

幾何学的非線形性を考慮した多重せん断モデル型弾性体の定式化

上田恭平*・井合進・飛田哲男・小堤治**

* 京都大学大学院工学研究科

** 京都大学防災研究所非常勤講師/ (株) 明窓社

要 旨

本稿では、砂の力学モデルとしてのひずみ空間での多重せん断モデル (Iai & Ozutsumi, 2005) に基づく線形弾性体の構成式を提案し、幾何学的非線形性を考慮した大変形解析 (有限ひずみ解析) に必要な定式化を示す。本定式化では、体積ひずみと等方圧力、および、仮想単純モデルにおけるせん断ひずみとせん断応力との間に線形関係を仮定している。定式化を基に、有限要素法による数値解析に必要な離散化を行い、Total Lagrangian法、および、Updated Lagrangian法の両者によるプログラミングを実施することで得られた要素解析例を併せて示す。

キーワード: 線形弾性体、構成式、多重せん断モデル、幾何学的非線形性、大変形解析

1. はじめに

本研究では、砂の力学モデルとしてのひずみ空間での多重せん断モデル (Iai & Ozutsumi, 2005) に基づき、新たな線形弾性体の構成式を提案する。ここで提案するモデルは、圧縮性を考慮した超弾性体の大変形解析理論 (Holzapfel, 2000) を参考にして、これに多重せん断機構を組み込んだ形で定式化がなされている。

大変形解析 (有限ひずみ解析) における定式化には、Total Lagrangian法 (以下、TL法) とUpdated Lagrangian法 (以下、UL法) の2種類が存在する (Bathe, 1996)。TL法においては、物質表示 (material description) における応力・ひずみ系を用いることで、大変形解析における運動方程式に代表される基本方程式、および、その解法を規定する。一方、UL法においては、空間表示 (spatial description) における応力・ひずみ系を用い、基本方程式、および、その解法が導かれる。なお、ここでいう基本方程式の解法とは、有限要素法による数値解析に必要な基本方程式の離散化、および、離散化された方程式を未知数 (ここでは節点変位) に関して解く一連の過程のことである。

以下では、まず多重せん断モデルに基づく線形弾性体構成式の定式化について述べる。その後、TL法、

および、UL法の両者による基本方程式の解法を述べた上で、本研究で提案する多重せん断型の線形弾性体モデルにより得られた要素解析例を示す。

2. 多重せん断モデル型線形弾性体の定式化

2.1 微小変形解析での線形弾性体

まず、微小ひずみ理論を前提とした微小変形解析における線形弾性体の構成式を考える。2次元平面ひずみ条件下での線形弾性体の剛性マトリクスは、以下のとおり与えられる。

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1)$$

ここに、 E はヤング率、 ν はポアソン比である。式(1)を体積成分とせん断成分とに分解すると、以下のようになる。

$$\mathbf{D} = K \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここに、 K は体積弾性係数、 G はせん断弾性係数であり、ヤング率、および、ポアソン比との間に以下の関係がある。

$$K = \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4)$$

よって、線形弾性体における応力-ひずみ関係は、以下のとおり書ける。

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = -p\mathbf{n}^{(0)} + \sum_{i=1}^2 q^{(i)}\mathbf{n}^{(i)} \quad (5)$$

ここに、

$$\boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12}] \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad 2\varepsilon_{12}] \quad (7)$$

$$\mathbf{n}^{(0)T} = [1 \quad 1 \quad 0] \quad (8)$$

$$\mathbf{n}^{(1)T} = [1 \quad -1 \quad 0] \quad (9)$$

$$\mathbf{n}^{(2)T} = [0 \quad 0 \quad 1] \quad (10)$$

$$p = -K\varepsilon \quad (11)$$

$$q^{(i)} = G\gamma^{(i)} \quad (\text{for } i=1, 2) \quad (12)$$

である。式(11),(12)における体積ひずみ、せん断ひずみは以下で与えられる。

$$\varepsilon = \mathbf{n}^{(0)T}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (13)$$

$$\gamma^{(i)} = \mathbf{n}^{(i)T}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{for } i=1, 2) \quad (14)$$

式(5)と同様に、応力増分-ひずみ増分の関係は、以下

のとおりに書くことができる。

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (15)$$

ここに、接線剛性マトリクスは以下で与えられる。

$$\mathbf{D} = K\mathbf{n}^{(0)}\mathbf{n}^{(0)T} + \sum_{i=1}^2 G\mathbf{n}^{(i)}\mathbf{n}^{(i)T} \quad (16)$$

以上より、微小変形解析における線形弾性体は、体積弾性係数、および、せん断弾性係数が定数で与えられる、ばねが2本の多重せん断モデル (Iai et al., 1992) であると解釈することができる。

2.2 物質表示での多重せん断モデル型線形弾性体

前章で示した微小変形解析における線形弾性体の構成式を、そのまま大変形解析において用いることも可能である。つまり、物質表示における応力とひずみとの間に式(15)の関係を仮定し、その構成関係をTL法による大変形解析に導入する。UL法の場合は、空間表示における構成式として式(15)の関係をそのまま用いればよい。なお、前者は一般にSaint-Venant Kirchhoffモデルと呼ばれている (Holzapfel, 2000)。これらの結果は、後述するFig. 1 (および, Bathe(1996)のSection 6.6.1におけるFig6.8参照) に併せて示すように、一軸圧縮引張における変位荷重関係が、圧縮および引張が進展するにつれて両極端の傾向を示す。特に、TL法における圧縮側での荷重の減少傾向 (最終的にはゼロとなる) は、土木分野における材料ではあまり見受けられない。

そこで、大変形解析における線形弾性体モデルを表現する構成式として、多重せん断モデルの大変形解析における定式化 (井合ら, 2009) に準じた、以下のような定式化を提案する。

