

逐次解析の統計的構造

大阪市大 大学院 三浦良造

§ 1. 序と概論

逐次解析を測度論的に議論することを試みた。

ここでは、sequential procedure の sufficiency, dominatedness, completeness. を扱った。

$\mathcal{X}$ を点 x の集合とする。 $\mathcal{O}$ を $\mathcal{X}$ の部分集合のつくる σ -field とし、 ρ を $\mathcal{O}$ 上の確率測度の集合とする。このような $(\mathcal{X}, \mathcal{O}, \rho)$ を統計空間と呼ぶことにする。

逐次解析は、 $(\mathcal{X}, \mathcal{O}, \rho)$ において次の (i)(ii)(iii) に従って遂行される行為である。

(i) 各 n ($\neq 0$) について、 $\mathcal{O}_n \subseteq \mathcal{O}_{n+1}$ である $\mathcal{O}$ の sub σ -field の列 $\{\mathcal{O}_n\}_{0 \leq n \leq \infty}$ 。但し、 $\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}_\infty = \mathcal{O}$ とする。

(ii) 各 n について、 $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{O}_n$ である σ -field の列 $\{\mathcal{B}_n\}_{0 \leq n \leq \infty}$ 。

(iii) 各 n について、 $a_n(x)$ が $\mathcal{O}_n$ -可測である関数の列 $\{a_n(x)\}_{0 \leq n \leq \infty}$ 。

但し、 $a_n(x)$ は、 $\mathcal{X}$ から閉区間 $[0, 1]$ 上への関数で

すべての $x \in \mathcal{X}$ に対して $\sum_{0 \leq n < \infty} a_n(x) = 1$ をみたすものである。これは、stopping rule と呼ばれる。すなわち $x \in \mathcal{X}$ に対して、 $a_n(x)$ は x が n 回目の sampling で stop する確率である。

この設定は可算個の統計空間 $(\mathcal{X}^i, \mathcal{O}_n^i, \mathcal{P}^i), i = 1, 2, \dots$ の (カルテシアン) 直積空間を背景としておいている。すなわち、下のように対応している。

$$\begin{array}{ll} \mathcal{X} \longleftrightarrow \prod_{1 \leq i < \infty} \mathcal{X}^i, & \mathcal{O}_n \longleftrightarrow \prod_{1 \leq i < \infty} \mathcal{O}_n^i \\ \mathcal{P} \longleftrightarrow \prod_{1 \leq i < \infty} \mathcal{P}^i, & \mathcal{O}_n \longleftrightarrow \prod_{1 \leq i \leq n} \mathcal{O}_n^i \times \mathcal{X}^{n+1} \times \mathcal{X}^{n+2} \times \dots \end{array}$$

また、 $\{\mathcal{B}_n\}_{0 \leq n < \infty}$ は統計量の列 $\{T_n\}_{0 \leq n < \infty}$ に対応している。すなわち、各 n に対して $\mathcal{B}_n$ は T_n によって induce された σ -field に対応している。 T_n は $\mathcal{X}^1 \times \dots \times \mathcal{X}^n$ を定義域としているから $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{O}_n$ とおくのは自然である。

さて、ここでは stopping rule が non-randomized である場合だけを考えている。それは各 n について $a_n(x)$ が、すべての $x \in \mathcal{X}$ に対して $a_n(x) = 0$ または 1 をみたしている場合である。このとき各 n に対して、 $S_n = \{x \in \mathcal{X} : a_n(x) = 1\}$ とおけば、すべての $x \in \mathcal{X}$ に対して、 $a_n(x) = \chi_{S_n}(x)$ である。

従って non-randomized stopping rule $\{a_n\}_{0 \leq n \leq \infty}$ は、集合の列 $\mathcal{S} = \{S_n\}_{0 \leq n \leq \infty}$ でおきかえられる。以後、ここでは stopping rule と言えば non-randomized stopping rule のことであり、それを $\mathcal{S} = \{S_n\}_{0 \leq n \leq \infty}$ で表わすことにする。

なお、 $S_0 (\in \mathcal{S})$ は sampling をしないで決定を行う $x \in \mathcal{X}$ の全体である。逐次解析を始めるとき、まず、sampling をするかどうかを決めるのだが、少なくとも1回は sampling をするのであれば $S_0 = \phi$ であり、そうでなければ、 $S_0 = \mathcal{X}$ である。各 $n (0 < n < \infty)$ に対して S_n は n 回目で sampling を stop する $x \in \mathcal{X}$ の全体であり、 S_∞ はいつまでも sampling をやめない $x \in \mathcal{X}$ の全体である。

次に σ -field の列 $\{\mathcal{O}_n\}_{0 \leq n \leq \infty}$ 又は $\{\mathcal{B}_n\}_{0 \leq n \leq \infty}$ と stopping rule $\mathcal{S} = \{S_n\}_{0 \leq n \leq \infty}$ によって、つくられる $\mathcal{O}$ の sub σ -field $\mathcal{O}(\mathcal{S})$ 又は $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ を考える。これは各 n について、 S_n 上で $\mathcal{O}_n$ 又は $\mathcal{B}_n$ を考えた σ -field である。

$\mathcal{B}(\mathcal{S})$ は、統計量の列 $\{T_n\}_n$ があるとき $T_n(x_1, \dots, x_n)$ の値をみて、sampling を stop するかどうかを決め、 $T_n(x_1, \dots, x_n)$ の値を記録する場合、すなわち統計量 (N, T_N) に対応する。但し、 N は sampling を stop した番号とする。

推定量は、そこから推定される空間への関数である。統計量

の値を見て, sampling を stop し, 推定する場合は推定量が $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ -可測であることに対応している。

$\mathcal{O}(\mathcal{S})$ は, $(x_1, \dots, x_n)$ そのものを見て, 決定し, 記録する場合に対応する。

以上で述べたことより, 逐次解析における sufficiency, dominatedness, completeness を $(\mathcal{X}, \mathcal{O}(\mathcal{S}), \mathcal{P}), (\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{S}), \mathcal{P})$ において考えることは自然である。

§ 2. Sequential Procedure の Sufficiency.

