

ノイズと遅れの相互作用：遅れフォッカー・プランク方程式 と遅れ切替えによる漸近安定性の拡張

Systems with Noise and Delay: Delayed Fokker-Planck Equation and
Stability Enhancements with Delay Switchings

大平徹

TORU OHIRA

名古屋大学大学院・多元数理科学研究科

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICS, NAGOYA UNIVERSITY [*]

Abstract

遅れとノイズをともに含む系の研究から、二つのトピックについて紹介する。前半では遅れランダムウォークを用いた遅れフォッカー・プランク方程式の導出を行う道筋である。後半では遅れを二値をとる確率過程として拡張し、この切替が固定点の漸近安定性を拡張するという現象についてである。どちらのトピックも未開拓の部分が多く残されているが、現状と方向性を考える。

1 はじめに

本稿では、この研究会のテーマである遅れを含む系に、さらにノイズを加えたシステムについての研究から、二つのトピックについて紹介する。物理的な方向からの記述であるので、数学としては粗くなるが、御海容をお願いする。

遅れ微分方程式で記述される力学は例えて言うなら、時間と位置を座標軸に持つ平面上で尻尾を気にしながら穴を彫り続けるうなぎのように考えている。うなぎは伸びたり縮んだりして、穴を掘り進む向きも速度も変化する。このうなぎは尻尾の位置をいつも遅れ時間前に置いていて、その位置の関数で掘り進む速さや向きを決めているのである。力学の軌跡はこの掘られたトンネルの形状によって表現される。よく知られているように遅れが大きくなると、つまり尻尾の位置がより時間的に離れると、振動及び、より複雑なトンネル形状となるのである。これにさらにノイズを加えるということは、うなぎの穴掘りの頭の動きにゆらぎが加わることと類似される。

遅れを含むシステムを考察するにあたっては、遅れ微分方程式で記述することが主流である [1, 2, 3, 4, 5]。特に遅れを変化させたときの安定性解析ではこのアプローチで様々な知見が得られている。本稿で考察するノイズの効果も含む系においても、遅れ確率微分方程式を探索することが主である [6]。一方、筆者のアプローチは、対応する遅れを組み入れたランダムウォークを考えるというものであり、これを遅れランダムウォーク (Delayed Random Walk) と呼んで提案している [7, 8, 9, 10, 11, 12]。このアプローチの利点は遅れによる振動現象と軌跡についてある程度理論的な計算で理解できるところにある。特に自己相関関数の振動軌跡については理論的に再現できる。

*ohira@math.nagoya-u.ac.jp

本稿の前半では遅れランダムウォークのアプローチからの一つの成果として、遅れフォッカー・プランク方程式 (Delayed Fokker-Planck Equation) が導けるので、これについて紹介する [13]. これは Kac による遅れのない場合の導出を、遅れを含む場合に拡張したものである [14].

本稿の後半では単純な遅れ微分方程式の遅れの部分にノイズをいれた場合に、漸近安定性に特異的な変化が見られたので、これについて紹介する [16, 17, 18]. 具体的には遅れは定数ではなく、二値をとる確率過程とするのである. この式においては遅れがない場合には原点は漸近安定であり、遅れがある閾値を超えると安定性が失われることが知られている. 確率過程に拡張した場合には、その平均値がこの閾値を超えても安定性が保たれることが、数値計算で示唆された. この現象についてはまだ理論的な理解には至っていないが、現状での報告を行う.

2 遅れフォッカー・プランク方程式

ノイズと遅れをともに含むシステムの最も簡明、かつ代表例は以下の式で表される.

$$\frac{dX(t)}{dt} + aX(t - \tau) = \xi(t). \quad (1)$$

ここで a, τ は実数パラメータで、 τ が遅れとなり、 $\xi(t)$ がノイズ項である. この式は上述のように遅れ微分方程式 (Hayes 方程式 [1]) にノイズを付加したものと見ることもできるし、確率微分方程式に遅れを導入したものとして考えることができる. 当然、どちらかの要素だけの場合よりは、より複雑で数理的には難しくなるが、[6] に代表されるように研究は行われてきた. これらの研究により、その性質のいくつかの側面が調べられているが、未開拓の部分も多い. 前述のように筆者のアプローチは、この式を直接解析するのではなく、対応する遅れを組み入れたランダムウォーク (遅れランダムウォーク) を考えるというものである. このアプローチから遅れを含むフォッカー・プランク方程式を導出する道筋を紹介するものである [13].

