

K3 曲面の退化 I

名大 理 金銅誠之

§ 0. 2次元 compact 複素多様体が、1) $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, 2) 標準束 K_X が自明、という 2 条件を満たすとき、 X を K3 曲面と呼ぶ。

K3 曲面の退化の研究に関しては、Kulikov ([2], [4]) による、準安定 K3 曲面の分類がある。これに続く問題として、“K3 曲面の周期理論 (e.g. Burns - Rapoport, Ann. E.N.S. 8 (1975), 235-274.) を、退化曲面にまで拡張されるか、”が考えられる。ここでは、退化曲面の“周期”を扱うのに基本となる、退化曲面の変形について、Friedman の結果 ([1]) を紹介する。

§ 1. K3 曲面の退化.

まず、Kulikov による次の結果がある。

定理 (1.2) (Kulikov.) 複素多様体の固有完全射

$$\pi: \mathcal{X} \rightarrow \Delta = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < 1\}$$

が次の条件を満たすとする。

1.) $\pi: \mathcal{X} \rightarrow \Delta$ は weakly kähler, $\mathcal{X}$ は 3次元複素多様体。

2.) $\pi': \mathcal{X}' = \pi^{-1}(\Delta^*) \rightarrow \Delta^* = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < 1\} = \Delta \setminus \{0\}$ は滑らかで、 $\mathcal{X}_t = \pi^{-1}(t)$ $t \in \Delta^*$ は K3 曲面。

3) $X_0 = \pi^*(0)$ は被約、且、正規交叉

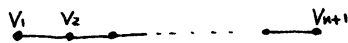
4) $K_X = \mathcal{O}_X$.

この時、 X_0 は次のいずれかになる。(T は $H^2(X_t)$ のモノドロミーとする。)

0) K3 曲面. ($\Leftrightarrow T=I$)

I) $X_0 = V_1 + \cdots + V_{n+1}$. V_1, V_{n+1} は有理曲面. V_j は楕円線織面.

($2 \leq j \leq n$). $D_{j,j+1} = V_j \cap V_{j+1}$ は非特異楕円曲線. X_0 の dual graph は



(但し、 X_0 の dual graph とは、各 component $V_i \in 0$ -単体、double curve $\in 1$ -単体、triple point $\in 2$ -単体とみたときであるとする。)

II) $X_0 = V_1 + \cdots + V_n$, V_i は有理曲面, $1 \leq i \leq n$. $D_{ij} = V_i \cap V_j$ は非特異有理曲線. X_0 の dual graph は、球面 S^2 の三角形分割。

(1.2) の 0) ~ II) の退化曲面に關して次の事が成り立つ。

(1.2) 補題 $X \in$ (1.2) の 0) ~ II) のいずれかの退化曲面とする。

i) $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X$, ω_X は dualizing sheaf.

ii) $\mathcal{O}_D(X) \simeq \mathcal{O}_D$, D は X の double curve

が成り立つ。

(1.3) 定義 曲面 X が、(1.1) の 0) ~ II) のいずれかの type であり、

(1.2) の i), ii) を満たすとき、 X を準安定 K3 曲面と呼ぶ。

以下では I 型の準安定 K3 曲面のみを扱う。この中で基本となるものは、楕円線織面が現れないものである。

すなわち、 $X = V_1 \cup E \cup V_2$ 、 V_i は有理曲面、 $E = V_1 \cap V_2$ は楕円曲線なる曲面である。

定義 (1.4). 準安定 K3 曲面 (I 型) α 中 $\mathbb{C}$ 上 α type α も $\alpha \in$ ^{I 型} 安定 K3 曲面 と呼ぶ。

安定 K3 曲面 $X = V_1 \cup E \cup V_2$ に対し、補題 (1.2) は次の様に書き直せる。

(1.2) 補題

i) $E_i \in |K_{V_i}|$ 、 E_i は $E \subset V_i$ 上の曲線と見なし E も α とする。

ii) $\mathcal{N}_{E/V_1} \otimes \mathcal{N}_{E/V_2} \cong \mathcal{O}_E$ 。

§2. I 型安定 K3 曲面の変形。

ここでは、I 型安定 K3 曲面しか扱わないが、同様の事が、I 型準安定 K3 曲面に対しても成り立つことを、注意しておく。

compact 複素解析空間の変形に関する一般論として、次の結果がある。

(2.1) 定理 (Palamodov [3]) X は compact 複素解析空間とする。

この時、次の事が成り立つ。

1) X 上 α coherent sheaf $\mathcal{J}_X^i$ ($i \geq 0$) が存在し、 $\mathcal{J}_X^* = \bigoplus_i \mathcal{J}_X^i$ は、次数つき Lie 環の構造を持つ。