まず、物質表示においては、2次元平面ひずみ条件の場合、second Piola-Kirchhoff応力、Green-Lagrangeひずみベクトルを以下で与える。

$$\hat{\mathbf{S}}^T = \{S_{11} \quad S_{22} \quad S_{12}\} \quad (17)$$

$$\hat{\mathbf{E}}^T = \{E_{11} \quad E_{22} \quad 2E_{12}\} \quad (18)$$

これにより、線形弾性体モデルの積分形の基本形を以下で与える。

$$\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{S}}_p + \hat{\mathbf{S}}_q \quad (19)$$

$$\hat{\mathbf{S}}_p = -Jp\hat{\mathbf{C}}^{-1} \quad (20)$$

$$\hat{\mathbf{S}}_q = \sum_{i=1}^I q^{(i)} \left(\hat{\mathbf{N}}^{(i)} - \gamma^{(i)} \hat{\mathbf{C}}^{-1} \right) \Delta \omega \quad (21)$$

ここに,

$$\left\{ \hat{\mathbf{C}}^{-1} \right\}^T = \left\{ C_{11}^{-1} \quad C_{22}^{-1} \quad C_{12}^{-1} \right\} \quad (22)$$

$$\left\{ \hat{\mathbf{N}}^{(i)} \right\}^T = \left\{ \cos \omega_i \quad -\cos \omega_i \quad \sin \omega_i \right\} \quad (23)$$

(for $i=1, \dots, I$)

$$\omega_i = (i-1)\Delta\omega \quad (24)$$

$$\Delta\omega = \pi / I \quad (25)$$

なお、式(22)におけるベクトルの各成分は、right Cauchy-Greenテンソル $\mathbf{C}$ の逆テンソルを、ベクトル・マトリクス表示したものである。right Cauchy-Greenテンソルは、変形勾配 $\mathbf{F}$ との間に以下のような関係がある。

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (26)$$

また、式(21)や式(23)などにおける I は、多重せん断モデルにおける1/2円当たりのばね本数である。

さて、大変形解析における体積ひずみは、Jacobian determinant J から以下のとおり与える。

$$\varepsilon = \ln J \quad (27)$$

ここに、Jacobian determinant J は、変形勾配 $\mathbf{F}$ より以下で与えられる。

$$J = \det \mathbf{F} \quad (28)$$

また、多重せん断モデルにおける仮想単純せん断ひずみ成分は、以下のとおり与えられる。

$$\gamma^{(i)} = \left\{ \hat{\mathbf{N}}^{(i)} \right\}^T \hat{\mathbf{E}} \quad (\text{for } i=1, \dots, I) \quad (29)$$

線形弾性体としての積分形の構成式は、式(27)および式(29)のひずみ成分と、式(20)および式(21)における等方圧力、仮想単純せん断応力成分との関係を、以

下に示す線形関係で与えることにより定式化する。

$$p = -K\varepsilon \quad (30)$$

$$q^{(i)} = G_v \gamma^{(i)} \quad (\text{for } i=1, \dots, I) \quad (31)$$

ここに,

$$G_v = \frac{G}{\sum_{i=1}^I \sin^2 \omega_i \Delta \omega} \approx \frac{G}{\pi / 2} \quad (32)$$

これらの増分形の構成式は、式(19)の両辺の物質時間微分をとることにより、以下のとおり与えられる。

$$d\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{D} d\hat{\mathbf{E}} \quad (33)$$

ここに,

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_p + \mathbf{D}_q \quad (34)$$

井合ら（2009）に準じて、体積成分の接線剛性マトリクスは以下で与えられる。

$$\mathbf{D}_p = \mathbf{D}_{p1} + \mathbf{D}_{p2} \quad (35)$$

$$\mathbf{D}_{p1} = J(K-p)\hat{\mathbf{C}}^{-1} \left\{ \hat{\mathbf{C}}^{-1} \right\}^T \quad (36)$$

$$\mathbf{D}_{p2} = 2Jp \left\{ \hat{\mathbf{C}}^{-1} \odot \hat{\mathbf{C}}^{-1} \right\} \quad (37)$$

また、偏差成分の接線剛性マトリクスは以下で与えられる。

$$\mathbf{D}_q = \mathbf{D}_{q1} + \mathbf{D}_{q2} \quad (38)$$

$$\mathbf{D}_{q1} = \sum_{i=1}^I \left(\hat{\mathbf{N}}^{(i)} - \gamma^{(i)} \hat{\mathbf{C}}^{-1} \right) \left(G_v \hat{\mathbf{N}}^{(i)} + q^{(i)} \hat{\mathbf{C}}^{-1} \right)^T \Delta \omega \quad (39)$$

$$\mathbf{D}_{q2} = \sum_{i=1}^I 2q^{(i)} \gamma^{(i)} \Delta \omega \left(\left\{ \hat{\mathbf{C}}^{-1} \odot \hat{\mathbf{C}}^{-1} \right\} - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{C}}^{-1} \left(\hat{\mathbf{C}}^{-1} \right)^T \right) - \left(\hat{\mathbf{C}}^{-1} \left(\hat{\mathbf{S}}_q \right)^T + \hat{\mathbf{S}}_q \left(\hat{\mathbf{C}}^{-1} \right)^T \right) \quad (40)$$

ここに,

$$\begin{aligned} & \{\hat{\mathbf{C}}^{-1} \odot \hat{\mathbf{C}}^{-1}\} \\ &= \begin{bmatrix} (C_{11}^{-1})^2 & (C_{12}^{-1})^2 & C_{11}^{-1}C_{12}^{-1} \\ (C_{12}^{-1})^2 & (C_{22}^{-1})^2 & C_{12}^{-1}C_{22}^{-1} \\ C_{11}^{-1}C_{12}^{-1} & C_{12}^{-1}C_{22}^{-1} & \frac{1}{2}C_{11}^{-1}C_{22}^{-1} + \frac{1}{2}(C_{12}^{-1})^2 \end{bmatrix} \quad (41) \end{aligned}$$

