

ある準楕円型作用素の Gevrey 指数について

京大・理 大鍛治 隆司 (Takashi Ōkaji)

1. 序

X_j を $\mathbb{R}^n$ の領域 Ω で定義された実ベクトル場とし, L を次の形の作用素とする:

$$L = \sum_{j=1}^d X_j^2 + X_0$$

この時, $\{X_j\}_{j=0}^d$ が $x \in \Omega$ の各点で条件: ある r が存在して, X_j と r の長さ r までの commutator が $T_x(\Omega)$ を生成する; を満たせば L は C^∞ -準楕円型になることが知られている。([2])

我々は以下上の条件を仮定して, さらに L の Gevrey 族 $\mathcal{Y}^s$ における準楕円性及び出来ればその最小指数 (これを作用素の Gevrey 指数と呼ぶ) を求めることが目的である。

2. 結果

$I = (i_1, i_2, \dots, i_p)$ $1 \leq p < +\infty$ に対し $(i_j: \text{非負整数}, 0 \leq i_j \leq d)$

$$\langle I \rangle = \sum_{j=1}^p \varepsilon_j i_j \quad \varepsilon_j = 1 \text{ if } i_j \neq 0 \quad \varepsilon_j = 2 \text{ if } i_j = 0.$$

$$X_I = [X_{i_1}, [X_{i_2}, \dots [X_{i_{p-1}}, X_{i_p}]] \dots] \quad \text{if } p \geq 2, \quad X_I = X_{i_1} \quad \text{if } p=1.$$

$\mathcal{M} = \{ I \mid X_I \text{ が } T_x(\Omega) \text{ を生成する時の multi-index } I \text{ の集合} \}$

$$\bar{\Delta}_x(\mathcal{M}) = \sup_{I \in \mathcal{M}} \langle I \rangle, \quad \Delta_x(L) = \inf_{\mathcal{M}} \bar{\Delta}_x(\mathcal{M}) \quad \text{とおく.}$$

我々は簡単の為、 X_j の係数はすべて解析的とする。この時
まず最初に次の定理を得る。

定理 1 $s \geq \Delta_x(L)$ ならば、 L は点 x で γ^s -準楕円型である。即ち、ある x_0 の近傍 W が存在して、任意の $W' \subset W$ に対し、 $L u \in \gamma^s(W') \Rightarrow u \in \gamma^s(W')$ が成立する。

ここで現われた $\Delta_x(L)$ は、最小であるかという観点から見て optimal ではあるが、best possible ではないことが容易にわかる。しかし、一般の場合は複雑であるので、簡単な場合について考察すると、Gevrey 指数について次の 3 つの結果を得る。

定理 2 $a_j(x) \in \gamma^2$, $a_j(x) > 0$, $K_j \in \mathbb{N}$ に対し

$$L_1 = \sum_{j=1}^{n-1} D_j^2 + i \left(\sum_{j=1}^{n-1} x_j^{2K_j} a_j(x) \right) D_n, \quad D_j = \frac{1}{i} \partial_{x_j}$$

とする。この時、 L_1 の Gevrey 指数は 2 である。即ち、 $\forall s \geq 2$ に対し、 L_1 は γ^s -準楕円型（各点で）だが、 $1 \leq s < 2$ に対し、 γ^s -準楕円型でない。

定理 3 $K \leq 2$ を非負整数

$$L_2 = D_1^2 + x_1^{2K} D_2^2 + x_1^{2L} D_3^2 \quad \text{on } \mathbb{R}^3$$

とする. この時, 原点における L_2 の Gervey 指数は $\frac{L+1}{K+1}$ である.

定理 4

$$L_3 = \sum_{j=1}^{n-1} D_j^2 + i x_1 D_n$$

に対し, L_3 の原点における Gervey 指数は 2 である.

3. 十分性の証明の方針及び考え方.

i) 定理 1 は, 次の補題より従う.

補題 1 $P = \sum_{|\mu: \alpha| \leq m} C_\alpha X^\alpha$, $C_\alpha \in \gamma^s$, $|\mu: \alpha| = \frac{\alpha_1}{\mu_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{\mu_n}$

が次のアフロリオリ評価式をみたすと仮定する.

$$\sum_{|\mu: \alpha| \leq m} \|X^\alpha u\|_{\delta(m-|\mu: \alpha|)} \leq C (\|Pu\|_0 + \|u\|_0) \quad u \in C_0^\infty(\omega)$$

($\|\cdot\|_p$ は Sobolev ノルム) この時 P は $s \geq \delta^{-1}$ に対し γ^s -準楕円型である.

