

非一様拡散場におけるフロント進行波の応答

富山大学大学院理工学研究部 (理学) 池田 榮雄 (Hideo Ikeda)
Graduate School of Science and Engineering for Research
University of Toyama

1 はじめに

反応拡散方程式系は自然界におけるパターン形成や化学反応などにおける種々の現象を記述しており、様々な角度から研究が行われている。特に双安定系における空間一様な場合は、進行波が出現し、それが様々な状態遷移の時間発展の理解に有力な情報を与えている。自然界は大抵そうであるが、少なからず非一様な摂動を受けている。また、環境などによる非一様性の中での様々な状態遷移が起こっている。ここでは、一様な系では進行波が安定に存在する状況で、非一様な摂動が拡散係数に与えられたとき、その影響はどのように発展していくかを数学的厳密性を保ちながら考察したい ([1], [7], [8], [9])。特に、様々な応答に対する分水嶺解 (セパレータ) を明らかにしたい ([2])。

2 双安定非一様反応拡散方程式系

ここでは次のような双安定非一様反応拡散系を考える。

$$(1) \quad \begin{cases} \varepsilon \tau u_t &= \varepsilon^2 (D(x)u_x)_x + f(u, v) \\ v_t &= (D(x)v_x)_x + g(u, v) \end{cases}, t > 0, x \in \mathbf{R},$$

但し, $0 < \varepsilon \ll 1$, $D(x) = 1 + \lambda H(x)$, $f(u, v) = (u + \frac{1}{2})(\frac{1}{2} - u)(u - \frac{v}{2})$, $g(u, v) = u - v$ であり, $H(x)$ はヘヴィサイド関数である。また, $\tau > 0, \lambda$ は物理パラメータである。

$\lambda = 0$ とすると空間一様な反応拡散方程式系となり, $f(u, v) = 0, g(u, v) = 0$ は原点に関して点対称であるので, $(0, 0)$ 以外の 2 つの平衡解は同じ安定性を持つ (図 1)。このことから, 動座標 $z = x - ct$ を用いて変換すると, 次のような進行波解 (特に, 速度 $c = 0$ の進行波解) が存在する。

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u_{zz} + \varepsilon \tau c u_z + f(u, v) = 0 \\ v_{zz} + c v_z + g(u, v) = 0, z \in \mathbf{R} \\ (u, v)(-\infty) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (u, v)(\infty) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \end{cases}$$

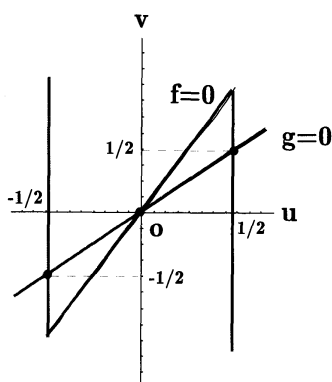


図 1 $f(u, v) = 0, g(u, v) = 0$ のグラフ。

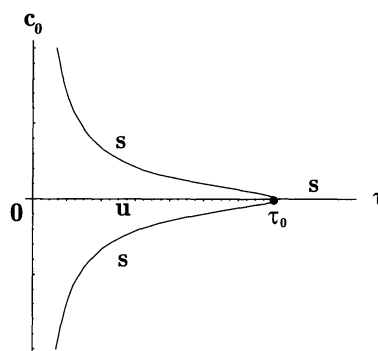


図 2 進行波解のブランチ。

時定数 τ を小さくすると, 止まっていた ($c = 0$) 進行波解から, $\tau = \tau_0$ で速度を持った進行波解が分岐する (図 2)。従って, $\tau < \tau_0$ とすると非零の速度を持った進行波解が存在し, 安定であることが分かって

いる ([5], [6])。この状態で、非一様な拡散が入る ($\lambda \neq 0$) とこの進行波解はどのような影響を受けるであろうか。まず、数値計算によると、発展方程式 (1) において、進行波解は図 3 のような 4 種類の応答を示すことがわかる。図 3 では、2 つのタイプの反射が示されているが、これは定性的に異なるので、A 型と B 型に分類した。A 型は進行波解は $x > 0$ の領域に侵入してから反射しているのに対し、B 型は $x > 0$ の領域に入る前に反射している (図 4(b),(d) 参照)。

