoint on $L^2(K)$.

Lemma 4-5. $\mu_n(H_{\beta c}) \geq \sigma^2 \mu_n(I_{\sigma})$ for each n .

証明) $|u| \leq a$ for $u \in K$ から, $\forall \varphi \in L^2(K)$ に対し

$$((H_{\beta c} - \sigma^2 I_{\sigma})\varphi, \varphi) = \frac{c}{4\pi} \sigma^2 \int_K \left(\frac{1}{|u|} - \frac{1}{a} \right) \left| \int_K \cosh \sigma \varphi \cdot u \varphi(u) du \right|^2 du \geq 0$$

従って Min-Max 定理より明らか。(証明終り)

Lemma 4-6. I_{σ} ($\sigma > 0$) は無限個の正の固有値を持つ。

証明) Lemma 4-2 と同様に出来る (証明終り)。

z operator T_{σ} を

$$(4-9) \quad T_{\sigma}(\varphi, \varphi') = \cosh \sigma \varphi \cdot \varphi'; \quad \varphi, \varphi' \in K$$

に よつて 定義すれば, (4-8) より,

$$(4-10) \quad T_{\mathcal{H}} = \frac{c}{4\pi a} T_{\mathcal{H}}^2$$

が 従う。 $T_{\mathcal{H}}$ は compact, self-adjoint on $L^2(K)$.

Lemma 4-7. $T_{\mathcal{H}}$ の 固有値 は $1/2^n$ だけ 異なる。

証明) (4-9) を 展開 する。

$$(4-11) \quad T_{\mathcal{H}}(u, u') = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{2n} \frac{(u, u')^{2n}}{(2n)!}$$

$\mathcal{H}$ = 2 operator S_n と

$$(4-12) \quad S_n(u, u') = (u, u')^{2n}; \quad u, u' \in K$$

に よつて 定義 すると S_n は compact, self-adj. on $L^2(K)$ かつ

$$(4-13) \quad T_{\mathcal{H}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{H}^{2n}}{(2n)!} S_n$$

が 成立, (一樣収束)。 $k=3$ として $u=(x, y, z), u'=(x', y', z')$ と

おける $\forall \varphi \in L^2(K)$ に対し, $C_{i,j,k}$ を 正定数 とし

$$(S_n \varphi, \varphi) = \sum_{i+j+k=2n} C_{i,j,k} \left| \int_K x^i y^j z^k \varphi(u) du \right|^2 \geq 0$$

が 成立。 よつて S_n は 正値。 (4-13) より $T_{\mathcal{H}}$ も 正値 である (証明終り)。

Lemma 4-8. $\mu_n(I_{\mathcal{H}}) = \frac{c}{4\pi a} \{\mu_n(T_{\mathcal{H}})\}^2$ for each n .

証明) (4-10) 及び Lemma 4-7 より明らか (証明終り).

Lemma 4-9. $\sigma \geq \sigma' > 0$ ならば

$$\mu_n(T_\sigma) \geq \mu_n(T_{\sigma'}) \quad \text{for each } n.$$

証明) (4-13) 及び Lemma 4-7 より

$$T_\sigma - T_{\sigma'} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma^{2n} - \sigma'^{2n}}{(2n)!} S_n \geq 0$$

が従う (証明終り)。

従って (4-6), Lemma 4-5, 8, 9 より次式を得る。

$$(4-14) \quad \begin{aligned} p_n(\lambda) &\geq \mu_n(H_{\beta c}) \geq \sigma^2 \mu_n(T_\sigma) \geq \frac{c}{4\pi a} \sigma^2 \{\mu_n(T_\sigma)\}^2 \\ &\geq \frac{c}{4\pi a} \sigma^2 \{\mu_n(T_{\sigma'})\}^2 \end{aligned}$$

$$(\beta = \sigma a, \sigma \geq \sigma' > 0, -\beta = \frac{\lambda}{\sigma} + \sigma)$$

と Lemma 4-6 と 4-8 より $\mu_n(T_{\sigma'}) \neq 0$ for $\forall n > 0, \forall \sigma' > 0$ 。

より (4-14) より $\sigma' > 0$ を fix し, $\sigma \rightarrow \infty$ ($\lambda \rightarrow -\infty$) とすれば結局

Lemma 4-10. $p_n(\lambda) \rightarrow \infty$ ($\lambda \rightarrow -\infty$) for each n 。

以上より次のことを示す。

(1) G_λ は $-\infty < \lambda < \infty$ なる各 λ に対し無限個の正の固有値 $p_n(\lambda)$ を持つ。各 $p_n(\lambda)$ は $-\infty < \lambda < \infty$ で連続。

(2) $p_n(\lambda) \rightarrow 0$ ($\lambda \rightarrow \infty$), $p_n(\lambda) \rightarrow \infty$ ($\lambda \rightarrow -\infty$) for each n 。

従って方程式 $p_n(\lambda) = 1$ は $-\infty < \lambda < \infty$ に少くとも 1 つの根 λ_n を持つ。(1) より λ_n の位数は無限個, λ_n は B の固有値。従って

3.1の定理2が証明出来了。

Operator B は real eigenvalue の外に complex eigenvalue を持つのであるが、その値数や分布は未解決である。

尚 $\alpha(0)$, $c(0)$ が共に D で定数の場合については既に [6] で同じ結果を得ている。発表の際はこの場合について述べた。

References

- [1] Jörgens. K.; CPAM, 11, 209 (1958)
- [2] Mikhlin. S. G.; "Multi-dimensional Singular Integrals and Integral Equations". Pergamon (1965)
- [3] Zaanen. A. C.; "Linear Analysis" North Holland (1953)
- [4] Courant. R., Hilbert. D.; "Method of Math. Phys." vol. 1. Interscience, (1953)
- [5] Wing. G. M.; "An Introduction to Transport Theory" p.93 John-Wiley (1962)
- [6] Ukai. S.; J. Nucl. Sci. Tech. 3, 263 (1966)