2.3 空間表示での多重せん断モデル型線形弾性体

前章と同様にして, 空間表示における多重せん断モデル型線形弾性体の定式化は, 以下のとおりとなる。

空間表示の大変形解析において, 2次元解析の場合, Cauchy応力, および, Euler-Almansiひずみベクトルを以下で与える。

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^T = \{\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12}\} \quad (42)$$

$$\hat{\mathbf{e}}^T = \{e_{11} \quad e_{22} \quad 2e_{12}\} \quad (43)$$

これらを用いて, 多重せん断モデルの積分形を以下で与える。

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_p + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_q \quad (44)$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_p = -p\hat{\mathbf{n}}^{(0)} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_q &= J^{-1} \sum_{i=1}^I q^{(i)} (\hat{\mathbf{n}}^{(i)} - \gamma^{(i)} \hat{\mathbf{n}}^{(0)}) \Delta\omega \\ &\quad (\text{for } i=1, \dots, I) \end{aligned} \quad (46)$$

ここに,

$$\hat{\mathbf{n}}^{(0)T} = \{1 \quad 1 \quad 0\} \quad (47)$$

また, 物質表示における仮想単純せん断を表す方向ベクトルの成分を, 一度, 以下のようにテンソル表示に戻しておく。

$$\langle \mathbf{T}^{(i)} \otimes \mathbf{N}^{(i)} \rangle = \begin{bmatrix} \cos \omega_i & \sin \omega_i \\ \sin \omega_i & -\cos \omega_i \end{bmatrix} \quad (48)$$

式(48)をpush-forwardさせることで, 空間表示におけるテンソルを以下のように求める (Holzapfel, 2000)。

$$\langle \mathbf{t}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} \rangle = \mathbf{F} \langle \mathbf{T}^{(i)} \otimes \mathbf{N}^{(i)} \rangle \mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} n_{11}^{(i)} & n_{12}^{(i)} \\ n_{21}^{(i)} & n_{22}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (49)$$

これらの成分を用いて, 空間表示における仮想単純せん断の方向ベクトルを, 以下で与える。

$$\{\hat{\mathbf{n}}^{(i)}\}^T = \{n_{11}^{(i)} \quad n_{22}^{(i)} \quad n_{12}^{(i)}\} \quad (\text{for } i=1, \dots, I) \quad (50)$$

さて, 大変形解析における体積ひずみは, TL法の場合と同様に, 式(27)で与えられる。また, 仮想単純せん断ひずみは, 以下で与えられる。

$$\begin{aligned} \gamma^{(i)} &= \{\hat{\mathbf{n}}^{(i)}\}^T \hat{\mathbf{e}} = \langle \mathbf{t}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} \rangle : \mathbf{e} \\ &= \mathbf{F} \langle \mathbf{T}^{(i)} \otimes \mathbf{N}^{(i)} \rangle \mathbf{F}^T : \mathbf{e} \\ &= \langle \mathbf{T}^{(i)} \otimes \mathbf{N}^{(i)} \rangle : \mathbf{F}^T \mathbf{e} \mathbf{F} \\ &= \langle \mathbf{T}^{(i)} \otimes \mathbf{N}^{(i)} \rangle : \mathbf{E} \\ &= \{\hat{\mathbf{N}}^{(i)}\}^T \hat{\mathbf{E}} \quad (\text{for } i=1, \dots, I) \end{aligned} \quad (51)$$

以上のとおり, 仮想単純せん断ひずみは, 物質表示, および, 空間表示のいずれの場合も等しくなる。

空間表示での線形弾性体の積分形の構成式は, これらのひずみ成分と, 式(45)(46)における等方圧力, 仮想単純せん断応力成分との関係を, 物質表示の場合と同様に, 式(30)および式(31)に示す線形関係で与えることにより定式化する。

空間表示での増分形の構成式は, Holzapfel (2000)により, Kirchhoff応力 $\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}$ のLie時間微分として与えられるOldroyd stress rate $\text{Oldr}(J\boldsymbol{\sigma})$, および, deformation rate $\mathbf{d} = \text{sym}(\text{grad}\dot{\mathbf{u}})$ を用いて, 以下のとおり与えられる。

$$\text{Oldr}(J\boldsymbol{\sigma}) = J\mathbb{C} : \mathbf{d} \quad (52)$$

式(52)をベクトル・マトリクス形式で表わすと, 以下のような増分形構成式が得られる。

$$\text{Oldr}(J\boldsymbol{\sigma}) = J\mathbf{D}\hat{\mathbf{d}} \quad (53)$$

ここに,

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_p + \mathbf{D}_q \quad (54)$$

井合ら (2009) に準じて, 体積成分の接線剛性マトリクスは以下で与えられる。

$$\mathbf{D}_p = \mathbf{D}_{p1} + \mathbf{D}_{p2} \quad (55)$$

$$\mathbf{D}_{p1} = (K - p)\hat{\mathbf{n}}^{(0)}\mathbf{n}^{(0)\text{T}} \quad (56)$$

$$\mathbf{D}_{p2} = 2p\mathbf{I} \quad (57)$$

また, 偏差成分の接線剛性マトリクスは以下で与えられる。

$$\mathbf{D}_q = \mathbf{D}_{q1} + \mathbf{D}_{q2} \quad (58)$$

$$\mathbf{D}_{q1} = J^{-1} \sum_{i=1}^I (\hat{\mathbf{n}}^{(i)} - \gamma^{(i)} \hat{\mathbf{n}}^{(0)}) (G_v \hat{\mathbf{n}}^{(i)} + q^{(i)} \hat{\mathbf{n}}^{(0)})^{\text{T}} \Delta\omega \quad (59)$$

$$\mathbf{D}_{q2} = \left(\sum_{i=1}^I 2q^{(i)} \gamma^{(i)} \Delta\omega \right) \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{n}}^{(0)} \hat{\mathbf{n}}^{(0)\text{T}} \right) - (\hat{\mathbf{n}}^{(0)} \boldsymbol{\sigma}_q^{\text{T}} + \boldsymbol{\sigma}_q \hat{\mathbf{n}}^{(0)\text{T}}) \quad (60)$$