2.1 遅れのない場合

まず遅れのない場合の対応を考えよう. これは以下の確率微分方程式とランダムウォークの対応となる

$$\frac{dX(t)}{dt} + aX(t) = \xi(t) \quad (2)$$

この確率微分方程式については様々に調べられている. 物理ではブラウン運動のモデルとして、また数学ではオルシュティン・ウーレンベック過程として研究されていて、これから確率分布に関する偏微分方程式であるフォッカー・プランク方程式が導出されていて、その解はガウス分布となる.

続いてランダムウォークであるが、これは離散空間と時間で次のように記述される.

$$\begin{aligned} P(r, n+1) &= \frac{1}{2}(1 - \alpha(r-1))P(r-1, n) \\ &\quad + \frac{1}{2}(1 + \alpha(r+1))P(r+1, n). \end{aligned} \quad (3)$$

ここで $P(x, n)$ は時刻 n にウォーカーが位置 r にいる確率であり、 α は実数定数である. このランダムウォークはエレンフェストのモデルとも呼ばれていて、物理での気体などの平衡状態を考察することに関して提案された [19, 20]. 2つの箱の中に一定数の玉が分けていられ、その数に比例してどちらかの箱を選び、選ばれた方から他の箱に玉を一つ移動させる. これを繰り返して、2つの箱の数を考え、その差をランダムウォークの位置とするのである. 物理的には両者の箱の数が同じになるような状態がより確率が高くなる. 実際に

玉の数を増やすと、このランダムウォークの従う分布はガウス分布に近づいていく。そして、このランダムウォークからもフォッカー・プランク方程式の導出が Kac によって行われている [14]。

このようにして確率微分方程式とランダムウォークで、それぞれの方法で導かれたフォッカー・プランク方程式は以下となる [21]。

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = a \frac{\partial}{\partial x} P(x, t) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t). \quad (4)$$

ここで D は拡散定数でノイズ項の分散と関係している。

2.2 遅れのある場合

上記に鑑みて、ここでは上記の対応を遅れがある場合に拡張する。具体的には遅れ確率微分方程式 (1) に対応するように、エレンフェストのランダムウォークを遅れがある場合に拡張し、Kac の行った導出 [14] になぞらえた道筋で遅れフォッカー・プランク方程式を導くものである。

遅れを含むランダムウォークの一つの表現方法は下記の式である。

$$\begin{aligned} P(r, n+1) &= \sum_m g(m) P(r-1, n; m, n-\tau_d) \\ &\quad + \sum_m f(m) P(r+1, n; m, n-\tau_d), \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 $P(r, n; m, n-\tau)$ はウォーカーが時刻 n では位置 r に、そして時刻 $n-\tau_d$ では位置 m にいる同時 (連結) 確率分布であり、 $g(m)$ 、 $f(m)$ は過去の位置 m によって決まり、前者が $+1$ のステップ、後者が -1 のステップをとる遷移確率である。これを前述のエレンフェストのランダムウォークに特化すると以下のように記述できる。

$$\begin{aligned} P(r, n+1) &= \sum_m \frac{1}{2} (1 - \alpha m) P(r-1, n; m, n-\tau_d) \\ &\quad + \sum_m \frac{1}{2} (1 + \alpha m) P(r+1, n; m, n-\tau_d), \end{aligned} \quad (6)$$

これを前述の式 (3) と比べると、遅れを含んだ場合の拡張になっていることが理解しやすい。すなわち $\tau_d = 0$ のときには上記の式 (6) は式 (3) に収束する。

