

半線型 Schrödinger 方程式について (定常問題)

大阪市立大 I 亀 高 恒倫

半線型 Schrödinger 方程式の定常解に関する簡単な注意を
少し述べる事とする。一番簡単な形で方程式を書くと

$$i \frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta u + g|u|^2 u \quad (g = \pm 1)$$

ただし $u = u(x, t)$ は $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ に対して定義さ
れてゐる複素数値を取る函数である。 $g = -1$ の場合は矢島氏
等に扱われてゐる様に非線型光学 ($n = 1, 2$) とか分散媒質
中の非線型波動伝播における self-trapping ($n = 1$) とか
self-focusing ($n = 2$) と関連した現象を記述する簡単なモ
デルであるといふ。特に $n = 1$ の場合には solitary wave
の解があり、矢島氏のお話しにある通りこれを中心と扱う方
が「ソリトン研究会」の主旨といふのであつた、
はあゝと相補的関係にある $g = 1$ の場合を扱う事とする。さて
 $g = 1$ に相当する場合の典型は次に述べる様に超流動現象を記

述べる一番簡単なモデルとして登場する。すなわち超流動状態を記述する波動関数 $u(x, t)$ の時空変化は次の初期値境界値問題に遡る。

$$(1) \quad \begin{cases} i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta u + V|u|^2 u & (x, t) \in \Omega \times [0, \infty) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

ここで $\hbar, M, V$ は正の実数、 Ω は n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ (物理的に意味があるのは $n=1, 2, 3$ の場合であり、以下は数学的取扱いであり、 n は任意の自然数でもいい) の中の有界領域であり、十分なおろかな境界 $\partial\Omega$ を持つものとする。また (1) の定常解で $u(x, t) = w(x) \exp\{-i\frac{E}{\hbar}t\}$ ($E > 0$) の形のものを求めよう。 $w(x)$ に対する非線形楕円型境界値問題 (BVP と略記) が導かれる。

$$(2) \quad \begin{cases} D \Delta w + Ew - V|w|^2 w = 0 & \text{in } \Omega \\ w|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

$D = \frac{\hbar^2}{2M}$ とおいた。 $w(x)$ が実数値を取る (≡ 1) かもしれないとすると (2) は次の様になる。

$$(3) \quad \begin{cases} D \Delta w + E w - V w^3 = 0 & \text{in } \Omega \\ w|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

$\sqrt{\frac{V}{E}} w$ があるとき w を考える事にしよう

$$(4) \quad \begin{cases} D \Delta w + E (1 - w^2) w = 0 & \text{in } \Omega \\ w|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

そこで $\varepsilon^2 = \frac{D}{E}$ とおくと (4) は

$$(5) \quad \begin{cases} \varepsilon^2 \Delta w + (1 - w^2) w = 0 & \text{in } \Omega \\ w|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

の形になる。 $f(w) = (1 - w^2)w$ は次の性質を持つ。

$$(6) \quad \begin{cases} (i) & f(w) \text{ は区間 } [0, 1] \text{ で定義された十分なおおきな} \\ & \text{関数,} \\ (ii) & f(0) = f(1) = 0 \\ (iii) & f''(w) < 0 \quad w \in [0, 1] \end{cases}$$

以下の議論には $f(w)$ に関する (6) の性質しか使わない。

したがって $f(w)$ の具体的な形は忘れて (6) の性質を持つ任意の関数があるとする。結局考察の対象は性質 (6) を持つ $f(w)$ を 1 つ固定し

$$(7) \quad \begin{cases} \varepsilon^2 \Delta w + f(w) = 0 & \text{in } \Omega \\ w|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

という事になる。BVP (7) は常に自明な解 $w(x) \equiv 0$ を持つ ($f(0) = 0$ 때문이다) 又 $\Omega = \mathbb{R}^2$ であり、2 境界条件なしならばもう 1 つ非自明解 $w(x) \equiv 1$ を持つ ($f(1) = 0$ 때문이다)。我々は $0 \leq w(x) \leq 1$ in Ω なる制限の下で

