

自励ダイナモの数学的モデルについて

和歌山高専 舟田敏雄

信州大 工 大路通雄

§ 1. 問題の背景

外部磁場源なしにみずから磁場を生成維持する系、即ち自励ダイナモの問題は、直接には地磁気や天体磁気の起源を説明することを目的としているが、もっと広い意味での興味も決して小さくないように思われる。特にMHDの応用問題として、本来非常に巨大なスケールでの現象であり、かつ系の自転のような、反転対称性を破るジャイレータの効果に結びついていると同時に、必ずしも秩序的でない状態(turbulent state)から規則的なパターン(organized pattern)を生成する実例とみなされる、などの点にダイナモの本質的な特異性があるといえよう。ここでも、例えば地磁気のような具体的な対象を取扱うことが目的でなく、むしろこれらの定性的な特徴に注目して大幅に単純化された数学的モデルの紹介とその一、二の応用を示すが、初めに問題の背景をごく簡単に述

べておこう。

ダイナモ理論が Larmor¹⁾ や Cowling²⁾ の先駆的段階を経て市民権を得たのは、Elsasser によるといわれる^{3), 4)}。前後して Bullard-派^{5), 6)} は運動学的ダイナモ理論と呼ばれる解析を展開し、やや遅れて Steenbeck らは α 効果の概念を導入して反転非対称性と乱流の役割を強調した⁷⁾。後に取上げる Moffatt のモデル^{8) ~ 12)} もこの系列に属する。最近の発展は Roberts¹³⁾ や Moffatt¹⁴⁾ の総合報告に詳しいが、結局のところ問題なく自励ダイナモの成立を保証する決め手は、まだ確立されていないようである。

さて、MHD によるダイナモの解析は、もちろんよく知られた誘導方程式

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{R_m} \nabla^2 \mathbf{B} \quad (1.1)$$

と運動方程式または渦度方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{R} \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + S \nabla \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \quad (1.2)$$

およびソレノイダル条件

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (1.3)$$

から出発する。ただし、 $\mathbf{B}$ は磁束密度、 $\mathbf{U}$ は速度、 $\boldsymbol{\omega}$ は渦度、

j は電流で、物性値を一定と仮定してすべて無次元表示を用いている。従って R_m は磁気 Reynolds 数、 R は Reynolds 数、 S は圧力数である。問題は二の方程式系からダイナモ作用をどのように取出すかに帰するが、その考え方に応じて基本的に次の型の理論に分れる。

A. 運動学的ダイナモ理論

速度場 u を仮定して (1.1) から B を決める方式をいい、理論は B について線形となる。

A.1 定常問題

(1.1) で $\partial B / \partial t = 0$ として

$$\nabla \times (u \times B) + \frac{1}{R_m} \nabla^2 B = 0 \quad (1.4)$$

から定常ダイナモを見つける。Bullard⁵⁾ の定式化では、球座標でモード α の

$$\left. \begin{aligned} \text{トロイダルベクトル: } T^\alpha &= \nabla \times [r Y^\alpha(\theta, \phi) T^\alpha(r)] \\ \text{ポロイダルベクトル: } S^\alpha &= \nabla \times \nabla \times [r Y^\alpha(\theta, \phi) S^\alpha(r)] \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

(Y^α は球調和関数、 T^α, S^α は動径関数) によって、ソレノイダルベクトル u, B を

$$u = \sum_{\alpha} (u_T^\alpha + u_S^\alpha), \quad (1.6)$$

$$B = \sum_{\beta} (B_T^\beta + B_S^\beta) \quad (1.7)$$

のように展開し、仮定された u_T^α, u_S^α の下で (1.4) が成立つ

R_m の固有値と対応する固有関数 B_T^0 , B_S^0 を求める構成である。このとき、展開初項 (軸対称モード $\alpha = \beta = 0$) で打ち切れば固有値はないことが証明できるが (Cowlingの定理²⁾)、一般論は容易でない。しかも、結果が仮定 (1.6) のモード数にきわめて敏感な点は、この理論にとって不利と思われる。例えば、 $\cos m\phi$, $\sin m\phi$ に依存するモードをそれぞれ $\alpha = 2C$, $2S$ と書くと