この遅れランダムウォークから遅れフォッカー・プランク方程式を導くにあたっては、離散から連続の時間・空間に対応付けていく必要がある。このために各ステップのサイズを Δx として、単位時間を Δt とおき、これらは我々の関心のある時間空間スケールに比べて十分に小さいとする。そして以下のように時間空間変数を $x = r\Delta x$ 、 $y = m\Delta x$ 、 $t = n\Delta t$ 、 $\tau = \tau_d\Delta t$ と定義する。これによって遅れランダムウォーク (6) は次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} \frac{P(x, t + \Delta t) - P(x, t)}{\Delta t} &= \\ &\frac{1}{2} \left(\frac{P(x - \Delta x, t) + P(x + \Delta x, t) - 2P(x, t)}{(\Delta x)^2} \right) \left(\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\frac{y}{\Delta x}} \frac{y}{\Delta x} (P(x, t; y, t - \tau) - P(x - \Delta x, t; y, t - \tau)) \frac{\alpha}{\Delta t} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\frac{y}{\Delta x}} \frac{y}{\Delta x} (P(x + \Delta x, t; y, t - \tau) - P(x, t; y, t - \tau)) \frac{\alpha}{\Delta t} \end{aligned} \quad (7)$$

さらに以下のように極限をとる.

$$\begin{aligned} \Delta x \rightarrow 0, \quad \Delta t \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 0 \\ \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \rightarrow D, \quad \frac{\alpha}{\Delta t} \rightarrow a, \quad n\Delta t \rightarrow t, \quad \tau_a \Delta t \rightarrow \tau \\ r\Delta x \rightarrow x, \quad m\Delta x \rightarrow y, \end{aligned} \quad (8)$$

これにより差分式 (7) は次の偏微分と積分を含む方程式となる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} P(x, t; y, t - \tau) dy = \int_{-\infty}^{\infty} a \frac{\partial}{\partial x} (y P(x, t; y, t - \tau)) dy \\ + D \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t; y, t - \tau) dy. \end{aligned} \quad (9)$$

ここで

$$P_\tau(x, t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} P(x, t; y, t - \tau) dy \quad (10)$$

とおくとより簡明な形で遅れフォッカー・プランク方程式を以下のように書き下すことができる.

$$\frac{\partial}{\partial t} P_\tau(x, t) = a \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} y P(x, t; y, t - \tau) dy + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} P_\tau(x, t). \quad (11)$$

この方程式は遅れ確率微分方程式 (1) から導き出すこともできる [15]. また, 遅れがない場合 $\tau = 0$ では

$$P(x, t; y, t - \tau) \rightarrow P(x, t) \delta(x - y), \quad (12)$$

となり通常のフォッカー・プランク方程式 (4) と然るべく一致する. 遅れフォッカー・プランク方程式方程式の性質についてはほぼ未開拓である. しかし, フォッカー・プランク方程式に関してはさまざまな知見が得られているので, ノイズと遅れを含む系に対しても, 有意な結果が得られる可能性がある.

3 遅れの切り替えによる安定領域の拡張

続いて, 現在取り組んでいるノイズと遅れの相互作用による安定領域の拡張現象を生み出すモデル [16, 17] について述べたい. こちらについては基本となる前節で述べた Hayes 方程式 [1] の特殊な場合であり, 遅れ方程式は下記である.

$$\frac{dX(t)}{dt} = aX(t - \tau). \quad (13)$$

よく知られているように, 遅れが振動をもたらし, $a < 0$ においては固定点である原点 $X = 0$ の漸近安定性が, 下記の閾値を超えた遅れで失われる.

$$\tau_c = -\frac{\pi}{2a}. \quad (14)$$

この安定領域の境界は図 1 に示した.

ここではこの基本形を拡張し, 遅れを固定パラメータではなく, 境界をまたぐ形の二値の実数をとる確率過程 $\hat{\tau}(t)$ として, 具体的には以下とする.

$$\hat{\tau}(t) = \tau_c(1 + \mu\xi(t)). \quad (15)$$

ここで $\mu \in (0, 1)$ は実数パラメータで, $\xi(t)$ は $+1$ と -1 を, それぞれ確率 p と $1-p$ でとる確率過程である.