BVP (7) の非自明解を求めよう。この枠が自然である事を説明しよう。 $w(x)$ の符号が Ω 内で交代し nodal line を持つ様な非自明解もあり得るのであるが、ここでは「エネルギーの一番低いモード」(4) の ground state に相当する) を求める事にし、 $w(x) \geq 0$ in Ω とする。 $f(w)$ は区間 $[0, 1]$ 上で 2 回しか変号しないから $f(w) < 0$ for $w > 1$ なる様になるか否かを振る事がある。この様に修正した $f(w)$ を使えば BVP (7) の $w(x) \geq 0$ in Ω なる非自明解があったとすると $w|_{\partial\Omega} = 0$ 때문이다 Ω 内に点 x_0 があり $w(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} w(x) > 0$ となるが $\Delta w(x_0) \leq 0$ 때문이다 $f(w(x_0)) \geq 0$ となる $0 \leq w(x) \leq w(x_0) \leq 1$ in Ω が従うから $w(x)$ は修正前の $f(w)$ に対応する BVP (7) の $0 \leq w(x) \leq 1$ in Ω に対する非自明解である事になる。 $\varepsilon \rightarrow 0$ を図

是れを定数と考えると、 $\varepsilon = 1$ とし一般性を失わない。
したがって BVP (7) を書き直して

$$(8) \quad \begin{cases} \Delta w + f(w) = 0 & \text{in } \Omega \\ w|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

を考えるとす。BVP (8) の非自明解の存在の標準として、 ε の線型化、すなわち固有値問題

$$(9) \quad \begin{cases} \Delta \varphi + \lambda \varphi = 0 & \text{in } \Omega \\ \varphi|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

を考える。最小固有値 $\lambda_0 = \lambda_0(\Omega) (> 0)$ に対応する固有函数を $\varphi_0(x) = \varphi_0(x; \Omega)$ とし $\max_{\bar{\Omega}} \varphi_0(x) = 1$ と規格化する。したがって $\varphi_0(x) > 0$ for $x \in \Omega$ である。

A. Pazy and P. H. Rabinowitz [] に於て次の事がいえる。

[定理 1]

- (i) $\lambda_0 \geq f(0)$ (subcritical or critical case) ならば
 $0 \leq w(x) \leq 1$ in $\bar{\Omega}$ の制限をみたす BVP (8) の解は自明な解 $w(x) \equiv 0$ 以外にない。
- (ii) $\lambda_0 < f(0)$ (supercritical case) ならば
 $0 \leq w(x) \leq 1$ in $\bar{\Omega}$ の制限をみたす BVP (8) の解は自

明な解 $w(x) \equiv 0$ と非自明解 $w(x) = w(x; \Omega)$

($0 \leq w(x) < 1$, $w(x) \neq 0$ in Ω) の丁度2つだけある。

(非自明な解は唯一つだけある。)

くわしい証明は [] を参照していただく事にし、ここからは証明の概略のみ述べておきます。先ず *subcritical* or *critical case* を考えよう。 $0 \leq w(x) \leq 1$ in Ω を満たす BVP (8) の任意の解 $w(x)$ は次の等式を満たす。

$$(10) \quad 0 = (\Delta w + f(w), \varphi_0) = - (1_0 w - f(w), \varphi_0)$$

ここで $\varphi_0 = \varphi_0(x)$, $(\cdot, \cdot)$ は $L^2(\Omega)$ の通常の内積を表わす。

$\varphi_0(x) > 0$ for $x \in \Omega$ だけあるから。 $1_0 \geq f'(0)$, $f'(w) < 0$

for $w \in [0, 1]$ に注意すると。 $w(x) \neq 0$ in Ω ならば

(10) の最後の項は負の数を表わす事になり矛盾が導かれるから

すなわち BVP (8) の $0 \leq w(x) \leq 1$ in Ω を満たす解は $w(x) \equiv 0$

以外にない事がわかる。次に *super critical case* を考えよう。

$f(w)$ は (6) を満たすから適当な正数 c を取ると

$F(w) = f(w) + cw$ が次の性質を持つ様になる。

- (11) $\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad F(w) \text{ は } [0, 1] \text{ 上に定義され、連続な関数} \\ (ii) \quad F(0) = 0, F(1) = c, \quad F'(w) > 0 \text{ for } w \in [0, 1] \\ (iii) \quad F'(w) < 0 \text{ for } w \in [0, 1] \end{array} \right.$