$(\mathcal{X}, \mathcal{O}, \mathcal{P})$ において §1 で述べた $\mathcal{O}$ の sub- σ -field の列 $\{\mathcal{O}_n\}_n$ と $\{\mathcal{B}_n\}_n$ が与えられているとする。但し, $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_\infty = \mathcal{O}$ とする。

[定義 2.1] $\mathcal{X}$ の部分集合の列 $\mathcal{S} = \{S_n\}_{0 \leq n \leq \infty}$ が 次の (i)(ii)(iii) をみたすとき $\mathcal{S}$ が stopping rule であるという。

(i) 各 n に対して $S_n \in \mathcal{O}_n$

(ii) $\bigcup_{0 \leq n \leq \infty} S_n = \mathcal{X}$

(iii) 各 m, n ($m \neq n$) に対して, $S_m \cap S_n = \emptyset$.

[定義 2.2] stopping rule $\mathcal{S} = \{S_n\}_n$ が closed であるとはすべし $\mathcal{P} \in \mathcal{P}$ に対して $\mathcal{P}(\bigcup_{0 \leq n \leq \infty} S_n) = 1$, すなわち $\mathcal{P}(S_\infty) = 0$ をみたすことである。

$(\mathcal{X}, \mathcal{O}, \mathcal{P}, \{\mathcal{O}_n\}_n, \{\mathcal{B}_n\}_n, \mathcal{S})$ を sequential procedure と

呼ぶ。

以後、次の仮定をおく。

仮定[I]. $S_0 = \phi$.

仮定[II] stopping rule は closed.

[補題 2.1] $(\mathcal{X}, \mathcal{O}, \mathcal{P})$ において $\{\mathcal{B}_n\}_{0 \leq n \leq \infty}$ を $\mathcal{O}$ の sub σ -field の任意列とする。 $\mathcal{S} = \{S_n\}_{1 \leq n \leq \infty}$ を $\mathcal{O}$ -可測集合の列で次の (i) (ii) をみたすものとする。

$$(i) \bigcup_{1 \leq n \leq \infty} S_n = \mathcal{X}, \quad (ii) S_n \cap S_m = \phi, \quad (n \neq m).$$

このとき、 $\mathcal{B}(\mathcal{S}) = \left\{ \bigcup_{1 \leq n \leq \infty} (S_n \cap B_n) : B_n \in \mathcal{B}_n, 1 \leq n \leq \infty \right\}$

とおけば、 $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ は、 $\mathcal{O}$ の sub σ -field である。

[補題 2.2] $\{\mathcal{B}_n\}_n$ と $\mathcal{S}$ は補題 2.1 と同じものとする。 f を $\mathcal{O}$ - $\mathcal{P}$ -可積分関数とすると、任意の $p \in \mathcal{P}$ について次の等式が成り立つ。

$$E_p[f | \mathcal{B}(\mathcal{S})] = \sum_{1 \leq n \leq \infty} \frac{E_p[f \chi_{S_n} | \mathcal{B}_n]}{E_p[\chi_{S_n} | \mathcal{B}_n]} \chi_{S_n}, \quad [\mathcal{O}, p]$$

但し、各 n について、 $E_p[\chi_{S_n} | \mathcal{B}_n](x) = 0$ となる x に対して

は、 $\frac{E_p[f \chi_{S_n} | \mathcal{B}_n](x)}{E_p[\chi_{S_n} | \mathcal{B}_n](x)} = 0$ と定義する。

証明) 任意の n と任意の $B_n \in \mathcal{B}_n$ に対して

$$\begin{aligned} & \int_{S_n \cap B_n} \sum_{1 \leq n \leq \infty} \frac{E_p[f \chi_{S_n} | \mathcal{B}_n]}{E_p[\chi_{S_n} | \mathcal{B}_n]} \chi_{S_n} dp \\ &= \int_{\mathcal{X}} \frac{E_p[f \chi_{S_n} | \mathcal{B}_n]}{E_p[\chi_{S_n} | \mathcal{B}_n]} \chi_{S_n} \cdot \chi_{B_n} dp \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathcal{X}} \frac{E_p[f \chi_{S_n} | \mathcal{B}_n]}{E_p[\chi_{S_n} | \mathcal{B}_n]} E_p[\chi_{S_n} | \mathcal{B}_n] \cdot \chi_{\mathcal{B}_n} d\mathcal{P} \\
&= \int_{\mathcal{X}} E_p[f \cdot \chi_{S_n} \cdot \chi_{\mathcal{B}_n} | \mathcal{B}_n] d\mathcal{P} \\
&= \int_{S_n \cap \mathcal{B}_n} f d\mathcal{P}.
\end{aligned}$$

故に $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ の任意の元 $B = \bigcup_{1 \leq m \leq \infty} (S_m \cap \mathcal{B}_m)$ に対し、

$$\int_{\bigcup_m (S_m \cap \mathcal{B}_m)} \sum_n \frac{E_p[f \chi_{S_n} | \mathcal{B}_n]}{E_p[\chi_{S_n} | \mathcal{B}_n]} \chi_{S_n} d\mathcal{P} = \int_{\bigcup_m (S_m \cap \mathcal{B}_m)} f d\mathcal{P}. \quad (\text{証終})$$

[補題 2.3] $(\mathcal{X}, \mathcal{O}, \mathcal{P})$ において, $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ を $\mathcal{O}$ の任意の sub σ -field の組とし, $\mathcal{S} = \{S_1, S_2\}$ を $\mathcal{O}$ -可測集合の組で,

$S_1 \cap S_2 = \emptyset, S_1 \cup S_2 = \mathcal{X}$ をみたすものとする。

$$\mathcal{O}(\mathcal{S}) = \{(S_1 \cap A_1) \cup (S_2 \cap A_2) : A_i \in \mathcal{O}_i, i=1,2\}$$