$$B-G \text{ モデル } ^{6)}: \quad U = U_T^0 + U_S^{2C}$$

はダイナモにならないが (Braginskiiの定理¹⁵⁾)、

$$B-G-L \text{ モデル } ^{16)}: \quad U = U_T^0 + U_T^{2C} + U_S^{2S}$$

には R_m の固有値が見いだされている。

A.2 乱流問題

上のような規則的な速度場ではなく、乱流場を仮定する。

Batchelor¹⁷⁾ は、 $S \rightarrow 0$ で (1.1) と (1.2) が同型となることから、 $R \gg 1$ の一様乱流において、同時に $R_m \gg 1$ ならば乱流渦度の増大 (カスケード過程) との類推で磁場増強の可能性があることを示した。しかし、このモデルでは

$$\langle B \rangle = \langle U \rangle = 0$$

である ($\langle \dots \rangle$ は統計平均を示す) から、規則的成分の成長を説明することにはならない。

B. 動力学的ダイナモ理論

u または w と B とを同時に考慮して、(1.1) と (1.2) を連立させるという意味で本来のMHD的取扱いである。その典型的な例は次節以下に詳しく述べるが、 A と比べて、

(i) $u = \bar{u} + \tilde{u}$, $B = B_0 + \tilde{B}$ ($\bar{u} = \langle u \rangle$, $B_0 = \langle B \rangle$) として、スケールが $\Lambda \equiv (L_0, T_0)$ の平均場 (規則的成分) と $\lambda \equiv (l_0, t_0)$ $\ll \Lambda$ の乱流場との相互作用に着目する2スケールモデルであること、

(ii) 特に、系の反転非対称性 (helicity) による効果として、スケール λ から Λ へのエネルギーの "leak back" (平均磁場の増幅) が示されること

に本質的な相違がある¹⁸⁾。この種の理論によって自励ダイナモの系が完全に記述されるかどうかは、物理的にも数学的にもなお今後の課題と思われるけれども、示唆に富む興味深い試みであることは疑えないであろう。なお、地磁気でも知られている磁場の逆転現象などについてはここでは触れない。

§2. ダイナモモデル

前節の概論に基づき、Moffatt^{8), 9)} の解析を中心に話を進める。

§2.1 Moffatt⁸⁾ の紹介

初めに $\bar{u} = B_0 = 0$ の状態にある乱流場に B_0 (ダイナモの種) を課したとすると、乱れは B_0 によってスケール λ で変化した

後に Λ で平均場との相互作用を起す。この相互作用の初期段階にのみ注目するならば、 $\Omega=0$ と仮定できる(仮定II)。こうすると、(1.1)式右辺第1項に対応して、平均誘導方程式には乱れの積平均 $\langle \tilde{u} \times \tilde{b} \rangle$ が含まれる。 $R_{ij} = \langle \tilde{u}_i \tilde{b}_j \rangle$ と置いて ε_{kij} を作用させると、 R_{ij} の対称部分は自動的に消え、非対称部のみが残る。従って、乱れが平均磁場に何らかの作用をする為には、「乱れの統計的性質が反転非対称である」ことが本質的に重要である(α効果⁷⁾, helicity 効果^{8)~12)}。

初めに存在していた速度の乱れの大きさ u_0 と長さ l_0 によって、Reynolds数 R , 磁気Reynolds数 R_m を定義する。 $R_m \ll 1 \ll R$ の場合には、初めの乱れを非電磁乱流と考えることができる。そこで、速度場は u_0 によって、磁束密度は加えた平均磁束密度 B_{00} によって無次元表示し、 u_0 と B_{00} とで圧力数 S を定義する。そして、スケール入の変数を (x_i, t) 、 Λ を (X_i, T) とし、スケール比を

$$\epsilon = l_0/L_0 \ll 1, \quad \tau = t_0/T_0 \ll 1 (t_0 \sim l_0/u_0) \quad (2.1)$$

とかくと、基礎方程式は、乱流場について近似的に

$$\frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial t} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{u}_l \tilde{w}_m) + S \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \{B_{0m} + \tilde{b}_m\} \frac{\partial \tilde{b}_k}{\partial x_m} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \tilde{b}_i}{\partial t} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_j} \{ \tilde{u}_l (B_{0m} + \tilde{b}_m) \} + \frac{1}{R_m} \frac{\partial^2 \tilde{b}_i}{\partial x_j^2} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \tilde{b}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.4)$$