実際, [4] より, L に対して

$$\sum_{j=1}^d \|X_j^2 u\| + \|X_0 u\| + \|\langle D_x \rangle^{2/K} u\| \leq C (\|Pu\| + \|u\|)$$

$u \in C_0^\infty(\omega)$ が成り立つが, ω は x_0 の十分小さな近傍である. ($\|\cdot\| = \|\cdot\|_0$)

一方補題 1 は Morrey - Nirenberg の方法 [cf [1]] で示される.

ii) L_1 についても Morrey - Nirenberg の方法で示されるが, 出発点となる不等式は次のものである; Ω を原点の十分小さな近傍とした時, 任意の $u \in C_0^\infty(\Omega)$ に対し,

$$(1) \quad \sum_{j=1}^d \{ \|D_j^2 u\| + \|x_j^{2k_j} D_n u\| \} + \|u\| \leq C \|L_1 u\|$$

超局所的に考えれば, 一番問題となるのは, $(0, \xi_0)$ の近くである. $[\xi_0 = (0, 0, \dots, 0, 1)]$ 近くで, Γ_j ($j=1, 2$) を ξ_0 の錐近傍 $\Gamma_1 \ll \Gamma_2$ ω_j を $\mathbb{R}^n$ の原点の近傍 $\omega_1 \ll \omega_2$ とした時, 次の性質を持つ函数 $\Xi_N(\xi)$, $\varphi_N(x)$ を考える.

$$|D_\xi^{\alpha+\beta} \Xi_N(\xi)| \leq K_\beta d^{-|\beta|} (KN/d)^{s|\beta|} (1+|\xi|)^{-|\alpha|-|\beta|} \quad |\alpha| \leq N$$

$$\Xi_N(\xi) = 1 \quad \text{on } \Gamma_1 \cap \{|\xi| \geq N\}, \quad \text{supp } \Xi_N \subset \Gamma_2$$

$$(2) \quad |D_x^{\alpha+\beta} \varphi_N(x)| \leq C_\beta d^{-|\beta|} (CN/d)^{s|\beta|} \quad |\alpha| \leq N$$

$$\varphi_N(x) = 1 \quad \text{on } \omega_1, \quad \text{supp } \varphi_N \subset \omega_2$$

== ところで $d > 0$ は $\Gamma_1 \cap \{|\xi|=1\}^c$ と $\Gamma_2 \cap \{|\xi|=1\}^c$ 及び ω_1 と ω_2^c の距離である

== の時 χ^2 の wave front set について

$$(0, \xi_0) \notin WF_2(L_1 u) \Rightarrow (0, \xi_0) \notin WF_2(u)$$

が成り立つ. 即ち, ある原点の近傍 U が存在して,

$$\sup_U |D_x^\alpha \Xi_N(D) u(x)| \leq C_0 (CN)^{2K_1} \quad \text{if } |\alpha| \leq N$$

が成立する.

実際, $U_0 \supset \dots \supset U_{\frac{N}{2}} \supset U_{\frac{N+1}{2}} \supset \dots \supset U_1 = U$ と $\overline{U}_\varepsilon = \{x \in U; d(x, U^c) \geq \varepsilon\}$

$\leq \delta(1-\varepsilon)\}$ となる開集合, $\varphi_{N,k}$ として, (2)で $\omega_1 = \bigcup_{N-k}^{N-1}$, $\omega_2 = \bigcup_{N-k}^N$ としてものを取る時, (1)の ψ として,

$$\psi(x) = \varphi_{N,k} D_N^k \Xi_N(D) u \quad k = N, N-1, \dots$$

をとれば,

$$\begin{aligned} \|\varphi_{N,N} D_N^N \Xi_N(D) u\| &\leq C_0 \|L_1 \varphi_{N,N} D_N^N \Xi_N(D) u\| \\ &\leq C_0 \{ \| [L_1, \varphi_{N,N}] D_N^N \Xi_N(D) u \| + \|\varphi_{N,N} [L_1, \Xi_N] D_N^N u\| \\ &\quad + \|\varphi_{N,N} \Xi_N [L_1, D_N^N] u\| + \|\varphi_{N,N} D_N^N \Xi_N L_1 u\| \} \\ &\leq C_0 (CN)^2 \|L_1 \varphi_{N,N-1} D_N^{N-1} \Xi_N(D) u\| + C_0 (CN)^{2N} \\ &\quad \vdots \\ &\leq C' (C'N)^{2N} \end{aligned}$$

が得られる. ここで, L の形より, $x \notin \{x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0\}$ 又は $z \notin \{z_1 = \dots = z_{n-1} = 0\}$ では $(x, z) \notin WF_2(u)$ となることを用いた.