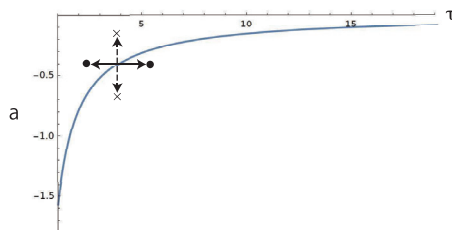


図 1: 式 (13) の $X = 0$ の漸近安定・不安定境界. 境界線と座標軸の間が安定領域である. 同時に確率的な遅れの切り替えの模式図も示した. 遅れの値は図の横実線矢印で示された二点の黒点の値を確率的にとる. 一方で, 比較を行う係数パラメータ a の確率的な切り替えでは縦破線矢印で示された二点のクロスの値を採る.

よって,

$$\hat{\tau}(t) > \tau_c \text{ (確率 } p)$$

$$\hat{\tau}(t) < \tau_c \text{ (確率 } 1-p)$$

となり, 図 1 の横実線矢印で示した境界をまたぐ二値を取る.

ここでは, この遅れの確率的な切り替えの効果について数値的に調べた. 粗い近似であるが, そのために用いた離散式は下記となる. ($N[x]$ は x に最も近い整数を返す関数.)

$$X(t+1) = X(t) + \text{adt}X(t - N[\hat{\tau}(t)/\text{dt}]). \quad (16)$$

特徴的にはこの確率的な遅れ切り替えは原点の安定領域の拡大をもたらすことが見いだせた. 具体的には, 遅れの時間平均値 $\langle \hat{\tau} \rangle$ が閾値 τ_c よりも大きい状況であっても原点の漸近安定性が保たれるということである. さらに, 遅れについては固定パラメータに戻し, 係数パラメータ a について同様に確率的な切り替えをした下記の式との比較を行った.

$$\frac{dX(t)}{dt} = \hat{a}(t)X(t - \tau) \quad (17)$$

ここでは $\hat{a}(t)$ が図 1 の縦の破線の矢印で示したように境界をまたぐ二値をとる確率過程である. より詳細に調べるため, 式 (17) についても, 離散化しての数値実験を行ったが, この場合においては安定領域の拡大は検出されなかった.

これらの結果について図 2 に示した. (右の図は対数—対数グラフである.) 図 1 と同様に実線が式 (13) に伴う安定・不安定境界となる. 遅れの確率切り替えを組み込んだ場合の, 閾値の時間平均の遅れの値 $\langle \hat{\tau} \rangle_c$ を数値的に推定して図に黒点として示した. ここにみられるように, 確率切り替えによって, 原点の安定領域は $\tau_c < \langle \hat{\tau} \rangle_c$ となって明確に拡張している. 一方, 前述のように係数パラメータ a を確率過程にして同様の切り替えをする式 (17) についても数値計算を行なった. その閾値の平均 $\langle \hat{a} \rangle_c$ の推定の結果については図 2 のクロスによって示した. この結果に現れているように, この場合については安定領域の拡張は出現せず, $\langle \hat{a} \rangle_c \approx a_c$ となり, $\langle \hat{a} \rangle_c$ は実線上に重なっている.

さらにこの現象において調査を継続しているが, 遅れが必ずしも確率過程でなくとも, たとえば規則正しく各時間ステップ毎に交互に安定・不安定領域の境界をある程度の大きさの幅 μ でまたぐような場合においても, 同様の安定領域の拡張が見られた [18]. 委細についてはさらに研究を進めている途上であるが, 扱