$F(w)$ を使えば BVP (8) は次の様に見える。

$$(12) \quad \begin{cases} [-\Delta + c] w = F(w) & \text{in } \Omega \\ w|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

楕円型偏微分作用素 $-\Delta + c$ の領域 Ω 内部 Dirichlet 問題に対する Green 函数 $G(x, y) = G(x, y; \Omega)$ 次の性質を持つものが存在することが知られている。

[補題. 1]

(i) $G(x, y)$ は $x \neq y$ なる $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ の点 (x, y) に対して定義された連続な函数。

(ii) $G(x, y) = G(y, x) \geq 0$ for $(x, y) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$

(iii) $\sup_{\bar{\Omega}} \int_{\Omega} G(x, y) dy < \infty$.

(iv) 任意の $y \in \bar{\Omega}$ に対して $[-\Delta_x + c] G(x, y) = 0$

for $x \in \bar{\Omega} - \{y\}$, $G(x, y) = 0$ for $x \in \partial\Omega - \{y\}$.

上の Green 函数 $G(x, y)$ を使えば BVP (8) は次の同値な問題に置き代える事が出来る。

$$(13) \quad w(x) = F[w](x)$$

$$F[w](x) = F[w; \Omega](x) = \int_{\Omega} G(x, y; \Omega) F(w(y)) dy$$

$F'(0) > \lambda_0 + c$ の時積分方程式 (I E) (13) が $0 \leq w(x) \leq 1$

in $\bar{\Omega}$ なる非自明解 $w(x; \Omega)$ を持つ事を示す。Green 函数の性質より次の事が容易にわかる。

[命題. 1]

(i) $w(x) \in C^0(\bar{\Omega})$, $0 \leq w(x) \leq 1$ in $\bar{\Omega}$ ならば $F[w](x) \in C^0(\bar{\Omega})$

$$0 \leq F[w](x) \leq 1 \quad \text{in } \bar{\Omega} \quad \text{および} \quad F[w] \Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

(ii) $w(x), w'(x) \in C^0(\bar{\Omega})$, $0 \leq w(x) \leq w'(x) \leq 1$ in $\bar{\Omega}$

$$\text{ならば} \quad 0 \leq F[w](x) \leq F[w'](x) \leq 1 \quad \text{in } \bar{\Omega}.$$

(iii) $0 \leq F[1](x) < 1$ in $\bar{\Omega}$.

(iv) $w(x) \in C^0(\bar{\Omega})$, $0 \leq w(x) \leq 1$, $w(x) \neq 0$ in $\bar{\Omega}$

ならば $0 < \delta \leq 1$ ならば δ 適当に選べば

$$F[w](x) \geq \delta \varphi_0(x) \quad \text{in } \bar{\Omega} \quad \text{とできる。}$$

(v) $0 < \delta_0 < 1$, $F(\delta_0) = (1_0 + c) \delta_0$ ならば δ_0 が唯一つ

存在するか $0 < \delta \leq \delta_0$ ならば任意の δ に対し

$$F[\delta \varphi_0](x) \geq \delta \varphi_0(x) \quad \text{in } \bar{\Omega}.$$

二つの数列 $\{\bar{w}_j(x) = \bar{w}_j(x; \Omega)\}_{j=0,1,2,\dots}$ 及び

$\{\underline{w}_j(x) = \underline{w}_j(x; \Omega)\}_{j=0,1,2,\dots}$ を次のように定める。

$$(14) \quad \begin{cases} \bar{w}_j(x) = F[\bar{w}_{j-1}](x) & \text{in } \Omega, j=1,2,3,\dots \\ \bar{w}_0(x) \equiv 1 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

$$(15) \quad \begin{cases} \underline{w}_j(x) = F[\underline{w}_{j-1}](x) & \text{in } \Omega, j=1,2,3,\dots \\ \underline{w}_0(x) = \delta \varphi_0(x) & \text{in } \Omega \quad 0 < \delta = \delta(\Omega) \leq \delta_0 = \delta_0(\Omega) \end{cases}$$

命題. 1 より次の事がわかる。

[命題. 2]