ここに,

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (61)$$

である。

3. 大変形解析における基本方程式の定式化

3.1 Total Lagrangian法における基本方程式

物質表示における弾性体の運動方程式は, 第1 Piola-Kirchhoff応力 $\mathbf{P}$ を用いて, 以下のとおり表せる (Holzapfel, 2000)。

$$\text{Div} \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) + \rho_0(\mathbf{X}) \mathbf{g}(\mathbf{X}) = \rho_0(\mathbf{X}) \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) \quad (62)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) \quad \text{on } \partial\Omega_{0u} \quad (63)$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) \mathbf{N} = \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t) \quad \text{on } \partial\Omega_{0\sigma} \quad (64)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{X}) \quad (65)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, 0) = \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{X}) \quad (66)$$

式(63)および式(64)は, 変位および応力の境界条件, 式(65)(66)は初期条件である。なお, 第1 Piola-Kirchhoff応力 $\mathbf{P}$ は, 空間表示で用いるCauchy応力 $\boldsymbol{\sigma}$ により以下で与えられる。

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-\text{T}} \quad (67)$$

ここに, J はJacobian determinant, $\mathbf{F}$ は変形勾配であり, 互いに式(28)の関係にある。

式(62)に示す運動方程式は, 仮想仕事の原理により, 第2 Piola-Kirchhoff応力 $\mathbf{S}$, および, Green-Lagrange ひずみ $\mathbf{E}$ を用いて, 以下のとおり書き表せる。

$$\int_{\Omega_0} [\mathbf{S} : \delta \mathbf{E} - (\rho_0 \mathbf{g} - \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u}] dV - \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \bar{\mathbf{T}} \cdot \delta \mathbf{u} dS = 0 \quad (68)$$

なお, 第2 Piola-Kirchhoff応力 $\mathbf{S}$ は以下で与えられる。

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} = J\mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-\text{T}} \quad (69)$$

次に, 式(68)における変位を, 補間関数 $\mathbf{H}$ と節点変位 $\underline{\mathbf{u}}$ を用いて以下のとおり離散化する。

$$\mathbf{u} = \mathbf{H} \underline{\mathbf{u}} \quad (70)$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{H} \ddot{\underline{\mathbf{u}}} \quad (71)$$

$$\mathbf{g} = -\mathbf{H} \mathbf{g} \mathbf{L}_v \quad (72)$$

ここに, $\mathbf{g}$ は重力加速度, また, 2次元の場合,

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 & \cdots & h_N & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & h_2 & \cdots & 0 & h_N \end{bmatrix} \quad (73)$$

$$\underline{\mathbf{u}}^T = [u_1^1 \quad u_2^1 \quad u_1^2 \quad u_2^2 \quad \cdots \quad u_1^N \quad u_2^N] \quad (74)$$

$$\mathbf{I}_v^T = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \quad (75)$$

と表せる。すると、運動方程式は以下のとおり離散化される。

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{B}_L^T \hat{\mathbf{S}} dV + \mathbf{M}(g\mathbf{I}_v + \ddot{\mathbf{u}}) - \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{T}} dS = 0 \quad (76)$$

ここに、

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{H}^T \mathbf{H} dV \quad (77)$$

また、2次元解析におけるBマトリクスは、変位勾配

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} u_1^k & \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} u_1^k \\ \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} u_2^k & \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} u_2^k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (78)$$

を用いて以下のように表せる。

$$\mathbf{B}_L = \mathbf{B}_{L0} + \mathbf{B}_{L1} \quad (79)$$

$$\mathbf{B}_{L0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial X_1} & 0 & \cdots & \frac{\partial h_N}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial X_2} & \cdots & 0 & \frac{\partial h_N}{\partial X_2} \\ \frac{\partial h_1}{\partial X_2} & \frac{\partial h_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial h_N}{\partial X_2} & \frac{\partial h_N}{\partial X_1} \end{bmatrix} \quad (80)$$

$$\mathbf{B}_{L1} = \begin{bmatrix} L_{11} \frac{\partial h_1}{\partial X_1} & L_{21} \frac{\partial h_1}{\partial X_1} \\ L_{12} \frac{\partial h_1}{\partial X_2} & L_{22} \frac{\partial h_1}{\partial X_2} \\ L_{11} \frac{\partial h_1}{\partial X_2} + L_{12} \frac{\partial h_1}{\partial X_1} & L_{21} \frac{\partial h_1}{\partial X_2} + L_{22} \frac{\partial h_1}{\partial X_1} \\ \cdots & L_{11} \frac{\partial h_N}{\partial X_1} & L_{21} \frac{\partial h_N}{\partial X_1} \\ \cdots & L_{12} \frac{\partial h_N}{\partial X_2} & L_{22} \frac{\partial h_N}{\partial X_2} \\ \cdots & L_{11} \frac{\partial h_N}{\partial X_2} + L_{12} \frac{\partial h_N}{\partial X_1} & L_{21} \frac{\partial h_N}{\partial X_2} + L_{22} \frac{\partial h_N}{\partial X_1} \end{bmatrix} \quad (81)$$

なお、式(68)から式(76)へと離散化する過程において、第2 Piola-Kirchhoff応力の対称性により、以下に示すテンソル形式からベクトル・マトリクス形式への変換を用いた。

$$\begin{aligned} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} &= \mathbf{S} : \text{sym}(\mathbf{F}^T \text{Grad} \delta \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{S} : \mathbf{F}^T \text{Grad}(H \delta \underline{\mathbf{u}}) \\ &= \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} : \left(\begin{bmatrix} L_{11} + 1 & L_{21} \\ L_{12} & L_{22} + 1 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \delta u_1^k & \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \delta u_1^k \\ \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \delta u_2^k & \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \delta u_2^k \end{bmatrix} \right) \\ &= \left(\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \delta u_1^k \\ \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \delta u_2^k \\ \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \delta u_1^k + \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \delta u_2^k \end{bmatrix} \right)^T \\ &\quad + \left(\begin{bmatrix} L_{11} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \delta u_1^k + L_{21} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \delta u_2^k \\ L_{12} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \delta u_1^k + L_{22} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \delta u_2^k \\ L_{11} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \delta u_1^k + L_{21} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_2} \delta u_2^k \\ + L_{12} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \delta u_1^k + L_{22} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial X_1} \delta u_2^k \end{bmatrix} \right)^T \hat{\mathbf{S}} \\ &= (\delta \underline{\mathbf{u}})^T \mathbf{B}_L^T \hat{\mathbf{S}} \end{aligned} \quad (82)$$