となる。更に、 $S \ll 1$ ($S \gg \epsilon, \tau$) とすると、(2.2)式は初期乱れの式になる。(2.3)で、 $(B_0 \cdot \nabla) \tilde{u}$ によって誘起される $\tilde{b}$ のオーダーは、 $|\tilde{b}| \sim R_m |B_0|$ であるから(2.3)は

$$\nabla^2 \tilde{b} = -R_m (B_0 \cdot \nabla) \tilde{u} \quad (2.5)$$

となる。Fourier変換

$$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{b} \end{pmatrix} = \int e^{ik \cdot x} \begin{pmatrix} dZ(k, t, x, T) \\ dY(k, t, x, T) \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

及びスペクトルテンソル

$$\langle \tilde{u}_i \tilde{u}_j \rangle = \int \phi_{ij} dk \quad (2.7)$$

によって、(2.5)式から

$$\langle \tilde{u}_i \tilde{b}_j \rangle = R_m B_{0e} \int \frac{ik_e}{k^2} \phi_{ij} dk \quad (2.8)$$

を得る。乱れが等方的(反転非対称)とすると

$$\phi_{ij} = \frac{E}{4\pi k^2} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) + \frac{iF}{8\pi k^4} \epsilon_{ije} k_e \quad (2.9)$$

と表わされる(E : エネルギー・スペクトル, F : ヴリシティ・スペクトル $\langle \tilde{u} \cdot \tilde{\omega} \rangle = \int F dk$)から、これを(2.8)に代入して、結局

$$\epsilon_{ije} \langle \tilde{u}_j \tilde{b}_e \rangle = -R_m B_{0e} \int \frac{F}{4\pi k^6} k_i k_e dk$$

$$= \frac{\alpha}{3} R_m B_{0i} \quad (\alpha = -\int \frac{F}{k^2} dk) \quad (2.10)$$

を得る。従って、平均誘導方程式は

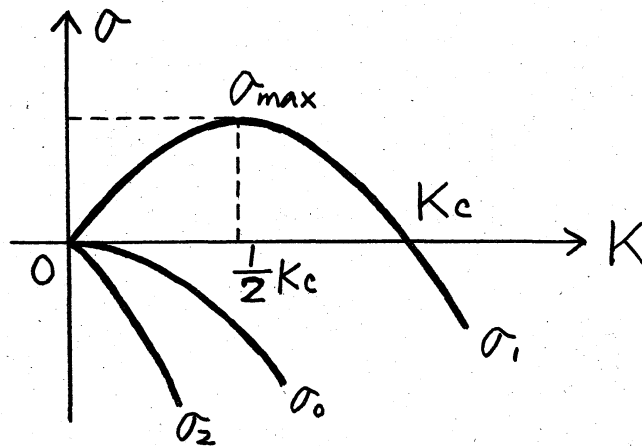
$$\frac{\tau}{\epsilon} \frac{\partial B_{0i}}{\partial T} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{\alpha}{3} R_m B_{0k} \right) + \frac{\epsilon}{R_m} \frac{\partial^2 B_{0i}}{\partial X_j^2} \quad (2.11)$$

となる。 $\epsilon = R_m^2$, $\tau = R_m \epsilon$ で、 Λ スケールで乱れが一様定常の場合には簡単になって、解

$$B_0 = B_{00} \exp(\sigma T + i \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}) \quad (2.12)$$

$$\sigma = -K^2 = \sigma_0$$

$$\sigma = -K^2 \pm \frac{1}{3} \alpha K = \sigma_1, \sigma_2 \quad \left. \vphantom{\sigma = -K^2 \pm \frac{1}{3} \alpha K} \right\} (2.13)$$



を持つ。よって、 $0 < K < K_c (= \frac{1}{3} |\alpha|)$ の領域では平均磁場が増幅する。そして、(2.12)によって平均速度は誘起されない。

平均磁場が大きくなるに連れ、 $S \ll 1$ の仮定が破れる。それ故、乱流場についてもう少し吟味してみよう。

§2.2 弱い乱れ

(2.2), (2.3)は乱れの2次量を含むので、パラメータの任意のオーダーについて解析する事は容易でない。とりあえずは、乱れが弱いものとし、線形近似する。(2.6)を用い、圧力項を消去すると、(2.2), (2.3)は

$$\frac{\partial}{\partial t} dZ_i = iSY dY_i \quad (2.14)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{k^2}{R_m}\right) dY_i = iY dZ_i \quad (2.15)$$