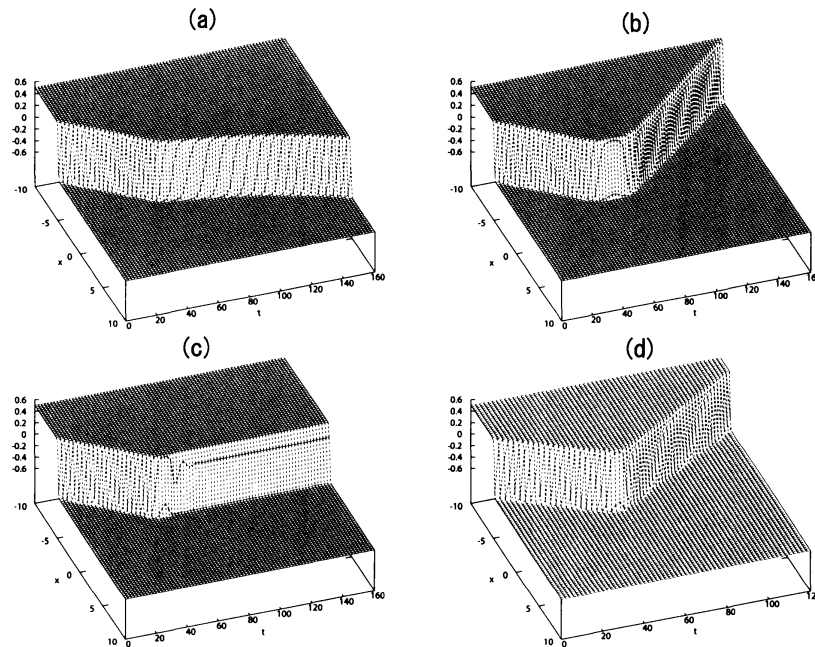


図 3 進行波解と非一様性の相互作用による応答. $u(x, t)$ の鳥瞰図 ($\varepsilon = 0.05, \tau = 0.174$). (a) 通過 ($\lambda = -0.09$), (b) 反射 A 型 ($\lambda = -0.10$), (c) 停止 ($\lambda = -0.12$), (d) 反射 B 型 ($\lambda = -0.16$).

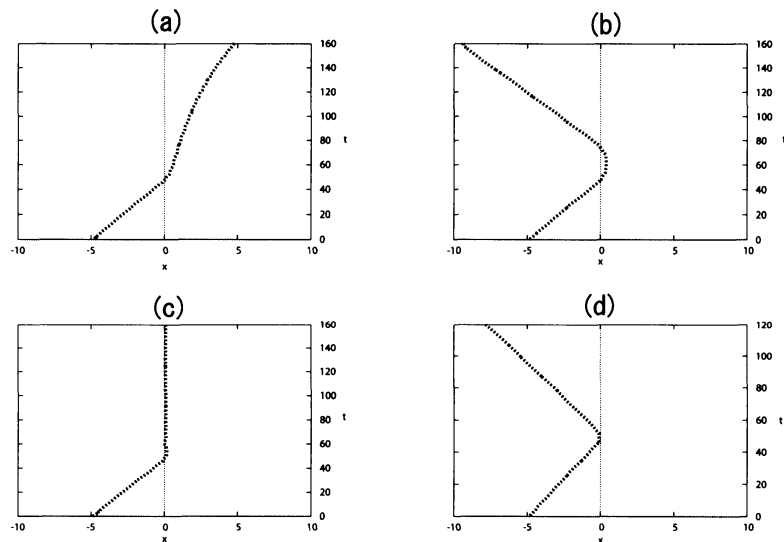


図 4 進行波解と非一様性の相互作用による応答. $u(x, t)$ の遷移層の位置のダイナミクス ($\varepsilon = 0.05, \tau = 0.174$). (a) 通過 ($\lambda = -0.09$), (b) 反射 A 型 ($\lambda = -0.10$), (c) 停止 ($\lambda = -0.12$), (d) 反射 B 型 ($\lambda = -0.16$).

3 常微分方程式系への縮約

$\tau = \tau_0 + \eta$ と置き, (1) を次のように書き換える。

$$(2) \quad \begin{cases} u_t = \frac{\varepsilon}{\tau}((1 + \lambda H(x))u_x)_x + \frac{1}{\varepsilon\tau}f(u, v) \\ = \frac{\varepsilon}{\tau}u_{xx} + \frac{1}{\varepsilon\tau}f(u, v) + \lambda\{\frac{\varepsilon}{\tau}u_{xx}H(x) + \frac{\varepsilon}{\tau}u_x\delta(x)\} \\ \equiv \frac{\varepsilon}{\tau}u_{xx} + \frac{1}{\varepsilon\tau}f(u, v) + \lambda h_1(x) \\ v_t = ((1 + \lambda H(x))v_x)_x + g(u, v) \\ = v_{xx} + g(u, v) + \lambda\{v_{xx}H(x) + v_x\delta(x)\} \\ \equiv v_{xx} + g(u, v) + \lambda h_2(x) \end{cases}$$

さらに (2) を

$$(3) \quad u_t = \mathcal{L}(u; \eta) + \lambda H(x, u; \eta)$$

と簡略化する。ここで, $\lambda = 0$ とする。このとき, 任意の $\tau > 0$ に対して, (3) は定常フロント解 $S(x)$ を持つ (図 2)。また, $\eta = 0$ ($\tau = \tau_0$) のとき, $\mathcal{L}(u; \eta)$ の $u = S(x)$ での線形化作用素を $L = \mathcal{L}'(S(x); 0)$ とする。(i) $LS'(x) = 0$, $L\Psi(x) = -S'(x)$ を満たす関数 $\Psi(x) \in L^2(\mathbf{R})$ が存在し (L は Jordan 型の退化を持つ), L の 0 以外の固有値は複素平面の左側にあることも分かる。 L の共役作用素を L^* とするとき, (ii) $L^*\Phi^*(x) = 0$, $L^*\Psi^*(x) = -\Phi^*(x)$ を満たす関数 $\Phi^*(x), \Psi^*(x) \in L^2(\mathbf{R})$ が存在する。ここで, これらの固有関数を正規化: $\langle \Psi, S' \rangle_{L^2} = 0$, $\langle S', \Psi^* \rangle_{L^2} = 1$, $\langle \Psi, \Psi^* \rangle_{L^2} = 0$ すると, Ψ, Φ^*, Ψ^* は一意に定まる。 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ は $\mathbf{R}$ 上の L^2 内積である。このとき, 次が成り立つ。