- (i) $\{\bar{u}_j(x)\}_{j=0,1,2,\dots}$ は連続関数の単調減少列で下に有界.
 (ii) $\{\bar{u}_j(x)\}_{j=0,1,2,\dots}$ は $\bar{u}$ で一様にある連続関数 $\bar{u}(x)$ に収束する。
 (iii) $\bar{u}(x)$ は BVP (8) の解である。

[命題. 3]

- (i) $\{u_j(x)\}_{j=0,1,2,\dots}$ は連続関数の単調増大列で上に有界.
 (ii) $\{u_j(x)\}_{j=0,1,2,\dots}$ は u で一様にある連続関数 $u(x)$ に収束する。
 (iii) $u(x)$ は BVP (8) の解である。

[命題. 4]

- (i) $\bar{u}(x) \geq u(x)$ 在 $\bar{u}$
 (ii) BVP (8) の任意の非自明解 $u(x)$ ($0 \leq u(x) \leq 1$, $u(x) \neq 0$ 在 $\bar{u}$) に対し $\bar{u}(x) \geq u(x) \geq u(x)$ 在 $\bar{u}$.
 (iii) $\bar{u}(x) \equiv u(x)$ 在 $\bar{u}$ とならる BVP (8) の非自明解は唯一つである。

命題. 4 (iii) の γ 証明してある。 $\bar{u}(x)$, $u(x)$ 共に BVP (8) の解であるから次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} 0 &= (\Delta \bar{u} + f(\bar{u}), u) - (\Delta u + f(u), \bar{u}) \\ &= \left(\frac{f(\bar{u})}{\bar{u}} - \frac{f(u)}{u}, \bar{u} u \right) \end{aligned}$$

$\bar{w}(x)w(x) > 0$ なる Ω 又命題. 4 (i) より $f''(w) < 0$
 故 $w \in [0, 1]$ なる $\frac{f(\bar{w})}{\bar{w}} - \frac{f(w)}{w} \leq 0$ なる
 であるが上の等式より $\frac{f(\bar{w})}{\bar{w}} - \frac{f(w)}{w} \equiv 0$ なる Ω なる
 , $\bar{w}(x) \equiv w(x)$ なる Ω 故に, 2 命題. 4 (iii) が証明
 された事となる。以上で定理. 1 の証明を終了。

2 2 次 BVP (8) なる Ω ε 大 $\varepsilon < L$ なる ε なる
 なるかという事は BVP (7) なる $\varepsilon \rightarrow 0$ なる ε なる
 なるかという事を示さなければならない。先ず BVP (8) なる Ω
 $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ なる Ω なる。この事は $\Omega \supset V_R = \{x \in \mathbb{R}^n;$
 $|x| < R\}$ $R \rightarrow \infty$ なる意味 Ω なる Ω'
 $\lambda_0(\Omega) < \lambda_0(\Omega')$ なる $\lambda_0(\Omega) \leq \lambda_0(\Omega') < \lambda_0(\Omega')$ なる。

Ω, Ω' 共に *supercritical* なる BVP (8) の非自明
 解 $w(x; \Omega)$ 及び $w(x; \Omega')$ がそれぞれ唯一 Ω なる
 $G(x, y; \Omega) \geq G(x, y; \Omega')$ なる $(x, y) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega}'$ なる
 なる $w(x; \Omega) \geq w(x; \Omega')$ なる $x \in \bar{\Omega}'$ なる
 なる。これより $w(x; \Omega) \geq \delta_0(\Omega') \phi_0(x; \Omega')$

なる $x \in \bar{\Omega}'$ なる。 $\Omega' = V_r(y) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x-y| < r\}$
 なる $\delta_0(V_r(y))$ なる y なる無関係なる $\delta_0(V_r(y))$
 $= \delta_0(r)$ なる $w(x; \Omega) \geq \delta_0(r) \phi_0(x; V_r(y))$
 なる $x \in \overline{V_r(y)}$, $\text{dis}(x, \partial\Omega)$ なる x なる $\partial\Omega$ なる
 距離 $\text{dis}(x, \partial\Omega) \geq r$ なる $\phi_0(x; V_r(y)) = 1$ なる