また、大変形解析における物質表示のひずみ (Green-Lagrangeひずみ) ベクトルは、

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} L_{11}+1 & L_{21} \\ L_{12} & L_{22}+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11}+1 & L_{12} \\ L_{21} & L_{22}+1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12}+L_{21} \\ \text{sym} & L_{22} \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(L_{11}^2+L_{21}^2) & L_{11}L_{12}+L_{21}L_{22} \\ \text{sym} & \frac{1}{2}(L_{12}^2+L_{22}^2) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (83)$$

により、以下のように表せる。

$$\hat{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \end{bmatrix} = \left(\mathbf{B}_{L0} + \frac{1}{2}\mathbf{B}_{L1} \right) \underline{\mathbf{u}} \quad (84)$$

なお、式(80)に示す $\mathbf{B}$ マトリクスは、微小変形解析の場合と同じであり、物体の変形により更新する必要はないが、式(81)に示す $\mathbf{B}$ マトリクスは、変位 (勾配) の変化に応じて更新する必要がある。

3.2 Total Lagrangian法による解法

まず、前章において離散化された運動方程式 (式(76)) を、以下のとおり書き直しておく。

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{B}_L^T \hat{\mathbf{S}} dV + \mathbf{M} \ddot{\underline{\mathbf{u}}} = \mathfrak{R} \quad (85)$$

$$\mathfrak{R} = -\mathbf{M} \mathbf{g} \underline{\mathbf{L}}_v + \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{T}} dS \quad (86)$$

これを、いくつかのステップに分け、段階的に荷重を増加させて解くものとする。第 n 荷重ステップまでの解が得られているものとし、第 $n+1$ 荷重ステップにおける解を求めることを考える。

第 $n+1$ ステップにおいては、次式が成立する。

$$\int_{\Omega_0} (\mathbf{B}_L^T)_{n+1} \hat{\mathbf{S}}_{n+1} dV + \mathbf{M} \ddot{\underline{\mathbf{u}}}_{n+1} = \mathfrak{R}_{n+1} \quad (87)$$

節点変位ベクトル $\underline{\mathbf{u}}_{n+1}$ 、および、これに対するひずみ $\hat{\mathbf{E}}_{n+1}$ から求めた応力 $\hat{\mathbf{S}}_{n+1}$ の第 i 回目の試行値を、それぞれ $\underline{\mathbf{u}}_{n+1}^i$ 、 $\hat{\mathbf{S}}_{n+1}^i$ と書くことにする。また、第 i 回目の試行値に应ずる不平衡力を Φ_{n+1}^i とすると、これは以下のように求められる。

$$\begin{aligned}\Phi_{n+1}^i &= - \int_{\Omega_0} (\mathbf{B}_L^T)_{n+1}^i \hat{\mathbf{S}}_{n+1}^i dV - \mathbf{M} \ddot{\underline{\mathbf{u}}}_{n+1}^i + \mathfrak{R}_{n+1} \\ &= \Psi_{n+1}^i + \chi_{n+1}^i\end{aligned}\quad (88)$$

$$\mathfrak{R}_{n+1} = -\mathbf{M} \mathbf{g}_{n+1} \underline{\mathbf{L}}_v + \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{T}}_{n+1} dS \quad (89)$$

ここに、式(88)における慣性項は、Newmark法やSSpj法などの各種時間積分法 (Zienkiewicz, 2000) により、節点変位を用いて表すことができる。この項は、大変形解析特有のものではなく、微小変形解析における慣性項と等しくなるので、ここでは慣性項を省略し、以下のように簡略化して書くこととする。

$$\Psi_{n+1}^i = - \int_{\Omega_0} (\mathbf{B}_L^T)_{n+1}^i \hat{\mathbf{S}}_{n+1}^i dV + \mathfrak{R}_{n+1} \quad (90)$$

$$\chi_{n+1}^i = 0 \quad (91)$$

なお、動的解析では慣性項の影響を考慮する必要があり、その場合は、後に示す式(99)の左辺に対して、変位増分形で表わした慣性項を付加してあげればよい。

第 $i+1$ 回目の試行値を、

$$\underline{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1} = \underline{\mathbf{u}}_{n+1}^i + \Delta \underline{\mathbf{u}}_{n+1}^i \quad (92)$$

により求めるとすれば、第 $i+1$ 回目の試行値に应ずる不平衡力は、次式で近似することができる。

$$\Phi_{n+1}^{i+1} = \Psi_{n+1}^i + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right)_{n+1}^i \Delta \underline{\mathbf{u}}_{n+1}^i \quad (93)$$

ここに、

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right)_{n+1}^i = -(\mathbf{K}_L)_{n+1}^i - (\mathbf{K}_{NL})_{n+1}^i \quad (94)$$

$$(\mathbf{K}_L)_{n+1}^i = \int_{\Omega_0} (\mathbf{B}_L^T)_{n+1}^i \mathbf{D}_{n+1}^i (\mathbf{B}_L)_{n+1}^i dV \quad (95)$$

$$(\mathbf{K}_{NL})_{n+1}^i = \int_{\Omega_0} \mathbf{B}_{NL}^T \mathbf{S}_{n+1}^i \mathbf{B}_{NL} dV \quad (96)$$

ここに、 $\mathbf{D}$ は弾性体の物質表示における接線剛性（多重せん断モデル型線形弾性体の場合、式(34)），また、大変形解析で現れる非線形項（式(96)）を表す $\mathbf{B}$ マトリクス $\mathbf{B}_{NL}$ および応力 $\mathbf{S}$ は、以下で与えられる。

$$\mathbf{B}_{NL} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial X_1} & 0 & \dots & \frac{\partial h_N}{\partial X_1} & 0 \\ \frac{\partial h_1}{\partial X_2} & 0 & \dots & \frac{\partial h_N}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial X_1} & \dots & 0 & \frac{\partial h_N}{\partial X_1} \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial X_2} & \dots & 0 & \frac{\partial h_N}{\partial X_2} \end{bmatrix} \quad (97)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{11} & S_{12} \\ 0 & 0 & S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad (98)$$