定理 ([1]) (2) あるいは (3) の解 $u(t, x)$ は $\eta, r(t), \lambda$ が小さいとき, $S(x - \ell(t)) + r(t)\Psi(x - \ell(t))$ で近似することが出来る。ここで, $\ell(t)$ は遷移層の位置を表している。さらに, $\ell(t), r(t)$ のダイナミクスは

$$(4) \quad \begin{cases} \ell_t(t) = r(t) - \frac{\lambda}{\varepsilon(\tau_0 + \eta)} \langle h_1(x + \ell), \psi_1^* \rangle_{L^2} - \lambda \langle h_2(x + \ell), \psi_2^* \rangle_{L^2} \\ \quad + O(|r|^3 + |\eta|^{\frac{3}{2}}) \equiv P_1(\ell, r) \\ r_t(t) = K(r; \eta) + \frac{\lambda}{\varepsilon(\tau_0 + \eta)} \langle h_1(x + \ell), \phi_1^* \rangle_{L^2} + \lambda \langle h_2(x + \ell), \phi_2^* \rangle_{L^2} \\ \quad + O(|r|^4 + |\eta|^2) \equiv P_2(\ell, r) \end{cases}$$

に従う。但し, $\Phi^*(x) = (\phi_1^*(x), \phi_2^*(x))$, $\Psi^*(x) = (\psi_1^*(x), \psi_2^*(x))$, $K(r; \eta) = M_1 r^3 + M_2 \eta r$ で, $M_1 = -\frac{1}{6} + O(\varepsilon)$, $M_2 = -\frac{4}{3\tau_0} + O(\varepsilon)$, $\tau_0 = \frac{1}{4\sqrt{2}}$ と計算出来る。

証明など詳しいことは [1] を参照して下さい。ここで特記したいことは, $f(u, v), g(u, v)$ にかなり特殊なもの (と言っても双安定のプロットタイプであるが) を使ったので, 上記の固有関数 $S'(x), \Psi(x), \Phi^*(x), \Psi^*(x)$ は特異摂動法を利用して計算出来ることである。そのお陰で非一様性の応答によるデリケートなダイナミクスを調べることが可能となっている (4 章参照)。

4 縮約系の解析

(4) において高次の項を無視し, 変数変換 $\lambda = \alpha\tau_0|\eta|$, $r = \sqrt{|\eta|}R$, $T = \sqrt{|\eta|}t$ を行うと

$$(5) \quad \begin{cases} \ell_T(T) = R - \alpha\sqrt{|\eta|}H_1(\ell; \varepsilon) \\ R_T(T) = \sqrt{|\eta|}(M_1 R^2 + \text{sgn}(\eta)M_2)R + \alpha H_2(\ell; \varepsilon) \end{cases}$$

が得られる。但し, $\text{sgn}(\eta) = -1$ ($\eta < 0$), $= 0$ ($\eta = 0$), $= 1$ ($\eta > 0$), $H_1(\ell; \varepsilon) = \langle h_1(x + \ell), \psi_1^* \rangle_{L^2} / \varepsilon + \tau_0 < h_2(x + \ell), \psi_2^* \rangle_{L^2}$, $H_2(\ell; \varepsilon) = \langle h_1(x + \ell), \phi_1^* \rangle_{L^2} / \varepsilon + \tau_0 < h_2(x + \ell), \phi_2^* \rangle_{L^2}$ である。

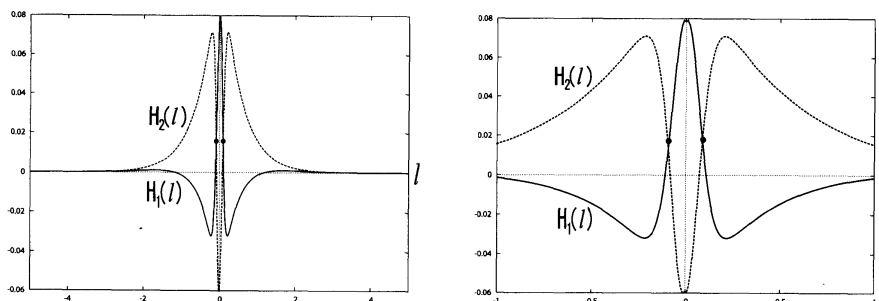


図 5 $H_1(\ell) = H_1(\ell; \varepsilon)$, $H_2(\ell) = H_2(\ell; \varepsilon)$ のグラフ ($\varepsilon = 0.05$). $H_1(\ell)$ と $H_2(\ell)$ は偶関数で, $\ell \rightarrow \pm\infty$ のとき, 0 に収束する。右図は原点近傍の拡大図。