iii) L_2 については

$$\|u\| + \sum_{j=1}^3 \|D_j^2 u\| + \|\langle D_3 \rangle^{\frac{2}{2k}} u\| + \|\langle D_2 \rangle^{\frac{2}{2k}} u\| \leq C \|L_2 u\|$$

を出发点とする. ii) と同様にする. 結局, $\|x_1^{2k} D_2 D_3 v\|$ の項の処理が一番問題となる. $k \geq 2$.

$$\|ABCv\|^2 = (A^2 v, (BC)^2 v), \quad \|BCv\|^2 = (B^2 v, C^2 v)$$

$$\text{だから,} \quad \widehat{A} \widehat{B} \widehat{C} \leq \frac{\widehat{A}^p}{p} + \frac{\widehat{B}^q}{q} + \frac{\widehat{C}^r}{r} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1.$$

$$p=2, \quad q=\frac{2k}{k-1}, \quad r=\frac{2k}{2-k}, \quad \widehat{A} = x_1^k D_2 v, \quad \widehat{B} = (x_1^2 D_3)^{\frac{k}{2}} v, \quad \widehat{C} = (D_3^{\frac{1}{2k+1}})^{\frac{2-k}{2}} v$$

を用いれば,

$$\|D_3^N \Xi_N(D) u\|_{L^2(\omega)} \leq C_0 (CN) \|L \varphi_{N,N-1} D_3^{N-\frac{k+1}{2k}} \Xi_N(D) u\| + (\text{negligible terms})$$

となる。従ってこれより、 $N \sim D_3^{\frac{k+1}{2k+1}}$ だから、 $N^{\frac{2k+1}{k+1}} \sim D_3$
 故に、 $\|D_3^N \Phi_w(D) u\|_{L^2(w)} \leq C_0 (CN)^{\frac{2k+1}{k+1} N}$ を得る。

IV) L_3 の場合は、Parametrix を構成することによって示される。

$x_0=0$, $\xi_0=(0, \dots, 0, 1)$ の所が一番内題である。 $\chi = \tau$, phase

$\phi(x, y, \xi) = (x_n - y_n, \xi) + x_1 y_1 \xi_n$ を持つ Fourier integral operator

$$Fu = \int e^{i\phi(x, y, \xi)} u(y) dy d\xi$$

を考えることにより、 L_3 の代わりに、 $P = F^{-1} L F$:

$$P = D_1 + i \left(x_1^2 D_n^2 + \sum_{j=2}^{n-1} D_j^2 \right)$$

について考察することにする。すると次の関係式

$$PK \sim Id \quad \text{at } (x_0, \xi_0)$$

より直ちに

$$Ku = \int_{-T}^t e^{i\chi\xi} K(x, t, s, \xi) \hat{u}(s, \xi) ds d\xi$$

$$K(x, t, s, \xi) = \exp \left[- \int_s^t (\tau^2 \xi_n^2 + \sum_{j=2}^{n-1} \xi_j^2) d\tau \right]$$

とおけばよいことがわかる。この時、

$$(3) \quad \left| \partial_\xi^\alpha K(x, t, s, \xi) \right| \leq C_0 C^{|\alpha|} (|\beta|^2 / |\xi|)^{|\alpha|/3} \exp [-|t-s|^3 |\xi_n|^2 / 6]$$

が得られる。そこで

$$\gamma^\delta - S_{p, \delta}^\mu \ni a(x, \xi) \iff a(x, \xi) \in C^\infty, \quad R(|\beta|+1) \leq |\xi|, \quad (R>0)$$

$$\text{に対し, } |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)| \leq C_0 C^{|\alpha|+|\beta|} (|\alpha|^6 + |\alpha|^{6(1-\delta)} |\xi|^\delta)^{|\alpha|} (|\beta|^6 / |\xi|)^{|\beta|} (1+|\xi|)^\mu$$

と定義すれば、(3)は、 $K(x, t, s, \xi)$ が (x, ξ) に関して $\gamma^2 - S_{\frac{1}{3}, 0}^0$ に属すということを意味している。よって P^* を考えることにより

$$WF_2(u) \subset WF_2(Pu)$$

を得る。

一方 (3) については, $\bar{z}_j$ ($2 \leq j \leq n-1$) を complex にまで拡張した時,

$$\left| \int_s^t \bar{z}_j^2 dt \right| \leq \frac{1}{3} |t-s|^3 \bar{z}_n^2 + |(\operatorname{Im} \bar{z}_j) \bar{z}_n^{-\frac{1}{3}}|^3$$

$$\text{より, } - \int_s^t (\tau^2 \bar{z}_n^2 + \sum_{j=2}^{n-1} \bar{z}_j^2) dt \leq -\frac{2}{3} |t-s|^3 \bar{z}_n^2 + |(\operatorname{Im} \bar{z}_j) \bar{z}_n^{-\frac{1}{3}}|^3$$