とおけば次の (i) (ii) が成り立つ。

(i) 任意の $\mathcal{O}_i$ -可測関数 f に対して $f \chi_{S_i}$ は $\mathcal{O}(\mathcal{S})$ -可測である。 ($i=1,2$)。

(ii) S_i が $\mathcal{O}_i$ -可測集合であるとき, 任意の $\mathcal{O}(\mathcal{S})$ -可測関数 g に対して $g \chi_{S_i}$ は $\mathcal{O}_i$ -可測関数である。 ($i=1,2$)。

[定義 2.3] sequential procedure $(\mathcal{X}, \mathcal{O}, \mathcal{P}, \{\mathcal{O}_n\}_n, \{\mathcal{B}_n\}_n, \mathcal{P})$

が sufficient であるとは, $(\mathcal{X}, \mathcal{O}(\mathcal{S}), \mathcal{P})$ において, $\mathcal{B}(\mathcal{S})$

が $\mathcal{O}(\mathcal{S})$ に対して sufficient であること。

但し, $\mathcal{O}(\mathcal{S}), \mathcal{B}(\mathcal{S})$ の定義は, 補題 2.1 で与えたものである。

$\mathcal{O}(\mathcal{S}) \supseteq \mathcal{B}(\mathcal{S})$ は明らかである。

[定義 2.4] $\{B_n\}_{1 \leq n \leq \infty}$ が sufficient sequence であるとは.

各 n について B_n : suff. for $\mathcal{O}_n$ であること.

(注). $\mathcal{O}_\infty = \mathcal{B}_\infty = \mathcal{O}$ といっているから, 常に B_∞ : suff. for $\mathcal{O}_\infty$.

[定理 2.1] 任意の stopping rule $\mathcal{S} = \{S_n\}_{1 \leq n \leq \infty}$ に対して.

sequential procedure $(\mathcal{X}, \mathcal{O}, \mathcal{P}, \{\mathcal{O}_n\}_n, \{B_n\}_n, \mathcal{S})$ が.

sufficient であるための必要十分条件は $\{B_n\}_n$ が

sufficient sequence であること.

証明)

(十分) 任意の $\mathcal{O}(\mathcal{S})$ -可測集合 A に対して, その定義関数の $\mathcal{B}(\mathcal{S})$

に関する条件付期待値が $p \in \mathcal{P}$ に無関係であることも示す.

$A = \bigcup_{1 \leq n \leq \infty} (S_n \cap A_n)$, $A_n \in \mathcal{O}_n$, $(1 \leq n \leq \infty)$ と表わされる.

各 n について, $A \cap S_n = S_n \cap A$ である. そして $S_n \cap A_n$

$\in \mathcal{O}_n$, $S_n \in \mathcal{O}_n$ だから, B_n : suff. for $\mathcal{O}_n$ より.

$X_{S_n} \cdot X_{A_n}$, X_{S_n} の B_n に関する条件付期待値は.

p に無関係である. 補題 2.2 より, 任意の $p \in \mathcal{P}$ に対

$$\text{して, } E_p[X_A | \mathcal{B}(\mathcal{S})] = \sum_{1 \leq n \leq \infty} \frac{E_p[X_A \cdot X_{S_n} | B_n]}{E_p[X_{S_n} | B_n]} X_{S_n}, [\mathcal{O}, p]$$

$$= \sum_{1 \leq n \leq \infty} \frac{E[X_A \cdot X_{S_n} | B_n]}{E[X_{S_n} | B_n]} X_{S_n}.$$

故に左辺は p に無関係である.

(必要) 任意の n を固定して, $S_n = \mathcal{X}$, $S_m = \emptyset$ ($m \neq n$) であ

る stopping rule $\mathcal{S}$ を与えたと $\mathcal{B}(\mathcal{S}) = B_n$, $\mathcal{O}(\mathcal{S}) = \mathcal{O}_n$ で

ある。仮定より、 $B_n: \text{suff. for } \mathcal{O}_n$ となる。 n は任意であ
 ったから、 $\{B_n\}_n$ は sufficient sequence である。(証終)

[定理 2.2]

任意の stopping rule $\mathcal{S} = \{S_n\}_{1 \leq n \leq \infty}$ に対し、

$(\mathcal{X}, \mathcal{O}(\mathcal{S}), \mathcal{P})$ が dominated であるための必要十分条件
 は、各 n について ($n \neq \infty$), $(\mathcal{X}, \mathcal{O}_n, \mathcal{P})$ が dominated
 であること。

(証明)

(十分) 条件より、各 n について ($n \neq \infty$), $\mathcal{O}_n$ 上の σ -有界測度 μ_n
 が存在して、 μ_n は $(\mathcal{X}, \mathcal{O}_n, \mathcal{P})$ を dominate する。

任意の $\mathcal{O}(\mathcal{S})$ -可測集合 $A = \bigcup_{1 \leq n \leq \infty} (S_n \cap A_n)$ に対し、

$$\mu(A) = \sum_{1 \leq n < \infty} \mu_n(S_n \cap A_n) + \mathcal{P}(S_\infty \cap A_\infty).$$

(但し、 $\mathcal{P}$ は任意固定 $\in \mathcal{P}$) と定義すれば μ は $\mathcal{O}(\mathcal{S})$ 上の σ -有界
 測度である。 $(\mathcal{S}$ が closed であるから $\mathcal{P}(S_\infty \cap A_\infty) = 0$ である。)

また、 μ は $\mathcal{O}(\mathcal{S})$ 上の $\mathcal{P}$ を dominate する。

$$\textcircled{1} \mathcal{O}(\mathcal{S}) \ni A = \bigcup_{1 \leq n \leq \infty} (S_n \cap A_n) \text{ に対し}$$

$$\mu(A) = 0 \text{ ならば、各 } n (1 \leq n < \infty) \text{ に対して } \mu_n(S_n \cap A_n) = 0$$

$$\text{故に、任意の } \mathcal{P} \in \mathcal{P} \text{ に対して } \mathcal{P}(S_n \cap A_n) = 0. \quad (\text{~~② } \mu_n \text{ が } \mathcal{P} \text{ を dominate するから}~~)$$