(5) は 2 つの平衡解 $(\ell_1^*, R_1^*), (\ell_2^*, R_2^*)$ を持つ ($\ell_1^* < 0 < \ell_2^*, R_1^*, R_2^* \sim 0$)。図 3 の数値計算では、非一様性の強さを表すパラメータとして λ を用いたが、縮約系では変数変換 $\lambda = \alpha \tau_0 |\eta|$ により、 α に変換されている。従って、図 3 で用いられた $\lambda = -0.09, -0.10, -0.12, -0.16$ はそれぞれ $\alpha = -259, -260, -373, -505$ に変換される ($\tau_0 = 1/4\sqrt{2}, \eta = -0.002$)。詳細に関しては、[2] を参照。これらの α に対しては、 (ℓ_1^*, R_1^*) は鞍状点であり、 (ℓ_2^*, R_2^*) は安定渦状点である。これらの α に対する (5) の相図を描くと図 6 のようになる。

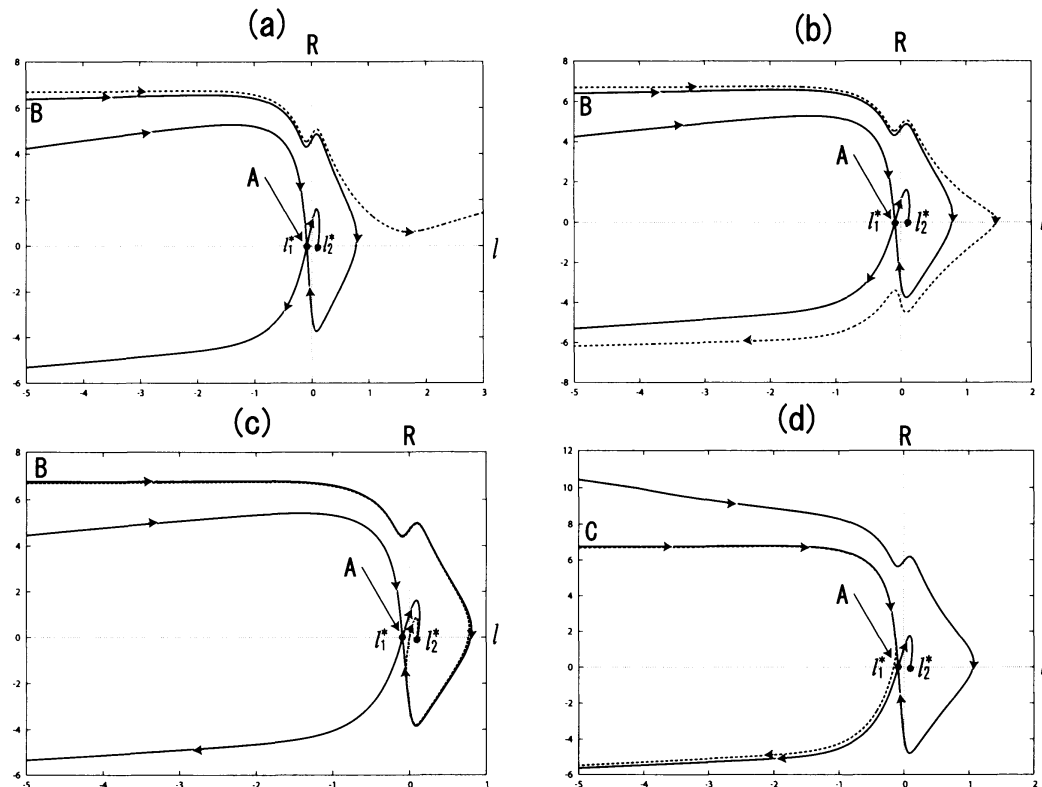


図 6 (4) の解軌道。実線は平衡点の安定、不安定多様体を表し、点線は初期値 $(\ell, R) = (-5.0, \sqrt{32\sqrt{5}})$ に対する解軌道を表す。(a) 通過 ($\alpha = -359$), (b) 反射 A 型 ($\alpha = -360$), (c) 停止 ($\alpha = -373$), (d) 反射 B 型 ($\alpha = -505$)。

図 3 では $\tau = 0.174$ を用いて数値計算を行っている。これは、 $\eta = -0.002$ に対応し、計算によって進行波解の速度 $R = \sqrt{32\sqrt{5}}$ に対応している。進行波解の遷移層の位置 $\ell = -5$ (図 3 を参照)、進行波解の速度 $R = \sqrt{32\sqrt{5}}$ は、縮約系 (5) の初期値として、 $(\ell, R) = (-5.0, \sqrt{32\sqrt{5}})$ を用いることに対応している (図 6)。図 6 では、各 α に対して、実線は 2 つの平衡点 $(\ell_1^*, R_1^*), (\ell_2^*, R_2^*)$ の安定、不安定多様体を表している。 $|\alpha|$ の値が大きくなるにつれて、図 6 の相図は上方向 (R 方向) に平衡移動しているように見える。そのため、初期値の位置 $(\ell, R) = (-5.0, \sqrt{32\sqrt{5}})$ は相対的に下方向 ($-R$ 方向) に移動することによって、それぞれの安定多様体を乗り越えて異なった吸引領域に属し、その結果、異なるダイナミクスを示す。それを仕分けしているもの (分水嶺解) は安定多様体である。