($Y = B \cdot B_0$)となり、 $(dZ_i, dY_i) = e^{\xi t} (d\hat{Z}_i, d\hat{Y}_i)$ とおいて、

$$\xi = -\frac{1}{2} \frac{k^2}{R_m} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \frac{k^4}{R_m^2} - SY^2} \quad (2.16)$$

を得る。 $SR_m^2 \ll 1$ ($\sqrt{SR_m}$ はLundquist数)の時、(2.16)は

$$\xi = \begin{cases} -\frac{R_m S}{k^2} Y^2 = \xi_1, \\ -\frac{k^2}{R_m} + \frac{R_m S}{k^2} Y^2 = \xi_2 \end{cases} \quad (2.17)$$

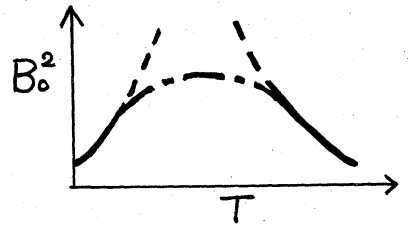
となる。初期分布(2.9)に対し、漸近形は

$$\langle \tilde{u}_i \tilde{b}_j \rangle \sim \int \frac{iY}{\xi_1 + k^2/R_m} \phi_{ij} e^{2\xi_1 t} dB, \quad (2.18)$$

従って、 $\xi_1 \neq 0$ の時(2.10)と一致するが、

$$\varepsilon_{ij} e \langle \tilde{u}_j \tilde{b}_i \rangle \sim \alpha_1 \left(\delta_{ij} - \frac{B_{0i} B_{0j}}{B_0^2} \right) B_{0j} \quad (2.19)$$

となつて、 B_0 方向成分は $t_0/(R_m S)$ 程度で減衰してしまう。
結局、Lorentz 力の作用によつて速度場が変化すると、平均磁場へのエネルギーの流れが小さくなって、図のような過程を辿ることになる。



次に、磁場が強い $SR_m^2 \gg 1$ の領域を吟味する。(2.16)から

$$\xi = \pm i\sqrt{S} \gamma - \frac{1}{2} \frac{k^2}{R_m} \quad (2.20)$$

となり、(2.9)を用いると

$$\varepsilon_{ij} e \langle \tilde{u}_j \tilde{b}_i \rangle = \int e^{-\frac{1}{2} \frac{k^2}{R_m} t} \frac{F k_i}{4\pi k^4 S} g \, dk \quad (2.21)$$

$$g = \frac{1}{2} \sin 2\sqrt{S} \gamma t + \frac{k^2}{2\sqrt{S} \gamma R_m} \sin^2 \sqrt{S} \gamma t$$

を得る。 $\gamma = R_m^{-1}$, $\epsilon \lesssim S^{-1}$ ($R_m \gg 1$, $S \gg 1$) の時、

$t = R_m T$ とおきかえ、(2.21)式の漸近形を求め、

$$B_0 = B_0(T) (\cos K_3 X_3, \mp \sin K_3 X_3, 0) \quad (2.22)$$

と置いて平均誘導方程式に代入すると、初期では

$$\frac{\partial B_0^2}{\partial T} = \pm \frac{K_3 \epsilon}{4 S} \int e^{-\frac{1}{2} k^2 T} F \, dk - \epsilon^2 K_3^2 B_0^2$$

$$\rightarrow B_0^2 \sim 1 \pm \frac{K_3 \epsilon}{4 S} T \int F \, dk \quad (2.23)$$

となる。そして、この場合にも平均速度を誘起しないことが示される。又、形式的に $R_m \rightarrow \infty$ とすると、(2.21)式は有意な解を持たないことがわかる。従って、乱流場が非対称性を保持し続けるためには、散逸効果を無視できないこと ($R, R_m < \infty$) が必要条件である。

§2.3 回転系中の慣性波 (Moffatt⁹⁾)