最終的に、Newton法などを用いて、次式により節点変位増分を求めていけばよい。

$$\left[(\mathbf{K}_L)_{n+1}^i + (\mathbf{K}_{NL})_{n+1}^i \right] \Delta \underline{\mathbf{u}}_{n+1}^i = \Psi_{n+1}^i \quad (99)$$

3.3 Updated Lagrangian法における基本方程式

空間表示における弾性体の運動方程式は、Cauchy 応力 $\boldsymbol{\sigma}$ を用いて、以下のとおり表せる（Holzapfel, 2000）。

$$\text{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t) \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad (100)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad \text{on } \partial\Omega_u \quad (101)$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t) \quad \text{on } \partial\Omega_\sigma \quad (102)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{X}) \quad (103)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{X}) \quad (104)$$

式(101)および式(102)は、変位および応力の境界条件、式(103)(104)は初期条件である。ここに、密度 ρ は、式(28)に示す Jacobian determinant を用い、以下で与えられる。

$$\rho(\mathbf{x}, t) = J^{-1} \rho_0 \quad (105)$$

さて、式(100)の運動方程式は、仮想仕事の原理により以下のとおり書ける。

$$\int_{\Omega} [\boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{e} - (\rho \mathbf{g} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u}] dv - \int_{\partial\Omega_\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} ds = 0 \quad (106)$$

次に、変位および重力加速度ベクトルを、補間関数 $\mathbf{H}$ と節点変位 $\underline{\mathbf{u}}$ を用いて、式(70)～(72)のとおりに離散化する。すると、運動方程式は以下のとおり離散化される。

$$\int_{\Omega} \mathbf{b}_L^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dv + \mathbf{M}(g \mathbf{I}_v + \ddot{\underline{\mathbf{u}}}) - \int_{\partial\Omega_\sigma} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{t}} ds = 0 \quad (107)$$

ここに、

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} dv = \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{H}^T \mathbf{H} dV \quad (108)$$

である。これからわかるとおり、質量マトリクスに関しては、UL法での空間表示と、TL法での物質表示との双方において等しくなり、座標の更新にあわせて時間毎に更新する必要はない。

境界応力については、面積分を変形後の面積にあわせて更新するのが適切なものと、面積分を変形前の面積で行っておけばよいものがある。前者の例として水中構造物に作用する水圧、後者の例としては圧密促進のための盛土荷重が挙げられる。ここでは、Bathe (1996) にならい、後者により定式化を行うこととする。すなわち、

$$\int_{\partial\Omega_\sigma} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{t}} d\mathbf{s} = \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{T}} d\mathbf{S} \quad (109)$$

また、2次元解析の場合、 $\mathbf{B}$ マトリクスは以下のようになる。

$$\mathbf{b}_L = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & 0 & \dots & \frac{\partial h_N}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \dots & 0 & \frac{\partial h_N}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_N}{\partial x_2} & \frac{\partial h_N}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (110)$$

大変形解析における空間表示のEuler Almansiひずみは、変位勾配

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_1} u_1^k & \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_2} u_1^k \\ \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_1} u_2^k & \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial x_2} u_2^k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (111)$$

を用いて、以下のよう求める。

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1-l_{11} & -l_{21} \\ -l_{12} & 1-l_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-l_{11} & -l_{12} \\ -l_{21} & 1-l_{22} \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} l_{11} & \frac{1}{2}(l_{12} + l_{21}) \\ \text{sym} & l_{22} \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(l_{11}^2 + l_{21}^2) & \frac{1}{2}(l_{11}l_{12} + l_{21}l_{22}) \\ \text{sym} & \frac{1}{2}(l_{12}^2 + l_{22}^2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (112)$$

これを、ベクトル・マトリクス形式で表わすと以下のように、Euler Almansiひずみベクトルが得られる。

$$\hat{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ 2e_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{b}_L \underline{\mathbf{u}} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(l_{11}^2 + l_{21}^2) \\ \frac{1}{2}(l_{12}^2 + l_{22}^2) \\ l_{11}l_{12} + l_{21}l_{22} \end{bmatrix} \quad (113)$$

3.4 Updated Lagrangian法による解法

TL法の場合と同様に、離散化された運動方程式(式(107))を、以下のように書き直しておく。

$$\int_{\Omega} \mathbf{b}_L^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} d\mathbf{v} + \mathbf{M} \ddot{\underline{\mathbf{u}}} = \mathfrak{R} \quad (114)$$

$$\mathfrak{R} = -\mathbf{M} \mathbf{g} \underline{\mathbf{L}} + \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{T}} d\mathbf{S} \quad (115)$$

これをいくつかのステップに分け、段階的に荷重を増加させて解くわけであるが、 $\mathbf{B}$ マトリクスおよび応力表記（空間表示もしくは物質表示）の違いを除けば、式の解法そのものはTL法の場合と同じである。3.2章における各式は、UL法では以下のように表される。

式(90)：

$$\boldsymbol{\phi}_{n+1}^i = - \int_{\Omega_{n+1}^i} (\mathbf{b}_L^T)_{n+1}^i \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^i d\mathbf{v}_{n+1}^i + \mathfrak{R}_{n+1} \quad (116)$$

式(95)：

$$(\mathbf{K}_L)_{n+1}^i = \int_{\Omega_{n+1}^i} (\mathbf{b}_L^T)_{n+1}^i \mathbf{c}_{n+1}^i (\mathbf{b}_L)_{n+1}^i d\mathbf{v}_{n+1}^i \quad (117)$$

式(96)：

$$(\mathbf{K}_{NL})_{n+1}^i = \int_{\Omega} (\mathbf{b}_{NL}^T)_{n+1}^i \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^i (\mathbf{b}_{NL})_{n+1}^i d\mathbf{v}_{n+1}^i \quad (118)$$