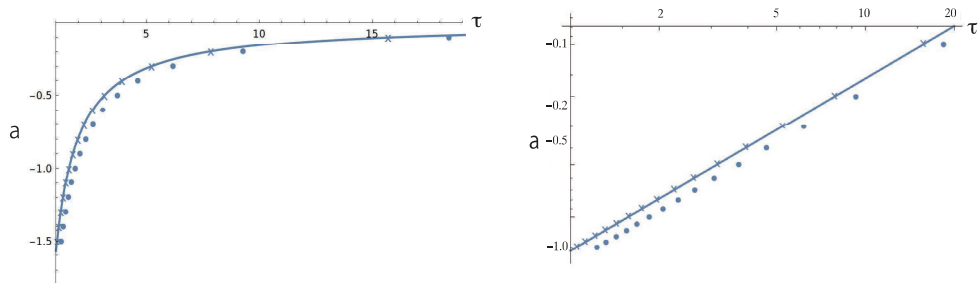


図 2: 式 (13) に遅れの確率的な切り替えを加えたことによる $X = 0$ の漸近安定領域の拡張を黒点で示した典型例. 右の図は対数-対数グラフである. 比較の対象である係数パラメータ a の確率切り替えの結果はクロスであり, 基本式の境界線上にならんでおり, 安定領域の拡張はみられなかった. (切り替えの大きさのパラメータはどちらの場合も $\mu = 0.5$ とした.)

うのは式 (13) で遅れとしては下記である.

$$\tilde{\tau}(t) = \tau_c(1 + \mu\lambda(t)). \quad (18)$$

ここで, $\lambda(t)$ は規則的交互に ± 1 をとる周期関数である.

ここでは対応する以下の差分式によって数値計算をおこなった. この数値計算においては $\lambda(t)$ は時間ステップの偶奇で規則的交互に ± 1 をとるとする.

$$X(t+1) = X(t) + \text{adt}X(t - N[\tilde{\tau}(t)/\text{dt}]). \quad (19)$$

この数値計算においては $\lambda(t)$ は時間ステップの偶奇で規則的交互に ± 1 をとるとするので, $\tilde{\tau}$ も同様に, $\tau_c(1 \pm \mu)$ をとる. 図 3 に μ の値を変えた場合を示す.

ここにあるように, 遅れ $\tilde{\tau}$ の値の平均は同じであっても, 切り替え幅 μ を変えるに伴い安定性が変化していることが明確に見える. 特に, 切り替えがない場合には平均値が不安定領域であるが, 切り替えの幅を大きくしていくと確率的な切り替えと同じように原点の漸近安定領域が拡張して得られている. また, ここでは示していないが確率的な切り替えと同様に, 係数 a を切り替えた場合には安定性の拡張は数値計算を行った範囲では見られていない.

これらの結果を得たあとで, すでに遅れを確率過程としたときの安定性の変化・拡大 [22, 23] や, 工学制御における不安定な力学を切り替えることで安定性を得るような研究 [24, 25, 26, 27] が積み重ねられていることが指摘された. これらを鑑みるに課題としては, 理論的な理解と合わせて, 境界をまたぐ方向によって最適な安定性の拡張が存在するかどうかを確認することにある. 現状では図にあるように二つの方向のみでの調査であるが, これを他の方向においても調べるということになる. 初期的な数値計算の結果では図 4, 図 5 に示したように, 境界をまたぐ角度によって, 安定性に変化があることが示唆された. より詳細な探求は将来報告する.

また, ここでの結果はあくまでも離散化された式の数値計算によるものであるもので, 連続時空の場合についても, これまでの研究から同様の現象は期待されるものの, その検証については丁寧に考える必要がある.