§2.2 ではスペクトル E と F とが独立であったが、方向成分間相互作用のある系では、両者は関連を持つ。ここでは、一定角速度 Ω で回転する系を伝播する波を考え、同様の仮定の下で議論する。コリオリ力と遠心力項を加え、波数空間で運動方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial t} dZ_i = iS\gamma dY_i - \frac{2}{R_0} \Delta_{ij} \varepsilon_{jem} \hat{\Omega}_e dZ_m \quad (2.24)$$

となる。但し、 R_0 は Rossby 数 ($R_0 = u_0 / \Omega l_0$) で、 $\hat{\Omega}$ は回転軸方向の単位ベクトル、 $\Delta_{ij} = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ である。(2.15), (2.24) から、変数を分離して

$$\xi = -\left(\frac{1}{2} \frac{k^2}{R_m} \pm i \frac{\gamma}{R_0}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2} \frac{k^2}{R_m} \pm i \frac{\gamma}{R_0}\right)^2 - S\gamma^2} \quad (2.25)$$

($\gamma = k \cdot \hat{\Omega} / k$) を得る。 $S=0$ の時、(2.24), (2.25) から (2.9) を用いて計算すると

$$F = \mp k E \quad (2.26)$$

となり、 Ω 方向に進む波は負のヘリシティ($F = -kE$)を持ち、 $-\Omega$ 方向では正となる。今、 Ω 方向の波だけを考え、 $SR_m^2 \ll 1$

$$E = \delta(k-1), \quad Q \equiv R_m/R_0$$

といて漸近形を計算すると

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} \langle \tilde{u}_j \tilde{b}_e \rangle &\sim A_{ij} B_{0j} \\ A_{ij} &= a_0 \delta_{ij} + (a_1 - a_0) \hat{\Omega}_i \hat{\Omega}_j \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\varepsilon_{ij} \langle \tilde{u}_j \tilde{b}_e \rangle} \right\} (2.27)$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{R_m}{4} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1-x^2}{1+4Q^2x^2} e^{2\Omega t} dx d\varphi \\ a_1 &= \frac{R_m}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{x^2}{1+4Q^2x^2} e^{2\Omega t} dx d\varphi \end{aligned} \quad \left. \vphantom{a_0} \right\} (2.28)$$

($\mu = -SR_m B_0^2 \mu^2 / (1+4Q^2x^2)$) となる。但し、 $\mu = k \cdot B_0 / B_0$

$\eta = B_0 \cdot \hat{\Omega} / B_0$ とおき、各方向余弦の間には、関係式

$$\mu = \eta x + \sqrt{(1-\eta^2)(1-x^2)} \cos \varphi \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi) \quad (2.29)$$

が成り立っている。 $e^{2\Omega t} \sim 1$ の時、(2.28)は

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{R_m}{8Q} \left\{ \left(1 + \frac{1}{4}Q^2\right) \arctan 2Q - \frac{1}{2Q} \right\} \\ a_1 &= \frac{R_m}{8Q^2} \left\{ 1 - \frac{1}{2Q} \arctan 2Q \right\} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{a_0} \right\} (2.30)$$

$$\begin{aligned} a_0 &= a_1 = \frac{1}{6} R_m \quad \text{at } Q=0 \\ a_0 &\sim \frac{\pi}{16} \frac{R_m}{Q}, \quad a_1 \sim \frac{1}{8} \frac{R_m}{Q^2} \quad \text{as } Q \rightarrow \infty \end{aligned} \quad \left. \vphantom{a_0} \right\} (2.31)$$

となる。この結果 Q の値全域にわたって平均場との相互作用が起るが、 Q の増加に伴ないその効果は小さくなる。 t_0 に対して $t_1 \sim t_0 R_0$ とおき、 $\epsilon = R_m^2 / Q$, $\tau = R_m^3 / Q^2 \ll t_0 / t_1$

とすると、(2.27)によって平均誘導方程式は、角速度が入スケールでも一定 ($\hat{\Omega} = (0, 0, 1)$ とおく) の場合には、解(2.12)を持ち、

$$\sigma = -K^2 \pm \frac{Q}{R_m} \{ a_0 a_1 (K_1^2 + K_2^2) + a_0^2 K_3^2 \}^{\frac{1}{2}} \quad (2.32)$$