図 6 の (a), (b) では、初期値 $(\ell, R) = (-5.0, \sqrt{32\sqrt{5}})$ は共に (ℓ_1^*, R_1^*) の安定多様体 (軌道 AB) の上側に位置しているが、 α の大きさに依存して、通過 (a) あるいは反射 (b) に分けられる。この図では、この 2 つを分ける解軌道は見られない。しかし、この 2 つを分ける解軌道がこれらの間に存在していると想像することが出来る。文献 [7] では、 $\ell = \infty$ に存在する不安定な進行波解 (図 2 参照) の安定多様体がこの 2 つの状態を分けている分水嶺解であろうと推論している。これに関しては次節で詳しく考察する。(b) では、 ℓ は遷移層の位置を表していることに注意すれば、 $\ell > 0$ の領域まで進行した後、反射していることが分かる。すなわち、(a) は図 3 の (a) に、(b) は図 3 の (b) に対応していることが分かる。(c) では、初期値 $(\ell, R) = (-5.0, \sqrt{32\sqrt{5}})$ は (ℓ_1^*, R_1^*) の安定多様体 (軌道 AB) の下側に位置し、 (ℓ_2^*, R_2^*) の吸引領域に属するので、非一様性のために生じた定常解 (ℓ_2^*, R_2^*) に時間とともに近づく。 (ℓ_2^*, R_2^*) は安定渦状点であるので、振動的に近づくことも分かる。図 3 の (c) から、振動的に停止していることが覗える。(b) と (c) の 2 つの状態を分けているのは、 (ℓ_1^*, R_1^*) の安定多様体 (軌道 AB) であり、これが分水嶺解となっている。最後に (d) では、初期値 $(\ell, R) = (-5.0, \sqrt{32\sqrt{5}})$ は (ℓ_1^*, R_1^*) のもう 1 つの安定多様体 (軌道 AC) の下側に位置し、 $\ell > 0$ の領域に入ることなく、 (ℓ_1^*, R_1^*) の不安定多様体に沿って反射する。これは図 3(d) に対応している。

4 図 6 の (a) と (b) の分水嶺解

図 6 の (a) と (b) の分水嶺解を考察するために, Bump 型の非一様性 $D(x)$ を導入する. 正数 p に対して

$$D(x) = \begin{cases} 1 & (x < 0) \\ 1 + \lambda & (0 \leq x \leq p) \\ 1 & (x > p) \end{cases}$$

とおく. p をある程度大きくとり, 図 3 と同じ初期値を用いて数値計算を行うと, 非一様性の強さを表す λ に応じて, 次の図 7 のような応答が得られた.

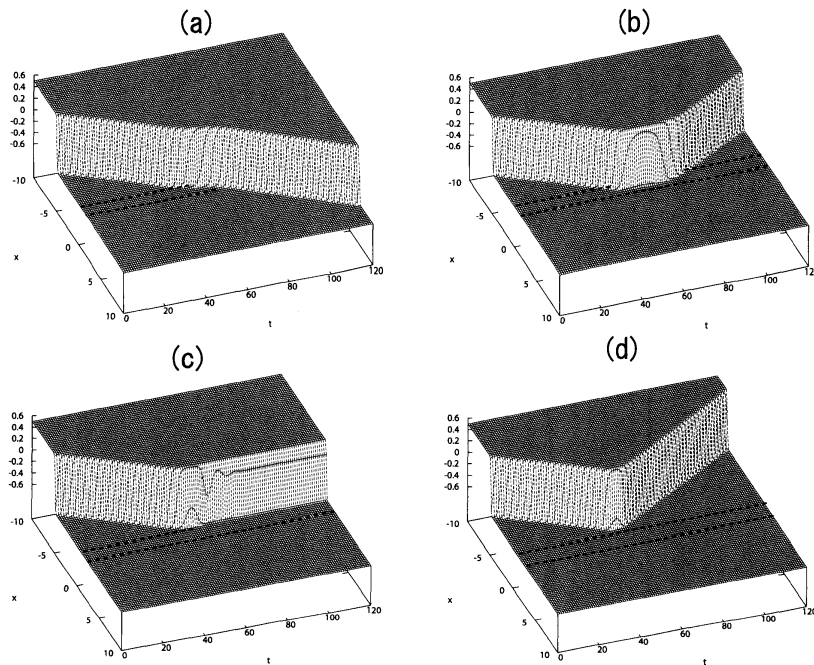


図 7 進行波解と Bump 型の非一様性との相互作用による応答. $u(x, t)$ の鳥瞰図 ($\varepsilon = 0.05, \tau = 0.174, p = 2.0$). (a) 通過 ($\lambda = -0.10$), (b) 反射 A 型 ($\lambda = -0.11$), (c) 停止 ($\lambda = -0.12$), (d) 反射 B 型 ($\lambda = -0.16$).