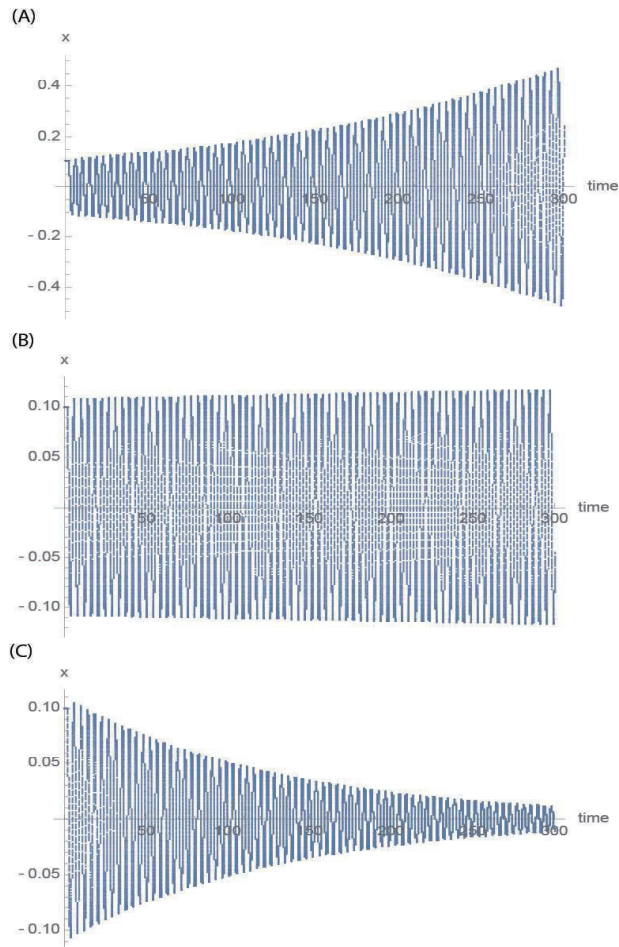


図 3: 規則的な遅れ切り替えをもつ式 (19) の典型的な軌跡. 固定パラメータは $a = -1.5$ と $dt = 0.01$ である. 切り替え幅 μ と遅れの値は以下のように与えた. (A) $\mu = 0, \tau = 1.05$, (B) $\mu = 0.08, \tau = (0.97, 1.13)$, (C) $\mu = 0.13, \tau = (0.92, 1.18)$.

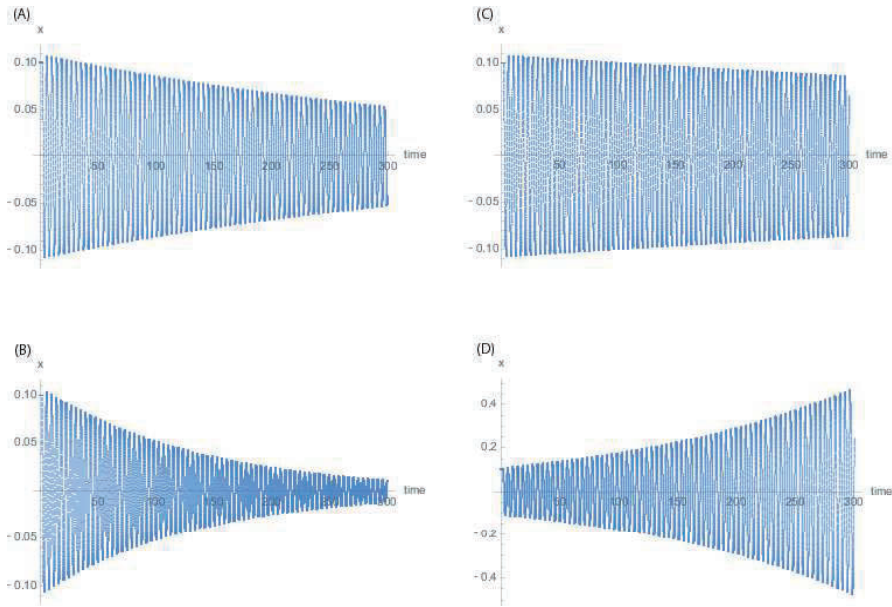


図 4: 規則的な遅れ切り替えをもつ式 (19) の典型的な軌跡で, ここでは境界をまたぐ角度を変えている. 固定パラメータは $a_0 = -1.5$ と $dt = 0.01$ である. このとき遅れのしきい値は $\tau_c \approx 1.0472$ である. τ 軸 (横軸) を基準に角度 θ をとり, $(a, \tau) = (a_0 \pm r \sin \theta, \tau_c \pm r \cos \theta)$ となるように切り替えの値を設定した. 切り替え幅は $r = 0.1$ で θ の値を変化させたときの軌跡である. (A) $\theta = 0$, (B) $\theta = \pi/8$, (C) $\theta = \pi/4$, (D) $\theta = \pi/2$.