となり, 又整函数 $f(z)$ が $|f(z)| \leq C \exp(|\operatorname{Im} z|^3)$ を満たせば,

$$x \in \mathbb{R} \text{ に対し, } |\partial_x^\alpha f(x)| \leq C_0 C^\alpha \alpha!^{\frac{2}{3}}$$

となることより従う。

4. 必要性

i) 定理 1.2.4 に関しては, 問題の作用素が $\alpha \neq 0$ では半楕円型作用素であるので, [3] の結果より, $\alpha \neq 0$ では $1 \leq s < 2$ に対し γ^s -半楕円型でなく, その集積点である原点でも同じ事である事より従う。

ii) L_2 に関しては, まず 1 つ補題を用意する。

$$P = \sum_{\langle \sigma, \tau \rangle = \langle p, \alpha \rangle - m} C_{\sigma, \tau} x^\sigma D_x^\tau, \quad C_{\sigma, \tau} \in \mathbb{C}, \quad \langle \sigma, \tau \rangle = \sum_{j=1}^n \sigma_j \tau_j, \quad \langle p, \alpha \rangle = \sum_{j=1}^n p_j \alpha_j$$

$1 \leq p_1 \leq \dots \leq p_n, 1 \leq j \leq d$ の時 $\sigma_j = p_j = 1$, σ_j, p_j は非負有理数

$$P_{\bar{z}''} = \sum_{\langle \sigma, \tau \rangle = \langle p, \alpha \rangle - m} C_{\sigma, \tau} x^\sigma \bar{z}''^{\alpha''} D_{x'}^{\alpha'}, \quad x' = (x_1, \dots, x_d), \quad x = (x', x'')$$

この時

補題 2 ある K , ($d \leq K \leq n$) とある $\xi'' \in \mathbb{C}^{K-d} \times \mathbb{R}^{n-d-K} \setminus \{0\}$ が存在して, $K \leq j \leq n$ に対し $\sigma_j = 0$, $x' \in \mathbb{R}^d$ に対し,

$$|u(x')| \leq C \exp \left\{ C' \sum_{j=1}^{K-1} |x_j|^{p_n/p_j} \right\} \quad (C, C' > 0)$$

となる. $P_{\xi''} u = 0$ の恒等的に零でない解 $u(x, \xi'')$ が存在すれば, $1 \leq s < p_n/p_K$ に対し, L は原点で γ^s -準楕円型でない.

実際, $P u = 0$ の解として

$$u(x) = \int_0^\infty \exp \left[i \sum_{j=K}^n \xi_j \lambda^{p_j} x_j \right] u(x', \lambda^{p_{d+1}} x_{d+1}, \dots, \lambda^{p_K} x_K) e^{-R \lambda^{p_K}} d\lambda$$

が取れ, $R > 0$ を十分大にすれば, $u \in \gamma^{p_n/p_K - \varepsilon}$ ($\forall \varepsilon > 0$) となることか, $\partial_n^N u(x)$ を考えることより容易にわかる.

L_3 の場合には

$$P_{\xi''} = -\left(\frac{d}{dx_1}\right)^2 + x_1^{2K} \xi_2^2 + x_1^{2\ell} \xi_3^2 \quad K \leq \ell$$

$$p_1 = \sigma_1 = 1, \quad p_2 = K+1, \quad \sigma_2 = 0, \quad p_3 = \ell+1, \quad \sigma_3 = 0.$$

となるから, $\xi_2 = 1$, ξ_3 は Schrödinger 作用素 $P_{\xi''}$ が零固有値を持つように選ぶ, (これは, 固有値のパラメーターに関する連続性と, 第 1 固有値が, $\xi_3^2 \rightarrow -\infty$ の時 負の無限大に近づくことより可能) と補題が適用されて, L_3 は $1 \leq s < \frac{\ell+1}{K+1}$ に対し, 原点で γ^s -準楕円型でないことが従う.

参考文献

- [1] M. Durand Regularite Gevrey d'une classe d'operateurs hypoelliptiques
J. Math. pure et appl. 51 (1978) 323-366
- [2] L. Hörmander Hypoelliptic second order differential equations
Acta Math. 119. (1967) 147-171
- [3] T. Ōkaji On the lowest index for the semi-elliptic operator to be Gevrey hypoelliptic.
J. Math. Kyoto Univ. 25 (1985) 693-701
- [4] L. P. Rothschild - E. M. Stein. Hypoelliptic differential Operators and nilpotent groups
Acta Math. 137 (1977) 247-320.