2) スパクトル系列 $\{E_r\}$ で $E_2^{p,q} = H^p(X, \mathcal{J}_X^q)$ なるもの α を考える。
complex $T_X^* \in \{E_r\} \Rightarrow T_X^*$ (極限) とし定義する。この時、各 T_X^i は有限次元 vector 空間であり、 $\mathcal{J}_X^*$ の Lie bracket より、 T_X^* 上 α に

次数付き Lie 環の構造が入る。

3°) T_x^1 の原点の周りで定義された holomorphic map a germ f が存在し、 $f|_{\mathcal{O}_x}$ は X の versal deformation となる。

また、 $f = f_2 + f_3 + \dots + f_k + \dots$ を斉次多項式の展開とすると、

$f_2(x) = \frac{1}{2}[x, x]$, $x \in T_x^1$ とある。($[,]$ は T_x^* の Lie bracket.)

(2.2) 注意 $\mathcal{J}_x^0 = \text{Der}(\mathcal{O}_x)$, $T_x^0 = H^0(X, \mathcal{J}_x^0)$ である。また、 X が smooth

の場合、 $T_x^1 = H^1(X, \mathcal{O}_x)$, $\mathcal{O}_x$ は接束の section sheaf, とある。

$\text{fil} \Rightarrow T_x^*$ より、次の完全系列が存在する。

$$0 \rightarrow H^1(X, \mathcal{J}_x^0) \rightarrow T_x^1 \rightarrow H^0(X, \mathcal{J}_x^1) \rightarrow H^2(X, \mathcal{J}_x^0) \rightarrow T_x^2 \rightarrow \dots \quad (*)$$

ここでは、このように $\mathcal{J}_x^*$, T_x^* に関係するものとする。

X を安定 K3 曲面とする。この場合、上の $\mathcal{J}_x$, T_x は具体的に計算できる：

(2.3) 補題 $X = X_1 \cup X_2$ を I 型安定 K3 曲面とすると、次の通り。

1°) $\mathcal{J}_x^1 \cong \mathcal{N}_{E_1/X_1} \otimes \mathcal{N}_{E_2/X_2} = \mathcal{O}_E$.

2°) $H^2(\mathcal{J}_x^0) = 0$, 従って、完全系列 (*) において、 $T_x^1 \rightarrow H^0(T_x^1)$ は全射。

3°) $T_x^2 = H^1(\mathcal{J}_x^1) = H^1(\mathcal{O}_E)$. 特に、 $\dim T_x^2 = 1$.

4°) $H^1(\mathcal{J}_x^0)$ の元は、可成りである。i.e. $f|_{H^1(\mathcal{J}_x^0)} \equiv 0$.

退化曲面の変形については次の3段階に分けて調べていく。

Step I. 曲面 X を $X = \cup X_i$, X_i は smooth, X_i と X_j は正則交叉しているもの a を考える。このとき、

$$J_X^0 \circ J_X^1 \xrightarrow{[\cdot, \cdot]} J_X^1 \text{ は全射である。}$$

Step II. $J_X^0 \circ J_X^1 \rightarrow J_X^1$ より、写像 $\varphi: H^1(J_X^0) \otimes H^0(J_X^1) \rightarrow H^1(J_X^1)$ が引き起こされるが、 X が、ある“条件”を満たす時、 φ は全射となる。

Step III. X を I 型安定 K3 曲面とするとさらに φ は全射となるが、 φ が全射性から、 X の versal deformation space を決定する。

Step I は、今の場合、bracket $[\cdot, \cdot]: J_X^0 \circ J_X^1 \rightarrow J_X^1$ が具体的に計算でき、これにより、 φ が全射であることが解る。

まず、Step III を述べ、その後で、Step II のある“条件”について述べることにする。

Step III. 退化曲面の变形に関する Friedman の結果は次の通りである。

定理 (2.4) (Friedman ([1])) X を I 型安定 K3 曲面とする。

i) $H^1(J_X^0) \otimes H^0(J_X^1) \xrightarrow{\varphi} H^1(J_X^1) = T_X^2$ は全射である。

ii) X の versal deformation space の base space は V とすると、

① $V = V_1 \cup V_2$, V_i は smooth, $\dim V_i = 20$, $i=1,2$ で V_1 と V_2 は transversal に交わり、という。