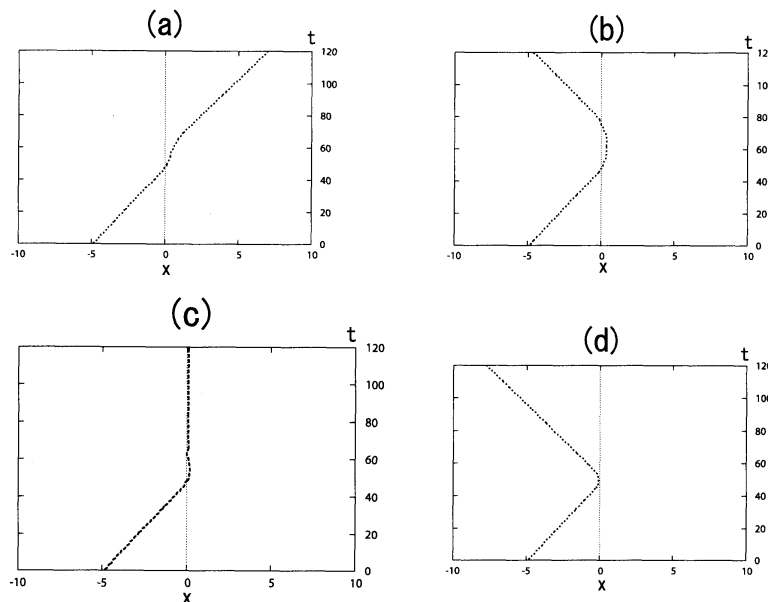


図 8 進行波解と Bump 型の非一様性との相互作用による応答. $u(x, t)$ の遷移層の位置のダイナミクス ($\varepsilon = 0.05, \tau = 0.174, p = 2.0$). (a) 通過 ($\lambda = -0.10$), (b) 反射 A 型 ($\lambda = -0.11$), (c) 停止 ($\lambda = -0.12$), (d) 反射 B 型 ($\lambda = -0.16$).

3 節の定理とこの bump 型の $D(x)$ を用いて縮約系を計算すると、(5) と同じ縮約系：

$$(6) \quad \begin{cases} \ell_T(T) = R - \alpha\sqrt{|\eta|}H_1(\ell; \varepsilon) \\ R_T(T) = \sqrt{|\eta|}(M_1R^2 + \text{sgn}(\eta)M_2)R + \alpha H_2(\ell; \varepsilon) \end{cases}$$

が得られるが、しかし $H_1(\ell; \varepsilon), H_2(\ell; \varepsilon)$ は前と異なるものである。このときの $H_1(\ell; \varepsilon), H_2(\ell; \varepsilon)$ のグラフは図 9 に示されている。まず、(6) の平衡解を考えよう。平衡解は

$$\begin{cases} 0 = R - \alpha\sqrt{|\eta|}H_1(\ell; \varepsilon) \\ 0 = \sqrt{|\eta|}(M_1R^2 + \text{sgn}(\eta)M_2)R + \alpha H_2(\ell; \varepsilon) \end{cases}$$

より得られるので、第 1 式より、 $R = \alpha\sqrt{|\eta|}H_1(\ell; \varepsilon)$ となり、これを第 2 式に代入すると、

$$(7) \quad \begin{cases} R = \alpha\sqrt{|\eta|}H_1(\ell; \varepsilon) \\ 0 = \sqrt{|\eta|}(M_1(\alpha\sqrt{|\eta|}H_1(\ell; \varepsilon))^2 + \text{sgn}(\eta)M_2)(\alpha\sqrt{|\eta|}H_1(\ell; \varepsilon)) + \alpha H_2(\ell; \varepsilon) \equiv F(\ell; \varepsilon) \end{cases}$$

となるので、 $F(\ell; \varepsilon) = 0$ の解を求めて、それを (7) の第 1 式に代入すれば平衡解 (ℓ^*, R^*) が求められる。 $F(\ell; \varepsilon)$ のグラフは図 10 に示されている。このグラフより、5 つの平衡解 (ℓ_i^*, R_i^*) ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) ($\ell_1^* < \ell_2^* < \ell_3^* < \ell_4^* < \ell_5^*$) が存在し、 $(\ell_1^*, R_1^*), (\ell_3^*, R_3^*), (\ell_5^*, R_5^*)$ は鞍状点であり、 $(\ell_2^*, R_2^*), (\ell_4^*, R_4^*)$ は安定渦状点であることが分かる。 p が小さい時は、様子は異なるが、それは別の機会に譲ることにする。