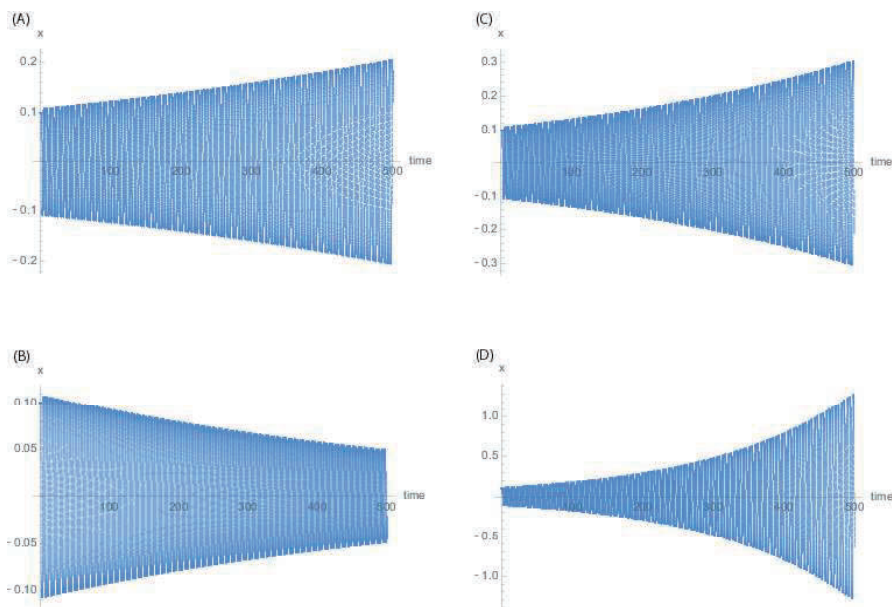


図 5: 規則的な遅れ切り替えをもつ式 (19) の典型的な軌跡で, ここでは境界をまたぐ角度を変えている. 固定パラメータは $a_0 = -1.5$ と $dt = 0.01$ である. このとき遅れのしきい値は $\tau_c \approx 1.0472$ である. τ 軸 (横軸) を基準に角度 θ をとり, $(a, \tau) = (a_0 \pm r \sin \theta, \tau_c \pm r \cos \theta)$ となるように切り替えの値を設定した. 切り替え幅は $r = 0.07$ で θ の値を変化させたときの軌跡である. (A) $\theta = 0$, (B) $\theta = \pi/8$, (C) $\theta = \pi/4$, (D) $\theta = \pi/2$.

4 まとめ

ここでは遅れとノイズをともに含む系の研究の事例として遅れフォッカー・プランク方程式と、遅れの切り替えによる安定性の変化について概説した。ここで述べた以外にも遅れとノイズをともに含む系については、例えば確率論の古典的な問題である「破産問題」に遅れを導入した「遅れ破産問題」(Delayed Gambler's Ruin)なども提案し研究している [28, 29]。上記とも合わせて、一般には現象や数理に関して困難なところも多く、未開拓で興味深い問題も多々ある。遅れ確率微分方程式と遅れランダムウォークの両面から探求を進めている。

本研究は「おおはぎ内科・眼科」(和歌山県・橋本市)及び科研費 19H01201 による支援を受けた。また、芝浦工業大学の石渡哲哉教授、青山学院大学の中田行彦准教授には先行研究についての示唆や文献紹介を頂いた。ここに感謝したい。