② V_1 は X の local trivial deformation に対応している。

③ $V_2 \setminus V_1$ の点に対応する曲面は非特異 K3 曲面である。

④ $V_1 \cap V_2$ の点に対応する曲面は I 型安定 K3 曲面である。

⑤ $V_1 \setminus V_2$ の真に対応する曲面は、 X と同相であるが、

$N_{E_1/X_1} \otimes N_{E_2/X_2} \neq \mathcal{O}_E$ とは、という。

証明) i) に關しては後述。

ii) $V_1 = H^1(J_x^0) \subset T_x^1$ とする。 V_1 は T_x^1 の超曲面であるから、 T_x^1 の座標を $(z_1, z_2, \dots)$ とすると $V_1 = (z_1 = 0)$ としよ。補題(2.3)の2°)

により $e \in T_x^1$ で $T_x^1 \ni e \rightarrow 1 \in H^0(J_x^1)$ とはるものが存在する。更に、
 $\frac{1}{2}[e, e] = 0$ と出来る。実際、 $H^1(J_x^0) \otimes H^0(J_x^1) \rightarrow H^1(J_x^1)$ の全射性より、

適当な $x \in H^1(J_x^0)$ を選べ、 $e \in e+x$ で置き換えることにより、

$H^0(J_x^1)$ が generate する条件は保ったまま、 $\frac{1}{2}[e, e] = 0$ と出来る。

今、 $W_2 = \{v \in T_x^1 \mid [v, e] = 0\}$ とする。 $V_1 \cap W_2 = \{v \in V_1 \mid [v, e] = 0\}$

である。定理(2.1)で述べた様に、 holomorphic map.

$f: T_x^1 \rightarrow T_x^2$ が存在して、 $f^*(0)$ は、 X の versal deformation

の base space を定めよう。今この場合、 $\dim T_x^2 = 1$ に注意する。

(補題(2.3)の3°)。

補題(2.3)の4°より、 $z_1 \mid f$ 、すなわち、 $f = z_1(\ell + \text{higher order})$ 、 ℓ は線形関数、と書ける。

特に、定理(2.1)の3°より、 $\frac{1}{2}[v, v] = z_1 \cdot \ell(v)$ 、 $v \in T_x^1$ であった。

$\frac{1}{2}[e, e] = 0$ より、 $\ell(e) = 0$ である。 $x \in V_1$ に対して、

$[x, e] = \frac{1}{2}[x+e, x+e] = \frac{1}{2}z_1 \cdot \ell(x+e)$ であるが、 $H^1(J_x^0) \otimes H^0(J_x^1) \rightarrow H^1(J_x^1)$

が全射であったことに注意すると、 ℓ は non-trivial な線形関数であることが従う。また次元を比較することにより $W_2 = \ker \ell$

が解る。 $V_2 = \{x \in T_x^{-1} \mid z^{-1}f(x) = 0\}$ とすると、上述の事、及び、
 $e \in W_2 \setminus V_1$ であつたことより、 $f^{-1}(0) = V_1 \cup V_2$, V_2 は原点 $0 \in T_x^{-1}$ の周り
 で smooth, V_1 と V_2 は transversal に交わり、といることが従ふ。

$V_2 \setminus V_1$ の 点に 対応する 曲面が 非特異 K3 曲面であることは、smoothing
 を考えれば、簡単に解る。ここで smoothing の存在を、保証す
 るのが、次の命題である。

(2.5) 命題 X を 準安定 K3 曲面、 $\pi: \mathcal{X} \rightarrow \Delta \ni X$ の 変形 とする。

$\theta \in T_{\mathcal{X}}^{-1}$ を、 π に 対応する class で、 θ は $H^0(\mathcal{X})$ に 生成して いると 仮定
 する。このとき、 $\mathcal{X}$ は X の 近傍で、smooth である。

(2.6) 注意 上の証明において、 $V_1 \cap V_2 = \{x \in V_1 \mid [x, e] = 0\}$ であつた。

$[x, e] \in H^1(T_{\mathcal{X}}^{-1}) = H^1(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ であるが、 $[x, e] = 0$ であることと、 $N_{E/X_1} \oplus N_{E/X_2}$
 が自明束であることが、ちょうど対応している。