従って、任意の $\mathcal{P} \in \mathcal{P}$ に対して、

$$\mathcal{P}(A) = \sum_{1 \leq n < \infty} \mathcal{P}(S_n \cap A_n) = 0.$$

(必要) 任意の n を固定して, $S_n = \mathcal{X}$, $S_m = \emptyset$ ($n \neq m$) である

stopping rule $\mathcal{S}$ を与えれば, $\mathcal{O}(\mathcal{S}) = \mathcal{O}_n$ となり, 条件より

$(\mathcal{X}, \mathcal{O}_n, \mathcal{P})$ は dominated である。 n は任意であった。(証明終)

任意の σ -field $\mathcal{B}$ と任意の部分集合 A に対して

$$\mathcal{B} \cap A = \{B \cap A : B \in \mathcal{B}\}$$

と定義する。

Bahadur の定理を用いて, dominatedness より得られる

$(\mathcal{X}, \mathcal{O}(\mathcal{S}), \mathcal{P})$, $(\mathcal{X}, \mathcal{O}_n, \mathcal{P})$, $(1 \leq n < \infty)$ の最小の sufficient sub σ -field を $\mathcal{B}^*$, $\mathcal{B}_n^*$, $(1 \leq n < \infty)$ とすれば, $\mathcal{B}^* \cap S_n \subseteq \mathcal{B}_n^* \cap S_n$, $[\mathcal{O}, \mathcal{P}]$, $(1 \leq n < \infty)$ である。なぜなら

$$\mathcal{B}^*(\mathcal{S}) = \left\{ \bigcup_{1 \leq n \leq \infty} (S_n \cap \mathcal{B}_n^*) : \mathcal{B}_n^* \in \mathcal{B}_n^*, 1 \leq n < \infty, \mathcal{B}_n^* \in \mathcal{O} \right\}$$

とおけば, 定理 2.1 より, $\mathcal{B}^*(\mathcal{S})$: suff. for $\{\mathcal{O}(\mathcal{S})\}$ である。

$\mathcal{B}^*$ の最小性より, $\mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{B}^*(\mathcal{S})$, $[\mathcal{O}, \mathcal{P}]$ であるから, 各 n ($1 \leq n < \infty$) に対して, $\mathcal{B}^* \cap S_n \subseteq \mathcal{B}^*(\mathcal{S}) \cap S_n = \mathcal{B}_n^* \cap S_n$, $[\mathcal{O}, \mathcal{P}]$ である。

しかし, この逆は, 成り立たない。

でも, 各 n ($1 \leq n < \infty$) について $S_n \in \mathcal{B}_n^*$ という条件を付加すれば, $\mathcal{B}^* \cap S_n = \mathcal{B}_n^* \cap S_n$ $[\mathcal{O}, \mathcal{P}]$ が成り立つ。それを示すために, $\mathcal{B}^* \cap S_n \subsetneq \mathcal{B}_n^* \cap S_n$, $[\mathcal{O}, \mathcal{P}]$ と仮定して矛盾を導こう。

$$\mathcal{B}_n^{*'} = \{ (S_n \cap B) \cup (S_n^c \cap \mathcal{B}_n) : B \in \mathcal{B}^*, \mathcal{B}_n \in \mathcal{B}_n^* \}$$

とおく。

$$(i) \mathcal{B}_n^{*'} \subsetneq \mathcal{B}_n^*, [\alpha, p]$$

$$\textcircled{1} S_n \cap \mathcal{B}_n^{*'} = S_n \cap \mathcal{B}_n^* \subsetneq S_n \cap \mathcal{B}_n^* \subset \mathcal{B}_n^*, [\alpha, p]$$

$$S_n^c \cap \mathcal{B}_n^{*'} = S_n^c \cap \mathcal{B}_n^* \subset \mathcal{B}_n^*$$

$$\therefore \mathcal{B}_n^{*'} \subsetneq \mathcal{B}_n^* [\alpha, p].$$

(ii) $\mathcal{B}_n^{*'} : \text{suff. for } \mathcal{O}_n.$

$\textcircled{2}$ f を $\mathcal{O}_n$ - p -可測積分関数とすれば

$$E_p[f | \mathcal{B}_n^{*'}] = \frac{E[f \chi_{S_n} | \mathcal{B}_n^*]}{E[\chi_{S_n} | \mathcal{B}_n^*]} \chi_{S_n} + \frac{E[f \chi_{S_n^c} | \mathcal{B}_n^*]}{E[\chi_{S_n^c} | \mathcal{B}_n^*]} \chi_{S_n^c} [\alpha, p].$$

右辺の第1項が p に無関係であるのは、 $f \chi_{S_n}, \chi_{S_n}$ が $\mathcal{O}(S)$ -可測関数だからである。

故に $\mathcal{B}_n^{*'} : \text{suff. for } \mathcal{O}_n.$

(i) と (ii) を合わせると、 $\mathcal{B}_n^*$ が $\mathcal{O}_n$ の最小の sufficient sub- σ -field であることに矛盾する。故に $\mathcal{B}^* \cap S_n = \mathcal{B}_n^* \cap S_n, [\alpha, p]$.
このことは、各 $n (1 \leq n < \infty)$ について成り立つ。

§ 3. Sequential Procedure の Completeness.