ここに、 $\mathbf{c}$ は弾性体の空間表示における接線剛性（多重せん断モデル型線形弾性体の場合、式(54))であり、4階のテンソル表記に書き直せば、物質表示における接線剛性 $\mathbf{D}$ （式(95)参照）との間に、変形勾配 $\mathbf{F}$ を通じて以下の関係がある。

$$C_{abcd} = J^{-1} F_{aA} F_{bB} F_{cC} F_{dD} D_{ABCD} \quad (119)$$

また、大変形解析で現れる非線形項（式(118)）を表

すBマトリクス $\mathbf{b}_{NL}$ および応力 $\boldsymbol{\sigma}$ は、以下で与えられる。

$$\mathbf{b}_{NL} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & 0 & \cdots & \frac{\partial h_N}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & 0 & \cdots & \frac{\partial h_N}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & 0 & \frac{\partial h_N}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \cdots & 0 & \frac{\partial h_N}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (120)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ 0 & 0 & \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \quad (121)$$

最終的に、Newton法などを用いて、式(99)により節点変位増分を求めていけばよい。

4. 適用例

以上の定式化に基づき、有限要素法による要素解析を実施した。以下にその結果を示す。

Fig. 1は、1要素モデル (2cm×2cm) の1軸圧縮引張りにおける変位-荷重関係である。同図には、物質表示における2nd Piola-Kirchhoff応力とGreen-Lagrangeひずみ、および、空間表示におけるCauchy応力とEuler-Almansiひずみとの間の構成関係として、微小変形解析における線形弾性体構成式をそのまま適用した結果 (以下、線形弾性型TL法、および、線形弾性型UL法と表記) も併せて示してある。なお、物性値は、Bathe (1996) の例題 (Section 6.6.1のFigure 6.8参照) と同様に、ヤング率 $E = 10^8 \text{ kPa}$ 、ポアソン比 $\nu = 0.30$ とした。

まず、線形弾性体TL法、および、線形弾性体UL法に関しては、幾何学的非線形を考慮することにより、微小変形解析における変位-荷重曲線とは大きく異なった形状となっている。線形弾性体TL法と線形弾性体UL法との挙動を比較すると、変位の増加 (もしくは減少) とともに、微小変形解析結果に対して両極端の傾向を示している。特に、線形弾性型TL法での引張り領域における荷重増加傾向、および、線形弾性体UP法での圧縮領域における荷重減少傾向は顕著である。また、線形弾性型TL法では、ある一定の圧縮変形が生じると、圧縮の進展とともに荷重の減少が生じ始め、最終的にはゼロに至ることがわかる。これらの挙動は、Bathe (1996) においても同

様に確認できるが、土木分野における材料でこのような傾向を示すものはあまり見受けられず、モデルとして非現実的な部分を有していると言わざるを得ない。実際に、Saint-Venant Kirchhoffモデル (ここで言うところの線形弾性型TL法に相当) などは、大ひずみが生じるような問題にはあまり適用されず、回転を伴う大変形微小ひずみ問題に対してよく使用されるようである。

一方、本稿で提案する多重せん断モデル型線形弾性体では、TL法およびUL法における変位-荷重関係が一致しており、線形弾性型で見られたような両極端の傾向は抑えられていることがわかる。なお、TL法とUL法の変位-荷重曲線が一致する要因は、いずれの解法においても、線形関係として式(30)(31)を採用していることによる。多重せん断モデル型線形弾性体では、引張り領域における変位-荷重関係は、微小変形解析のそれとほぼ等しい。他方、圧縮領域においては、微小変形解析結果と比較すると、圧縮の進展とともに荷重が増加する傾向にある。これは、ある物体を厚みゼロまで圧縮しようとする場合、それまでより大きな増分荷重が必要とされるということであり、現実的な挙動を示しているものと思われる。

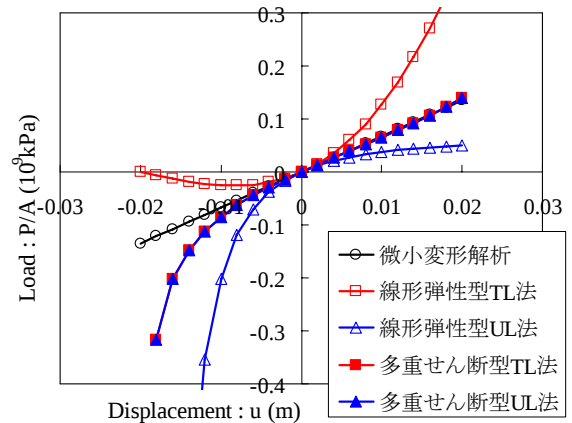


Fig. 1 Relationship between load and displacement under uniaxial compression/tensile analysis

次に、1軸圧縮引張りにおける応力-ひずみ関係を Fig. 2に示す。なお、同図における横軸は垂直ひずみであり、TL法の場合はGreen-Lagrangeひずみ、UL法の場合はEuler-Almansiひずみとなっている。一方、縦軸は垂直応力であり、TL法の場合は2nd Piola-Kirchhoff応力、UL法の場合はCauchy応力で表わされている。

微小変形解析における線形弾性体構成式をそのまま用いた大変形解析では、TL法およびUL法の双方において、応力-ひずみ関係は線形となり、微小変形解析でのラインに重なっている。

一方、多重せん断モデル型では、応力-ひずみ関係は曲線で表わされ、TL法とUL法とでその形状が異なったものとなっている。これは、先にも述べたとおり、多重せん断モデル型では式(30)(31)で線形関係を規定しており、2nd Piola-Kirchhoff応力（もしくはCauchy応力）とGreen-Lagrangeひずみ（もしくはEuler-Almansiひずみ）との間に線形関係を課しているわけではないことに起因する。

1軸圧縮引張りにおける応力-ひずみ関係を、すべてのケースに関して、空間表示におけるCauchy応力、および、Euler-Almansiひずみで整理しなおしたものがFig. 3である。TL法に関しては、Fig. 2に示す物質表示での応力、ひずみを、以下のようにpush-forwardさせることで、空間表示における関係が得られる。

$$\mathbf{e} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{E} \mathbf{F}^{-1} \quad (122)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T \quad (123)$$