最後に Step II について述べることにする。

(2.7) 定義 曲面 X で $X = \bigcup X_i$, X_i は smooth, X_i と X_j は 正則交叉、と
 いるものを考える。 X が 次の条件を満たすとき、 X を cohomolo-
 gically Kähler 曲面と呼ぶ。

(条件). cohomology class $\omega \in \text{Ker}(\bigoplus H^2(X_i, \mathbb{R}) \rightarrow \bigoplus H^2(X_i \cap X_j, \mathbb{R}))$

で、 $\omega|_{H^2(X_i, \mathbb{R})}$ は X_i の Kähler metric より induce される (1,1)-form
 の cohomology class となり、といるものが存在する。

X は I 型 準安定 K3 曲面 とするとき、 X が cohomologically Kähler であることは明らかである。

(2.8) 定理 X は 準安定 K3 曲面 で、 X は cohomologically Kähler とする。
 α と $\varphi: H^1(\mathcal{I}_X^0) \oplus H^0(\mathcal{I}_X^1) \rightarrow H^1(\mathcal{I}_X^1)$ は 全射 である。

X が cohomologically Kähler であることと φ が 全射 であることと α の関係は、
 おおそ、以下 の通り である。

$\xi \in H^0(\mathcal{I}_X^1)$ の 生成元 とする。 X 上 の coherent sheaf $\mathcal{F}_X \in$

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_X \rightarrow \mathcal{I}_X^0 \xrightarrow{[\beta]} \mathcal{I}_X^1 \rightarrow 0$$

により、 $\mathcal{F}_X$ を 定義 する。 $H^2(\mathcal{F}_X) = 0$ が 示す ことは φ が 全射性 に 従う。

Serre 双対律 より、 $H^2(\mathcal{F}_X) \cong H^0(\check{\mathcal{F}}_X)$ ($\check{\mathcal{F}}_X$ は $\mathcal{F}_X$ の dual) である。

他方、 $\tilde{\iota}: \tilde{X} \rightarrow X$ は、 X の 正則化 とし、complex $\tilde{\iota}_* \Omega_{\tilde{X}}^*(\log \tilde{E}) \in$ である。
 但し、 $E \in X$ が double curve とするとき、 $\tilde{E}$ は $\tilde{\iota}$ による E の 逆像 とする。また $\Omega_{\tilde{X}}^*(\log \tilde{E})$ は log complex とする。

$\tilde{\iota}_* \Omega_{\tilde{X}}^*(\log \tilde{E})$ の subcomplex Λ_X^* で、 X が 退化 $\pi: \tilde{X} \rightarrow \Delta$ の 退化曲面 とし、
 出現 する 場合 (i.e. $\pi^{-1}(0) = X$)、 $\Lambda_X^* = \Omega_{\tilde{X}/\Delta}^*(\log X)|_X$ なる もの が 存在 する。
 (ここで $\Omega_{\tilde{X}/\Delta}^*(\log X)$ は relative log complex)

この時、次の 事が 成り立つ。

(2.9) 定理 $\check{\mathcal{F}}_X \cong \Lambda_X^1$.

他方、cohomologically Kähler という 条件 から、complex Λ_X^* に対して、

Hard Lefschetz 型の定理が成り立つことが、通常 α を用いて示される。特に、Hodge symmetry $\dim H^p(\Lambda_x^q) = \dim H^q(\Lambda_x^p)$ も、成立する。このより、

$$\dim H^2(\mathcal{F}_x) = \dim H^0(\mathcal{F}_x) = \dim H^0(\Lambda_x^1) = \dim H^1(\mathcal{O}_x) = 0 \quad \text{となり、}$$

$H^0(\mathcal{F}_x) = 0$ が従う。(準安定 K3 曲面 X に対し $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ が成り立つことに注意。)

以上で Friedman の論文の紹介を終るが、II 型の退化 K3 曲面に対し、 $\mathcal{F}_x$ が cohomologically Kähler か、否かは一つの問題であろうと思われる。

参考文献

- [1] R.D. Friedman, "Hodge theory, Degenerations, and the Global Torelli Problem." Thesis (Harvard 1981.)
- [2] Kulikov, V, "Degenerations of K3 surfaces and Enriques surfaces." Math. USSR Izv. 11 (1977), 957-989.
- [3] Palamodov, V, "Deformations of complex spaces." Russian Math. Surveys 31 (1976), 129-197.
- [4] Persson, U and H. Pinkham, "Degenerations of surfaces with trivial canonical bundle." Ann. Math. 113 (1981), 45-66.