[定義 3.1] Sequential Procedure $(\mathcal{X}, \mathcal{O}, p, \{\mathcal{O}_n\}_n, \{\mathcal{B}_n\}_n, \delta)$ が complete であるとは $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(S), p)$ が complete であること。

(注) 任意の stopping rule に対して seq. proc. が complete ならば
各 $n (1 \leq n < \infty)$ について $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_n, p)$ が complete であること、
又、その逆は成り立たないことは、共に明らかである。

[定理 3.1] $\{B_n\}_n$ を sufficient sequence とする。

2つの seq. proc. $(\mathcal{X}, \mathcal{O}, \mathcal{P}, \{\alpha_n\}_n, \{B_n\}_n, \mathcal{S}_i)$ $i=1, 2$ が

それぞれ complete ならば, $\mathcal{S}_1 = \{S_n^1\}_n$, $\mathcal{S}_2 = \{S_n^2\}_n$ を合成した $\mathcal{S} = \{S_n\}_n$ を与えた seq. proc. $(\mathcal{X}, \mathcal{O}, \mathcal{P}, \{\alpha_n\}_n, \{B_n\}_n, \mathcal{S})$ は complete である。

但し, 合成した stopping rule $\mathcal{S}$ とは, $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ のどちらかが stop せよと命じたとき stop する stopping rule のことである。 $\mathcal{S} \ni S_n$ は, $S_n = S_n^1 \cup S_n^2 - \bigcup_{i=1}^{n-1} (S_i^1 \cup S_i^2)$ と表わせばよい。

定理の証明の前に補題を示す。

[補題 3.1]

$\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}$ を定理 3.1 で述べたものとする。このとき, $\mathcal{S}$ は stopping rule であり, $\alpha(\mathcal{S}_i) \geq \alpha(\mathcal{S})$, $i=1, 2$ である。

証明)

$\alpha(\mathcal{S}_1) \geq \alpha(\mathcal{S})$ を示す。

$\alpha(\mathcal{S})$ の任意の元 $A = \bigcup_{1 \leq n \leq \infty} (S_n \cap A_n)$ に対し,

任意の m に対して,

$$A \cap S_m^1 = (S_m^1 \cap \bigcup_{1 \leq n \leq m} (S_n \cap A_n)) \cup (S_m^1 \cap \bigcup_{m < n \leq \infty} (S_n \cap A_n))$$

第 1 項は α_m に属する。

① 各集合は α_n ($n \leq m$) に属し, $\alpha_n \subseteq \alpha_m$ である。

第 2 項は空である。

$$\textcircled{1} \text{ 第2項} = \bigcup_{m+1 \leq n < \infty} (S_m^1 \cap S_n \cap A_n)$$

$$\begin{aligned} & (S_n \text{ の定義より } n \geq m+1 \text{ ならば } S_m^1 \cap S_n = \emptyset) \\ & = \emptyset \end{aligned}$$

故に $A \cap S_m^1 \in \mathcal{O}_m$.

$$\text{よって } A = \bigcup_{1 \leq m < \infty} (A \cap S_m^1) \in \mathcal{O}(\mathcal{S}_1).$$

$\mathcal{O}(\mathcal{S}_2) \supseteq \mathcal{O}(\mathcal{S})$ も同様にしと示される。他は明らか。(証明終)

[補題 3.2]

$\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}$ を定理 3.1 で述べたものとする。 $A = \bigcup_{1 \leq n < \infty} (S_n \cap S_n^1)$ とおく。 $A_1 \subseteq A, A_2 \subseteq A, A_i \in \mathcal{O}, i=1,2$ に対して、

$$\mathcal{B}(\mathcal{S}_i)' = \{(A_i \cap B_1) \cup (A_i^c \cap B_2) : B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{S}_i)\} \text{ とおく。}$$

このとき、任意の $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ -可測関数 f に対して、 $f \chi_{A_i}$ は、

$\mathcal{B}(\mathcal{S}_i)'$ -可測である。(i=1,2.)

(証明)

まず、次のことをたしかめておく。

$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ を任意の sub σ -field とし、 A を任意の部分集合とする。 $\mathcal{O}_1 \cap A = \mathcal{O}_2 \cap A$ ならば任意の $\mathcal{O}_1$ -可測関数 f に対して、 $f \chi_A$ は $\mathcal{O}(A)$ -可測である。

$$\text{但し、} \mathcal{O}(A) = \{(A \cap A_1) \cup (A^c \cap A_2) : A_i \in \mathcal{O}_i, i=1,2\}.$$

さて、 $\mathcal{B}(\mathcal{S}) \cap A_i = \mathcal{B}(\mathcal{S}_i)' \cap A_i$ を示せばよいのだが、これは、 $\mathcal{S}$ と A の定義、 A_i の性質、 $\mathcal{B}(\mathcal{S}_i)'$ の定義を考慮合わせると明らかである。(証明終)

[補題 3.3] $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}$ を定理 3.1 で述べたものとする。

$A = \bigcup_{1 \leq i \leq \infty} (S_i^1 \cap S_i)$ とおく。このとき、任意の $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ - $\mathcal{P}$ -可積分関数 f に対して、次の (i) (ii) が成り立つ。

(i) $A \supseteq A_1, A_1 \in \mathcal{G}$ ならば、すべての $\mathcal{P} \in \mathcal{P}$ に対して

$$E_{\mathcal{P}}[f \chi_{A_1} | \mathcal{B}(\mathcal{G}_1)] \chi_{A_1} = E_{\mathcal{P}}[\chi_{A_1} | \mathcal{B}(\mathcal{G}_1)] \cdot f \chi_{A_1}, [\mathcal{G}, \mathcal{P}].$$

(ii) $A^c \supseteq A_2, A_2 \in \mathcal{G}$ ならば、すべての $\mathcal{P} \in \mathcal{P}$ に対して

$$E_{\mathcal{P}}[f \chi_{A_2} | \mathcal{B}(\mathcal{G}_2)] \chi_{A_2} = E_{\mathcal{P}}[\chi_{A_2} | \mathcal{B}(\mathcal{G}_2)] \cdot f \chi_{A_2}, [\mathcal{G}, \mathcal{P}].$$

(証明)

(i), (ii) を同時に証明する。

$$\mathcal{B}(\mathcal{G}_i)' = \{ (A_i \cap B_1) \cup (A_i^c \cap B_2) : B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{G}_i) \}$$