Fig. 3では、参考として微小変形解析における応力-ひずみ関係も併記してある。本来、微小変形解析での応力およびひずみは、空間表示におけるCauchy応力、および、Euler-Almansiひずみとは異なるものであるが、ここではそれらが等しいと仮定することで、同じグラフ上に載せている。

すべて空間表示で表わした場合、Fig. 3より、線形弾性型TL法とUL法とにおける応力-ひずみ関係は相異なるものとなる。一方、多重せん断モデル型線形弾性体に関しては、同じ定義の応力およびひずみにより整理すれば、応力-ひずみ曲線はTL法とUL法とで等しくなる。すなわち、多重せん断モデル型線形弾性体を用いる場合、TL法もしくはUL法のどちらの解法を選択しても本質的な違いはない。

5. 結論

本研究では、砂の力学モデルとしてのひずみ空間での多重せん断モデルに基づき、新たな線形弾性体の構成式を提案した。本モデルを大変形解析（有限ひずみ解析）に導入するにあたり、Total Lagrangian法、および、Updated Lagrangian法の両者により定式化を行った。さらに、それらの定式化に基づき要素解析を実施した。その結果、微小変形解析での線形弾性体構成式を大変形解析においてそのまま用いた場合と比較して、1軸圧縮引張りでの変位-荷重関係がより現実的なものとなることがわかった。

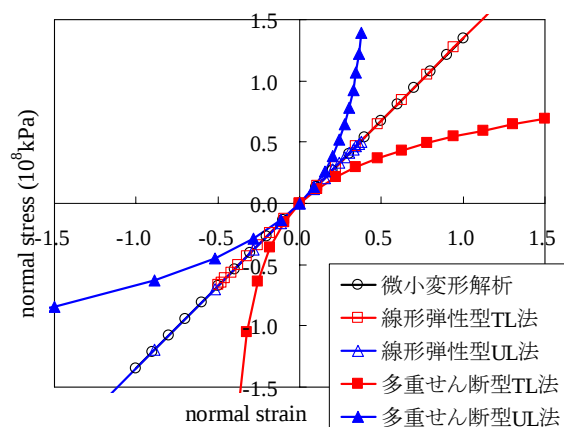


Fig. 2 Relationship between normal stress and normal strain under uniaxial compression/tensile analysis

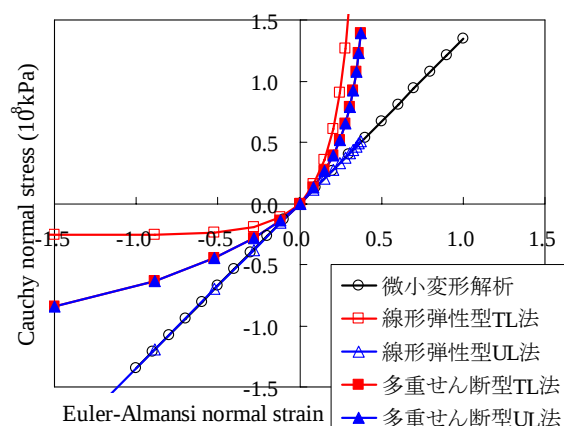


Fig. 3 Relationship between Cauchy normal stress and Euler-Almansi normal strain under uniaxial compression/tensile analyses

参考文献

- 井合進，上田恭平，飛田哲男，小堤治（2009）：砂の力学モデルとしての多重せん断モデルの有限ひずみ（大変形）解析の定式化，京都大学防災研究所年報，第52号。
- 上田恭平，飛田哲男，井合進（2009）：大変形を考慮した多重せん断モデル型弾性体の定式化，平成20年度京都大学防災研究所研究発表講演会。
- 小堤治（2003）：液状化地盤上の地盤・構造物系の地震被害推定に関する数値解析法の研究，京都大学博士学位論文
- （社）日本機械学会（1986）：固体力学におけるコンピュータアナリシス，株式会社コロナ社。
- 吉田総仁（1997）：弾塑性力学の基礎，共立出版株式会社。
- Bathe, K.J. (1996) : Finite Element Procedures, Prentice Hall.

- Holzapfel, G.A. (2000) : Nonlinear Solid Mechanics, John Wiley & Sons.
- Iai, S., Matsunaga, Y. and Kameoka, T. (1992) : Strain space plasticity model for cyclic mobility, Soils and Foundation, 32(2), pp.1-15.
- Iai, S. and Ozutsumi, O. (2005) : Yield and cyclic behaviour of a strain space multiple mechanism model for granular materials, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 29(4), pp.211-240.
- Towhata, I. and Ishihara, K. (1985) : Modelling soil behaviour under principal stress axes rotation, In Proc. 5th Int. Conf. on Numerical Methods in Geomechanics, Balkema, pp.523-530.
- Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. and Zhu, J.Z. (2000) : The Finite Element Method : Its Basis and Fundamentals, Sixth edition, Elsevier.
- Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. (2000) : The Finite Element Method : For Solid and Structural Mechanics, Sixth edition, Elsevier.

Finite Strain Formulation of Elastic Body Based on Multiple Shear Mechanism

Kyohei UEDA*, Susumu IAI, Tetsuo TOBITA and Osamu OZUTSUMI**

* Graduate School of Engineering, Kyoto University

** Lecturer, Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University / Meisosha Co.

Synopsis

A new formulation of elastic body is proposed in order to consider the geometric nonlinearity due to large deformation and rotation. The formulation is based on the concept of the multiple shear mechanism and the relationship between the volumetric strain and the isotropic pressure is assumed to be linear and so is the relationship between the virtual simple shear strain and the virtual simple the shear stress. The constitutive model is introduced to a finite element program by the Total/Updated Lagrangian Formulation. Some examples simulated by the program are given to demonstrate the capability of the model.

Keywords: linear elastic body, constitutive equation, multiple shear mechanism, geometric nonlinearity, large deformation analysis