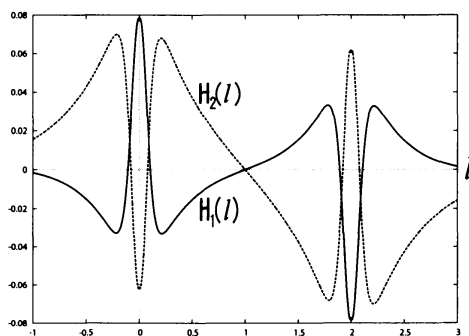


図 9 $p = 2.0$ のときの $H_1(\ell), H_2(\ell)$ のグラフ。

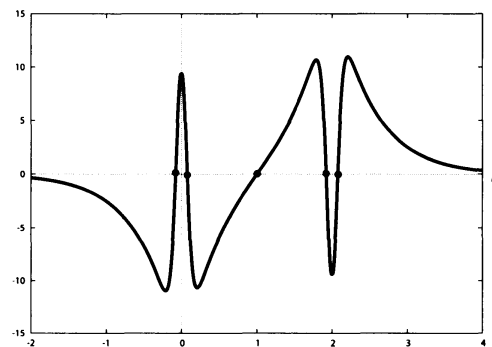


図 10 $p = 2.0$ のときの $F(\ell; \varepsilon)$ のグラフ。

これらの情報を基に、縮約系 (6) の相図を描くと、各 α の値に対して図 11 が得られる。これらの図の中で、白丸は安定な平衡点 (安定渦状点) を、黒丸は不安定平衡点 (鞍状点) を表している。また、矢印付きの実線は平衡点の安定、不安定多様体を表し、印付きの点線は初期値 $(\ell, R) = (-5.0, \sqrt{32\sqrt{5}})$ に対する解軌道を表す。

図 11 の (a), (b), (c), (d) は発展方程式 (1) の数値計算から得られた図 7, あるいは図 8 の (a), (b), (c), (d) にそれぞれ対応している。図 7 では、 $|\lambda|$ の値を徐徐大きく (非一様性を強く) しているが、図 11 では λ を別のパラメータ α に変換している。しかし、その大きさ (非一様性の強さ) は同じである。図 11(a) では、解軌道は平衡点 (ℓ_3, R_3) の安定多様体の上部に位置しており、図 11(b) では解軌道は平衡点 (ℓ_3, R_3) の安定多様体の下部、かつ平衡点 (ℓ_1, R_1) の 1 つの安定多様体の上部に位置している。このために、(a) では解軌道が Bump 領域を通過するが、(b) では Bump 領域に入るが、途中で反射している。すなわち、反射 A 型である。さらに、図 11(c) では、解軌道は平衡点 (ℓ_1, R_1) の 1 つの安定多様体の下部、かつ平衡点 (ℓ_1, R_1) のもう 1 つの安定多様体の上部に位置しているので、安定平衡点 (ℓ_2, R_2) に振動的に吸引される。つまり、遷移層は Bump 領域中に停止する。最後に図 11(d) では、解軌道は平衡点 (ℓ_1, R_1) のもう 1 つの安定多様体の下部に位置するので、遷移層は Bump 領域に入ることなく反射する。すなわち、反射 B 型となる。

ところで、図 12(a) と図 12(b) を比較すると、「通過」と「反射 A」を分けているものは、平衡点 (ℓ_3, R_3) の安定多様体 (太線) であることが分かる。図 6 では見ることが出来なかったが、非一様性を Bump 型にすることによって、図 6 の相図の描像を奇対称に配置することが可能となった。図 12 において、 p の値を大きくし、 $p = \infty$ とした極限が図 6 に対応していることになる。奇対称性から、平衡点 (ℓ_3, R_3) は ℓ 軸上にあり、 $R_3 = 0$ となる。このことから、平衡解 (ℓ_3, R_3) は、一様な状態 (Bump 領域が無限) での定常進行波解と一致する。この定常進行波解は不安定であり、その安定多様体が「通過」と「反射 A」を分けている分水嶺解となっていることが理解出来よう。これは、文献 [7] で述べられた推論が正しいことを示している。