とおく。

$$\begin{aligned} & E_{\mathcal{P}}[f \chi_{A_i} | \mathcal{B}(\mathcal{G}_i)'] \\ &= \frac{E_{\mathcal{P}}[f \chi_{A_i} | \mathcal{B}(\mathcal{G}_i)]}{E_{\mathcal{P}}[\chi_{A_i} | \mathcal{B}(\mathcal{G}_i)]} \chi_{A_i} + \frac{E_{\mathcal{P}}[f \chi_{A_i} \chi_{A_i^c} | \mathcal{B}(\mathcal{G}_i)]}{E_{\mathcal{P}}[\chi_{A_i^c} | \mathcal{B}(\mathcal{G}_i)]} \chi_{A_i^c}, [\mathcal{G}, \mathcal{P}]. \\ &= \frac{E_{\mathcal{P}}[f \chi_{A_i} | \mathcal{B}(\mathcal{G}_i)]}{E_{\mathcal{P}}[\chi_{A_i} | \mathcal{B}(\mathcal{G}_i)]} \chi_{A_i}. \end{aligned}$$

$f \chi_{A_i}$ は $\mathcal{B}(\mathcal{G}_i)'$ -可測である。

$$\text{故に } E_{\mathcal{P}}[f \chi_{A_i} | \mathcal{B}(\mathcal{G}_i)'] = f \chi_{A_i}, [\mathcal{G}, \mathcal{P}].$$

$$\text{よって } f \chi_{A_i} = \frac{E_{\mathcal{P}}[f \chi_{A_i} | \mathcal{B}(\mathcal{G}_i)]}{E_{\mathcal{P}}[\chi_{A_i} | \mathcal{B}(\mathcal{G}_i)]} \chi_{A_i}$$

$$A_i \text{ 上で } E_{\mathcal{P}}[\chi_{A_i} | \mathcal{B}(\mathcal{G}_i)] > 0, [\mathcal{G}, \mathcal{P}]$$

$$\text{だから } E_{\mathcal{P}}[f \chi_{A_i} | \mathcal{B}(\mathcal{G}_i)] \chi_{A_i} = E_{\mathcal{P}}[\chi_{A_i} | \mathcal{B}(\mathcal{G}_i)] \cdot f \chi_{A_i}.$$

(証明終)

(定理 3.1 の証明)

$\mathcal{B}(\mathcal{S})$ - $\mathcal{P}$ -可積分関数 f がすべての $\mathcal{P} \in \mathcal{P}$ に対して $\int_{\mathcal{X}} f d\mathcal{P} = 0$ ならば $f = 0$, $[\mathcal{O}, \mathcal{P}]$ を示す。

$\mathcal{B}(\mathcal{S}_1)$: suff. for $\mathcal{O}(\mathcal{S}_1)$, $\mathcal{O}(\mathcal{S}_1) \supset \mathcal{O}(\mathcal{S}) \supset \mathcal{B}(\mathcal{S})$ だから.

f を $\mathcal{O}(\mathcal{S}_1)$ -可測関数とみなせば, f の $\mathcal{B}(\mathcal{S}_1)$ に関する条件付き期待値は $\mathcal{P}$ に無関係である。故に $E[f | \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)](x)$ と表わす。

$$\text{仮定より } \int_{\mathcal{X}} E[f | \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)] d\mathcal{P} = \int_{\mathcal{X}} f d\mathcal{P} = 0.$$

これがすべての $\mathcal{P} \in \mathcal{P}$ について成り立つので.

$(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{S}_1), \mathcal{P})$ の completeness より.

$$E[f | \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)](x) = 0 \quad [\mathcal{O}, \mathcal{P}].$$

同様にして.

$$E[f | \mathcal{B}(\mathcal{S}_2)](x) = 0. \quad [\mathcal{O}, \mathcal{P}].$$

$$A = \bigcup_{1 \leq i \leq \infty} (S_i \cap S_i^c) \text{ とおく.}$$

$$0 = E[f | \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)](x) \quad [\mathcal{O}, \mathcal{P}]$$

$$= E[f \chi_A | \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)](x) + E[f \chi_{A^c} | \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)](x)$$

$$= E[f \chi_A | \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)](x) \cdot \chi_A(x) + E[f \chi_A | \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)](x) \cdot \chi_{A^c}(x)$$

$$+ E[f \chi_{A^c} | \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)](x)$$

$$[\text{補題 3.3}], = E[\chi_A | \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)] \cdot f \cdot \chi_A + E[f \chi_A | \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)] \chi_{A^c}$$

$$+ E[f \chi_{A^c} | \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)]. \quad [\mathcal{O}, \mathcal{P}].$$

また 同様にして.

$$0 = E[f \chi_A | \mathcal{B}(\mathcal{S}_2)] + E[f \chi_{A^c} | \mathcal{B}(\mathcal{S}_2)] \chi_A + f \chi_{A^c} \cdot E[\chi_{A^c} | \mathcal{B}(\mathcal{S}_2)]$$

$$[\mathcal{O}, \mathcal{P}]$$

これだけの準備をしておいて, n に関する帰納法を用いて,
各 n について $P\{\{x: f(x) \neq 0\} \cap \bigcup_{i=0}^n S_i\} = 0$ がすべての $P \in \mathcal{P}$ につ
いて成り立つことを示す。(帰納法をきれいにやるために,
ここでは, S_0 をもちだすことにする。)

(i) $n=0$ のとき $S_0 = \emptyset$ (仮定 [I]) だから

$P\{\{x: f(x) \neq 0\} \cap S_0\} = 0$ がすべての $P \in \mathcal{P}$ に対して成り立つ。

(ii) $n=m$ のとき成り立つならば, $n=m+1$ のとき成り立つ
ことを示す。

$M = \{x: f(x) \neq 0\}$ とおく。

$(M \cap \bigcup_{i=0}^{m+1} S_i)$ を $(M \cap \bigcup_{i=0}^{m+1} S_i \cap A)$ と $(M \cap \bigcup_{i=0}^{m+1} S_i \cap A^c)$ に分け,