参 考 文 献

- [1] N. D. Hayes. Roots of the transcendental equation associated with a certain difference-differential equation. *J. Lond. Math. Soc.*, 25:226–232, 1950.
- [2] R. Bellman and K. Cooke. *Differential-Difference Equations*. Academic Press, New York, 1963.
- [3] M. C. Mackey and L. Glass. Oscillation and chaos in physiological control systems. *Science*, 197:287–289, 1977.
- [4] G. Stepan. *Retarded dynamical systems: Stability and characteristic functions*. Wiley & Sons, New York, 1989.
- [5] 内藤敏機, 原惟行, 日野義之, 宮崎倫子, 『タイムラグをもつ微分方程式』, 牧野書店 2002.
- [6] U. K  chler and B. Mensch. Langevin's stochastic differential equation extended by a time-delayed term. *Stoch. Stoch. Rep.*, 40:23–42, 1992.
- [7] T. Ohira and J. G. Milton. Delayed random walks. *Phys. Rev. E*, 52:3277–3280, 1995.
- [8] T. Ohira and Y. Sato. Resonance with noise and delay. *Phys. Rev. Lett.*, 82:2811–2815, 1999.
- [9] T. Ohira and T. Yamane. Delayed stochastic systems. *Phys. Rev. E*, 61:1247–1257, 2000.
- [10] 大平徹, 佐藤譲, ノイズと遅れの共鳴現象, 日本物理学会誌 55:360–363, 2000
- [11] 大平徹, 「遅れ」と「ノイズ」の周辺で, 数理科学, 467:79–83, 2002.
- [12] 大平徹, ノイズと遅れの数理, 共立出版 2006.
- [13] T. Ohira and J. G. Milton. Delayed random walks: Investigating the interplay between delay and noise. *Delay Differential Equations: Recent Advances and New Directions*, (B. Balachandran, T. Palmar-Nagy and D. E. Gilsinn, Eds.) Springer, 305–335 2009.
- [14] M. Kac. Random walk and the thory of Brownian motion. *American Mathematical Monthly*, 54:369–391, 1947.
- [15] T. D. Frank. Delay Fokker-Planck equations, Novikov 's theorem, and Boltzman distributions as small delay approximations. *Phys. Rev. E*, 72:01112, 2005.
- [16] T. Ohira, Stability Enhancement with Stochastic Delay Switching, Nagoya Repository, 0002001219, <http://hdl.handle.net/2237/0002001219>, 2021.

- [17] 大平徹, 遅れの確率的切り替えによる安定領域の拡張, 日本応用数理学会 2021 年度 年会 講演予稿集, 2021.
- [18] T. Ohira, Enhancement of Stability with Delay Switching, In the proceedings of 7th International Symposium on BioComplexity (ISBC7), January 25—27, Beppu, Japan, 2022.
- [19] J. G. Milton and T. Ohira. *Mathematics and a Laboratory Tool: Dynamics, Delays and Noise*. Springer, New York, 2014.
- [20] 大平徹, 確率論 講義ノート: 場合の数から確率微分方程式まで, 森北出版 2017.
- [21] H. Risken. *The Fokker-Planck Equation*. Springer, New York, 1989.
- [22] W. Michiels, V. Van Assche and S. -. Niculescu, Stabilization of time-delay systems with a Controlled time-varying delay and applications, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50:493-504, 2005.
- [23] M. Sadeghpour, D. Breda, and G. Orosz. Stability of Linear Continuous-Time Systems with Stochastically Switching Delays. *IEEE Transactions on Automatic Control (to appear)*, DOI 10.1109/TAC.2019.2904491 2019.
- [24] M. Wicks, P. Peleties and R. DeCarlo. Switched Controller Synthesis for the Quadratic Stabilisation of a Pair of Unstable Linear Systems. *European Journal of Control*, 4:140-147, 1998.
- [25] M. S. Branicky. Multiple Lyapunov Functions and Other Analysis Tools for Switched and Hybrid Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43:475-482, 1998.
- [26] 増渕泉, サイ貴生. ハイブリッドシステムの制御-V : スイッチドシステムの解析と制御. *システム／制御／情報 (ISCIE)*, 52:25-31, 2008.
- [27] W. Xiang and J.Xiao. Stabilization of switched continuous-time systems with all modes unstable via dwell time switching. *IAutomatica*, 50:940-945, 2014.
- [28] Delayed gambler's ruin. *Stability, Control and Application of Time-Delay Systems*. (Q. Gao and H. R. Karimi Eds.) Springer, 333-347 2019.
- [29] 今井智久, 大平徹, 遅れを含む破産問題日本シミュレーション学会論文誌 39:247-251 2020