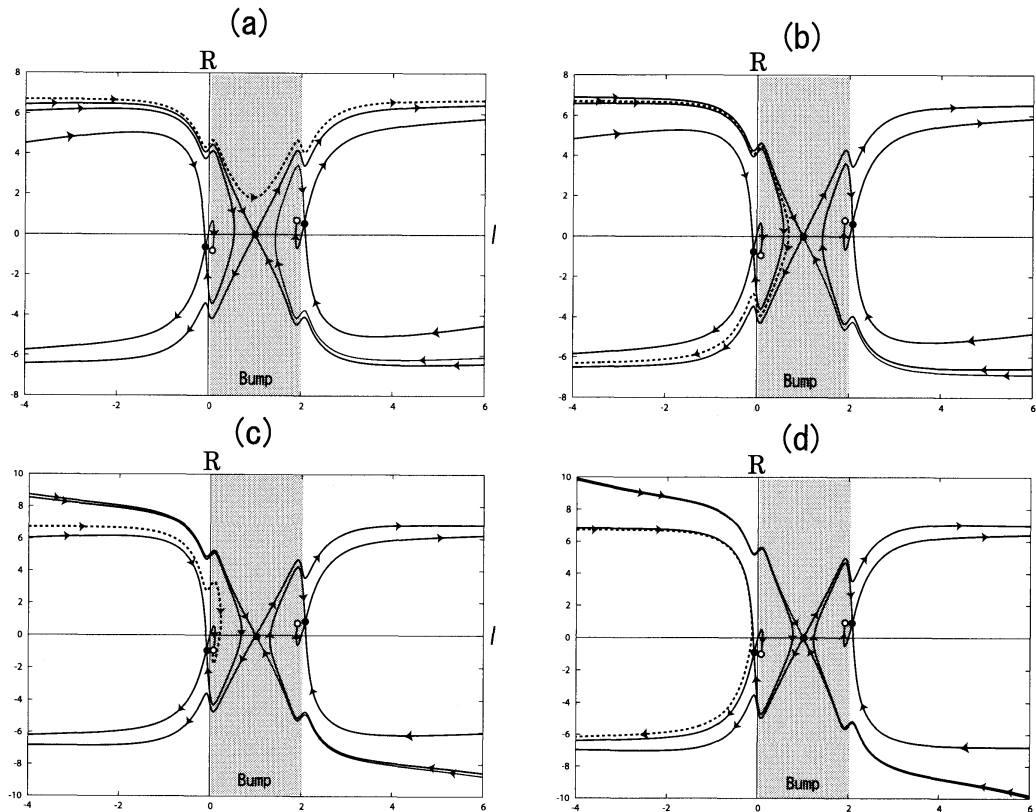


図 11 (5) の解軌道. 実線は平衡点の安定, 不安定多様体を表し, 点線は初期値 $(\ell, R) = (-5.0, \sqrt{32\sqrt{5}})$ に対する解軌道を表す. (a) 通過 ($\alpha = -300$), (b) 反射 A 型 ($\alpha = -320$), (c) 停止 ($\alpha = -400$), (d) 反射 B 型 ($\alpha = -450$).

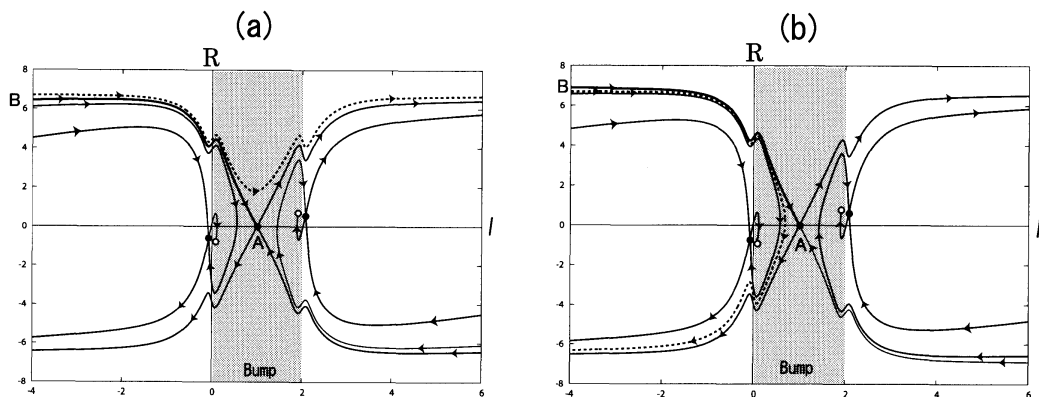


図 12 (5) の解軌道. 実線は平衡点の安定, 不安定多様体を表し, 点線は初期値 $(\ell, R) = (-5.0, \sqrt{32\sqrt{5}})$ に対する解軌道を表す. (a) 通過 ($\alpha = -300$), (b) 反射 A 型 ($\alpha = -320$).

参考文献

- [1] S.-I. EI, H. IKEDA AND T. KAWANA, *Dynamics of front solutions in a specific reaction-diffusion system in one dimension*, Japan J. Indust. Appl. Math., 25 (2008), 117-147.
- [2] H. IKEDA AND S.-I. EI, *Front dynamics in heterogeneous diffusive media*, Physica D, 239 (2010), 1637-1649.
- [3] H. IKEDA AND M. MIMURA, *Wave-blocking phenomena in bistable reaction-diffusion systems*, SIAM J. Appl. Math., 49 (1989), 515-538.
- [4] H. IKEDA AND M. MIMURA, *Stability analysis of stationary solutions of bistable reaction-variable diffusion systems*, SIAM J. Math. Anal., 22(1991), 1651-1678.

- [5] H. IKEDA, M. MIMURA AND Y. NISHIURA, *Global bifurcation phenomena of travelling wave solutions for some bistable reaction-diffusion systems*, Nonlinear Anal. 13 (1989), 507-526.
- [6] Y. NISHIURA, M. MIMURA, H. IKEDA AND H. FUJII, *Singular limit analysis of stability of travelling wave solutions in bistable reaction-diffusion systems*, SIAM J. Math. Anal. 21 (1990), 85-122.
- [7] Y. NISHIURA, Y. OYAMA AND K.-I. UEDA *Dynamics of traveling pulses in heterogeneous media of jump type*, Hokkaido Math. J. 36 (2007), 207-242.
- [8] J.P. PAUWELUSSEN *Nerve impulse propagation in a branching nerve system: a simple model*, Physica D 4 (1981), 67-88.
- [9] J.P. PAUWELUSSEN *One way traffic pulses in a neuron*, J. Math. Biology 15 (1982), 151-171.