$\text{dis}(x, \partial\Omega) \geq r$ なる任意の $x \in \Omega$ に対し

$w(x; \Omega) \geq \underline{\delta}_0(r)$ なる評価を得る。話を、より正確にするために $\underline{\delta}_0(r)$ を下から与えるにわかりやすい量で評価しよう。 $0 < \delta < 1$ なる δ を任意に固定しよう。

$\lambda_0(r) = \lambda_0(V_r(\Omega)) = \left(\frac{z_0}{r}\right)^2$ (ただし z_0 は Bessel 函数 $J_{\frac{n-2}{2}}(z) = 0$ の正の最小根) であるから r を十分大きく取ると $\lambda_0(r) < \frac{f(\delta)}{\delta} < f'(0)$ となり $V_r(\Omega)$ は

supercritical となる。 (ξ, η) 平面上で直線 $\eta = \lambda_0(r)$ と直線 $\eta = -\frac{f(\delta)}{1-\delta}(\xi - 1)$ の交点の ξ -座標を $\underline{\delta}_0(r)$ とすると $\delta_0(r) \geq \underline{\delta}_0(r)$ である。結局次の評価を得る。

$$\text{dis}(x, \partial\Omega) \geq r \quad \text{ならば} \quad w(x; \Omega) \geq \underline{\delta}_0(r) = \frac{\frac{f(\delta)}{1-\delta}}{\frac{f(\delta)}{1-\delta} + \lambda_0(r)}$$

$\Omega \supset V_R$ として $0 < \alpha \leq 1$ なる任意の α 、任意の $R_0 \geq 1$ なる任意の R_0 を固定しよう。 $r = r(R) = R^\alpha - R_0$ とおくと

$$r(R) \rightarrow \infty \quad \text{as } R \rightarrow \infty \quad \text{したがって} \quad \underline{\delta}_0(r(R)) \rightarrow 1$$

$$\text{as } R \rightarrow \infty \quad \text{よって} \quad 1 - \underline{\delta}_0(r(R)) \rightarrow 0 \quad \text{as } R \rightarrow \infty,$$

$$R - r(R) = R - R^\alpha + R_0 \geq R_0 \quad \text{for } R \geq 1$$

$$\left(0 < \alpha < 1 \text{ の場合とは} \quad R - r(R) \rightarrow \infty \quad \text{as } R \rightarrow \infty \right)$$

$$x \in V_{R-r(R)} \quad \text{ならば} \quad \text{dis}(x, \partial V_R) \geq r(R) \quad \text{したがって}$$

$$\underline{\delta}_0(r(R)) \geq \underline{\delta}_0(r(R)) \quad \text{であるから} \quad w(x; \Omega) \geq \underline{\delta}_0(r(R))$$

結局次の評価を得る。

[定理. 2]

(i) $x \in V_{R-r(R)}$ なる R^n ($\Omega \supset V_R$, $r(R) = R^\alpha - R$)

$$0 < 1 - w(x; \Omega) < 1 - \underline{\delta}_0(r(R)) = \frac{\lambda_0(r(R))}{\frac{f(\underline{\delta})}{1-\underline{\delta}} + \lambda_0(r(R))}$$

(ii) $\Omega \rightarrow R^n$ の時 R^n 上で 1 へと $w(x; \Omega) \rightarrow 1$.

$\Omega \rightarrow R^n$ とき BVP (7) に対し $\varepsilon \rightarrow 0$ とした場合 ε が

$f(w) \approx \frac{1}{\varepsilon^2} f(w)$ とき置き代えて同様の議論をくり返せばよい。
 $\lambda_0(r) < \frac{f(\underline{\delta})}{\varepsilon^2 \underline{\delta}} < \frac{1}{\varepsilon^2} f(r)$ と可なり $V_r(r)$ は super-critical となり $\text{div}(x, \partial\Omega) \geq r$ なる $x \in \Omega$ に對し

$$0 < 1 - w(x; \Omega) < 1 - \underline{\delta}_0(r) = \frac{\lambda_0(r) \varepsilon^2}{\frac{f(\underline{\delta})}{1-\underline{\delta}} + \lambda_0(r) \varepsilon^2}$$

$$r = r(\varepsilon) \quad \varepsilon \quad r(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad \lambda_0(r) \varepsilon^2 \rightarrow 0$$

as $\varepsilon \rightarrow 0$ なる様にとれる。たとえ $r(\varepsilon) = r_0 \varepsilon^\alpha$