それぞれについて, すべての $P \in \mathcal{P}$ に対して, 測度が
ゼロであることを示す。

A は最初に定義したものである。

任意の $P \in \mathcal{P}$ に対して

$$\begin{aligned} & P\{M \cap \bigcup_{i=0}^{m+1} S_i \cap A\} \\ &= P\{M \cap \bigcup_{i=0}^m S_i \cap A\} + P\{M \cap S_{m+1} \cap A\} \\ &= P\{M \cap S_{m+1} \cap A\} \end{aligned}$$

$$(*) \leq P\{\{x: E[\chi_A | \mathcal{B}(\mathcal{G}_1)](x) = 0\} \cap S_{m+1} \cap A\}$$

$$= 0 \quad (**) \text{ } A \text{ 上では, } E_P[\chi_A | \mathcal{B}(\mathcal{G}_1)] > 0, [Q, P].$$

$$(*) \text{ は, } M \cap S_{m+1} \cap A \subseteq \{x: E[\chi_A | \mathcal{B}(\mathcal{G}_1)] = 0\} \cap S_{m+1} \cap A \text{ による.} \\ [Q, P].$$

①前に得た等式

$$0 = E[X_A | \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)] \cdot f \cdot \chi_A + E[f \chi_A | \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)] \chi_{A^c} + E[f \chi_{A^c} | \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)], \quad [\mathcal{O}, \mathcal{P}]$$

から, $S_{m+1} \cap A$ 上で $E[f \chi_{A^c} | \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)](x) = 0$. $[\mathcal{O}, \mathcal{P}]$ を示せばよい.

示されれば, A 上で $E[X_A | \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)] \chi_{A^c} = 0$. 従って

$$0 = E[X_A | \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)] \cdot f \cdot \chi_A, \quad [\mathcal{O}, \mathcal{P}]$$

を得る。故に $f(x) \neq 0$ ならば A 上では, $E[X_A | \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)](x)$

$= 0$ ならざるを得ない。すなわち上の包含関係が成り

立つ。

$$S_{m+1} \cap A \text{ 上で } E[f \chi_{A^c} | \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)] = 0. \quad [\mathcal{O}, \mathcal{P}].$$

① A の定義より $S_{m+1} \cap A = S_{m+1}^1 \cap A$. 従って

$$S_{m+1}^1 (\in \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)) \text{ 上で示せば十分。}$$

任意の $p \in \mathcal{P}$ と任意の $B \in \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)$ に対して

$$\begin{aligned} & \int_{B \cap S_{m+1}^1} E[f \chi_{A^c} | \mathcal{B}(\mathcal{S}_1)] dp \\ &= \int_{\mathcal{X}} \chi_B \cdot \chi_{S_{m+1}^1} \cdot f \cdot \chi_{A^c} \cdot dp \\ &= 0. \quad \left(\textcircled{1} S_{m+1}^1 \cap A^c \subset \bigcup_{i=0}^m S_i \right) \end{aligned}$$

さて、- オ、すなわちこの $p \in \mathcal{P}$ に対して

$$\begin{aligned} & p \notin M \cap \bigcup_{i=0}^{m+1} S_i \cap A^c \\ &= p \notin M \cap S_{m+1} \cap A^c \\ &\leq p \{ \{x : E[\chi_{A^c} | \mathcal{B}(\mathcal{S}_2)] = 0 \} \cap S_{m+1} \cap A^c \} \\ &= 0 \end{aligned}$$

は、前に得た等式

$$0 = E[f\chi_A | \mathcal{B}(\mathcal{S}_2)] + E[f\chi_{A^c} | \mathcal{B}(\mathcal{S}_2)]\chi_A + f\chi_{A^c} \cdot E[\chi_{A^c} | \mathcal{B}(\mathcal{S}_2)]$$

を用いて、全く同様に示される。

これで、すべての $p \in \mathcal{P}$ に対して、 $p\{M \cap \bigcup_{i=0}^{m+1} S_i\} = 0$ が示された。

以上により、各 $n (0 \leq n < \infty)$ に対して、すべての $p \in \mathcal{P}$ に対して、 $p\{M \cap \bigcup_{i=0}^n S_i\} = 0$ 。

なお、仮定 [II] より、すべての $p \in \mathcal{P}$ に対して、 $p\{S_\infty\} = 0$ 。

$$\text{従って、 } p\{M \cap \bigcup_{0 \leq i \leq \infty} S_i\} = p\{M \cap \bigcup_{1 \leq i \leq \infty} S_i\} = \lim_{n \rightarrow \infty} p\{M \cap \bigcup_{i=1}^n S_i\} = 0.$$

これが、すべての $p \in \mathcal{P}$ について成り立つ。

すなわち、 $f(x) = 0$ 、 $[\Omega, \mathcal{P}]$ 、(証明終)。

[定義 3.2] $\text{seq. proc. } (\mathcal{X}, \mathcal{O}, \mathcal{P}, \{\mathcal{O}_n\}_n, \{\mathcal{B}_n\}_n, \mathcal{S})$ を番号 n で truncate するとは、 $\mathcal{S} \ni S_n$ を、 $S'_n = (\bigcup_{i=1}^{n-1} S_i)^c$ で置きかえること。(但し、 $n \neq \infty$)

[系 3.1]

各 $n (1 \leq n < \infty)$ に対して、 $(\mathcal{X}, \mathcal{O}_n, \mathcal{P})$ が complete であるとき、complete $\text{seq. proc. } (\mathcal{X}, \mathcal{O}, \mathcal{P}, \{\mathcal{O}_n\}_n, \{\mathcal{B}_n\}_n, \mathcal{S})$ を任意の番号で truncate して得られる seq. proc. は、complete である。但し、 $\{\mathcal{B}_n\}_n$ は、sufficient seq. とする。

(証明)

任意の n を fix する。

$S_n = \tau$ である stopping rule を δ と書くと、 $B(S_n) = B_n$ であるから $\text{seq. proc. } (\tau, \mathcal{O}, \mathcal{P}, \{\mathcal{O}_n\}_n, \{B_n\}_n, \delta_n)$ は complete である。 δ と δ_n を合成して得られる stopping rule を与えたものが truncated seq. proc. であるから、定理 3.1 より、それは complete である。(証終)。