であることがわかる。増幅領域では、 $B_0 \cdot \hat{\Omega} = 0$, $K = K \hat{\Omega}$ の時に最大増幅解

$$\sigma = -K^2 \pm \frac{Q}{R_m} a_0 K \quad (2.33)$$

を得る。この $\sigma_{\max} = \frac{1}{4} Q^2 a_0^2 / R_m^2$ と $K_c = Q |a_0| / R_m$ から、2つのスケールに対し、

$$\epsilon \sim QR_0^2 \ll 1, \text{ 及び } QR_0^4 \ll 1 \quad (2.34)$$

となり、 $Q \lesssim O(1)$ の時 $R_0 \ll 1$, $Q \gg 1$ の時 $1 \ll Q \ll R_0^{-2}$ を得る。但し、 Q があまりに大きくなると入スケールで一様性の仮定が破れる。又、(2.28)は $t \rightarrow \infty$ で

$$A_{ij} B_{0j} = a_3 B_{0i} \\ a_3 = \frac{R_m}{4} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi G dx d\varphi \quad (2.35)$$

$$G = \exp[-2SR_m B_0^2 t \cos^2 \varphi \{1 - (1 + 4Q^2)x^2\}]$$

となり、この場合も減衰する。

§2.4 Hall効果

Hall効果が顕著な系では、やはり方向成分間依達によって、(2.26)及び漸近形(2.19)が成り立つ事が示される。しかしその詳

細な議論は別の機会に譲りたい。

5.3. おわりに

以上の議論は、いずれも乱流場についての線形方程式に基づいている点が特徴である。ここでは(どのモデルに対しても)初期分布(2.9)を用いたが、より一般の分布に拡張するにあたって原理的な困難はない。又、最も簡単な場合に話を絞り、 Λ で初期分布が非一様⁷⁾、非対称外力¹⁰⁾などの扱いは省略した。

結局、数学的には乱流場の方程式から $R, R_m, S, \hat{B}_0 (=B_0/B_0)$, Λ などで規程される2階の反転非対称テンソル $\langle \tilde{u} \times \tilde{b} \rangle$ の具体的表式を求めることが主題であるが、ヘリシティ自体3次元特有の効果であるという事情もあって、取り扱いは何かと面倒である。線形近似の下で、ヘリシティ効果の持続と散逸効果との関連が示されたが、非線形への拡張も含めて今後の解析が期待されよう。

謝辞

9.2.2の内容について、大阪大学角谷典彦教授に有益な議論をしていただいたことを記して、感謝します。(舟田)

文 献

- 1) J.Larmor: Rep.Brit.Asoc.(1919)159.
- 2) T.G.Cowling: Month.Notices.Roy.Astron.Soc.94(1934)39.
- 3) W.M.Elsasser: Rev.Mod.Phys.28(1956)135.
- 4) 今井 功, 桜井 明: 電磁流体力学(1959) 岩波講座 現代物理学 V.H.
- 5) E.C.Bullard: Proc.Roy.Soc.London A 197(1949)433.
- 6) E.C.Bullard and H.Gellman: Phil.Trans.Roy.Soc.London A 247(1954)213.
- 7) M.Steenbeck, F.Krause and K.H.Rädler: Z.Naturforsch.21(1966)369.
P.H.Roberts and M.Stix: National Center for Atmospheric Research,Boulder
Colorado Tech.Note 1A-60(1971)に Steenbeck らの一連の研究のまとめがある.
- 8) H.K.Moffatt: JFM 41(1970)435.
- 9) H.K.Moffatt: JFM 44(1970)705.
- 10) H.K.Moffatt: JFM 53(1972)385.
- 11) H.K.Moffatt: Statistical models and turbulence.(ed.)M.Rosenblatt and
C.van Atta (1972) Springer.
- 12) H.K.Moffatt: JFM 65(1974)1.
- 13) P.H.Roberts: Lectures in applied mathematics.(ed.)W.H.Reid 14(1971)Amer.
Math.Soc.
- 14) H.K.Moffatt: JFM 57(1973)625.
- 15) S.L.Braginskii: Soviet Phys. JETP 20(1965)726.
- 16) F.E.M.Lilley: Pro.Roy.Soc.London A 316(1970)153.
- 17) G.K.Batchelor: Pro.Roy.Soc.London A 201(1950)405.
- 18) 大路通雄: 日本物理学会誌 28(1973)764.