$0 < \alpha < 1$ と可なり。結局次の結論を得る。

[定理. 3]

(i) 上の様な $r(\varepsilon)$ に対し $\text{div}(x, \partial\Omega) \geq r(\varepsilon)$ なる x

$$0 < 1 - w(x; \Omega) < 1 - \underline{\delta}_0(r(\varepsilon)) = \frac{\lambda_0(r(\varepsilon)) \varepsilon^2}{\frac{f(\underline{\delta})}{1-\underline{\delta}} + \lambda_0(r(\varepsilon)) \varepsilon^2}$$

(ii) $\varepsilon \rightarrow 0$ と可なり。BVP (7) の非自明解 $w(x; \Omega)$ は $O(\varepsilon)$

の境界層をのぞいて Ω 内部で一様に 1 に収束する。

この結果は次の意味で最良である。すなわち $n=1$ として

$\Omega = (0, 1)$ の場合 BVP (5) は

$$(16) \quad \begin{cases} \varepsilon^2 w'' + w - w^3 = 0 & \text{in } (0, 1) \\ w(0) = w(1) = 0 \end{cases}$$

となるが非自明解は Jacobi の楕円函数 $m(z; k)$ を使、

$$w(x; \varepsilon) = \sqrt{\frac{2k(\varepsilon)^2}{1+k(\varepsilon)^2}} m\left(\frac{1}{\varepsilon \sqrt{1+k(\varepsilon)^2}} x; k(\varepsilon)\right)$$

とすれば $\frac{1}{\varepsilon \sqrt{1+k(\varepsilon)^2}} = z = k(k(\varepsilon))$ $k(k)$ は第1種完全楕円積分

$$k(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} d\theta \quad \text{と表わす。} \quad z = z''$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ とするときは $k(\varepsilon) \rightarrow 1$ ($k(k(\varepsilon)) \rightarrow \infty$)

である。 $m(z; k) \rightarrow \tanh z$ として $k \rightarrow 1$ とする。

$$w(x_0 \varepsilon; \varepsilon) = \sqrt{\frac{2k(\varepsilon)^2}{1+k(\varepsilon)^2}} m\left(\frac{1}{\varepsilon \sqrt{1+k(\varepsilon)^2}} x_0 \varepsilon; k(\varepsilon)\right)$$

$$\rightarrow \tanh \frac{x_0}{\sqrt{2}} < 1$$

これは境界からの距離が丁度 $O(\varepsilon)$ のときにあける $w(x; \varepsilon)$

の値は $\varepsilon \rightarrow 0$ としても 1 と近づかない事を示している。

(三注、1) $f(x)$ がなめらかな実数値函数とするとき

$$(17) \quad \begin{cases} \Delta w + f(|w|^2) w = 0 & \text{in } V_R \\ w|_{\partial V_R} = 0 \end{cases}$$

の解が $r = |z|$ のみの函数となるものは本質的には実数値函数と思ふ。実際 $w'(r) = \frac{d}{dr} w(r)$ と (17) は

$$(18) \quad \begin{cases} w'' + \frac{n-1}{r} w' + f(|w|^2) w = 0 & \text{in } (0, R) \\ w(R) = 0 \end{cases}$$

となるが $v(r) = \operatorname{Im} [e^{-i \arg w(R)} w(r)]$ とおくと

$$(19) \quad \begin{cases} v'' + \frac{n-1}{r} v' + f(|w|^2) v = 0 & \text{in } (0, R) \\ v(R) = v'(R) = 0 \end{cases}$$

が得られ常微分方程式の初期値問題に対する解の一義性定理より $v(r) \equiv 0$ in $(0, R)$ となる。すなわち $e^{-i \arg w(R)} w(r)$ は実数値函数である。

References

- [1] Pazy, A. and Rabinowitz, P. H., A nonlinear integral equation with applications to neutron transport theory, Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 32 (1968) 226-246.
- [2] Pitaevskii, L. P., Vortex lines in an imperfect Bose gas, Soviet Physics JETP, Vol. 13 (1961) 451-454.
- [3] Gross, E. P., Hydrodynamics of a superfluid condensate, J. Math. Phys., Vol. 4 (1963) 195-207.