[定義 3.3] $S_n = \tau$ である stopping rule を与えた procedure を fixed sample size の procedure という。

[定理 3.2] $\text{seq. proc. } (\tau, \mathcal{O}, \mathcal{P}, \{\mathcal{O}_n\}_n, \{B_n\}_n, \delta)$ が complete ならば、任意の $p \in \mathcal{P}$ と m, n に対して、 $\mathbb{P}_m$ -可積分関数 $h(x)$ が、 $E_p[h(X_{S_m}) | B_n](x) = 0$, $[\mathcal{O}, p]$ をみたすとき、 $h(x) X_{S_m}(x) = 0$, $[\mathcal{O}, p]$ が成り立つ。

(証明)

対偶を示す。 $m = n$ のときは明らかだから $m \neq n$ としておく。

ある $p \in \mathcal{P}$ と、 m, n が存在し、かつ、ある B_m -可積分関数 $h(x)$ と、 $p(N) > 0$ である $N \in B_m$ が存在して、

$$E_p[h(X_{S_m}) | B_n](x) = 0, \quad [\mathcal{O}, p].$$

$$h(x) X_{S_m}(x) \neq 0, \quad x \in N.$$

をみたすことを示す。

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in S_i \quad (i \neq m) \\ h(x), & x \in S_m \end{cases}$$

と定義すれば、 F は $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ -可積分関数で

すべての $p \in \mathcal{P}$ に対して、

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}} F d p &= \int_{\mathcal{X}} E_p[F | \mathcal{B}_n] d p \\ &= \int_{\mathcal{X}} E_p[F \chi_{S_m} | \mathcal{B}_n] d p + \int_{\mathcal{X}} E_p[F \chi_{S_m^c} | \mathcal{B}_n] d p \\ &= 0 \end{aligned}$$

しかし、 $p\{x: F(x) \neq 0\} = p(N) > 0$.

これは、 $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{S}), p)$ の completeness に矛盾する。(証明終)

[定理 3.3] 各 n ($1 \leq n < \infty$) に対して、 $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_n, p)$ が complete であり、seq. proc. $(\mathcal{X}, \mathcal{Q}, p, \{\mathcal{Q}_n\}_n, \{\mathcal{B}_n\}_n, \mathcal{S})$ が sufficient かつ complete であるとする。このとき、

任意の $p \in \mathcal{P}$ に対して、

$$\text{命題 (A)} \quad \left(\begin{array}{l} p(S_{n-1}) > 0, \quad p(S_n) > 0 \text{ であり,} \\ \mathcal{Q}_{n-1} \ni A, \quad \mathcal{B}_n \ni B \text{ に対して} \\ p(A) > 0, \quad p(B) > 0 \\ \text{ならば } p(A \cap B) > 0 \end{array} \right.$$

が成り立つ n ($\neq \infty$) は、存在しない。

証明)

対偶を示す。

ある p_0 に対して, このような N_0 があつたとせよ。

N_0 で truncate した procedure が complete でないことを示せば, 系 3.1 より, もとの procedure は complete でない。

S_{N_0} を $S'_{N_0} = (\bigcup_{i=1}^{N_0-1} S_i)^c$ におきかえる。このとき, $\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{M}_{N_0-1}$ $i=1, 2, \dots, N_0-1$ より, $S'_{N_0} \in \mathcal{M}_{N_0-1}$, もちろん $S'_{N_0} \in \mathcal{M}_{N_0}$ でもある。
また $S_{N_0} \subseteq S'_{N_0}$ だから $p_0(S'_{N_0}) > 0$ 。

おきかえた stopping rule (truncated) を δ_{N_0} と書く。

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \bigcup_{i=1}^{N_0-1} S_i \\ 1 & , x \in S_{N_0-1} \\ -\frac{E[X_{S_{N_0-1}} | \mathcal{B}_{N_0}](x)}{E[X_{S'_{N_0}} | \mathcal{B}_{N_0}](x)} & , x \in S_{N_0} \end{cases} \quad \textcircled{1} \mathcal{B}_{N_0}: \text{suff. for } \mathcal{M}_{N_0}$$

と定義すれば: F は $\mathcal{B}(\delta_{N_0})$ -可測関数(可積分)である。

なお, F の定義は $p \in \mathcal{P}$ に依存しない。

また, $E[X_{S'_{N_0}} | \mathcal{B}_{N_0}](x) > 0$, $[\mathcal{M}, p_0]$ である。

① $X_{S'_{N_0}} \geq 0$ だから $E[X_{S'_{N_0}} | \mathcal{B}_{N_0}] \geq 0$, $[\mathcal{M}, p_0]$ 。

仮に $B \in \mathcal{B}_{N_0}$ が存在して,

$$p_0(B) > 0, \quad E[X_{S'_{N_0}} | \mathcal{B}_{N_0}](x) = 0, \quad x \in B$$

をみたすならば:

$$\int_B E[X_{S'_{N_0}} | \mathcal{B}_{N_0}] dp = p(S'_{N_0} \cap B) = 0.$$

これは, 命題 (4) に矛盾する。

このことは, 次の等式の $\textcircled{*}$ の箇所で用いられる。

$B(S_{n_0}) \subseteq \mathcal{G}_{n_0}$ だから, B_{n_0} : suff. for $\mathcal{G}_{n_0}$ より, F の B_{n_0} に関する条件付期待値は, p に無関係である。

あつてこの $p \in \mathcal{P}$ に対して.

$$\begin{aligned} E[F | B_{n_0}] &= E[F X_{S_{n_0}}^{\vec{0}, \vec{1}} | B_{n_0}] + E[F X_{S_{n_0-1}} | B_{n_0}] \\ &\quad + E[F X_{S_{n_0}'} | B_{n_0}] \\ &= E[X_{S_{n_0-1}} | B_{n_0}] + E\left[-\frac{E[X_{S_{n_0-1}} | B_{n_0}]}{E[X_{S_{n_0}'} | B_{n_0}]} X_{S_{n_0}'} | B_{n_0}\right] \\ \textcircled{*} &= E[X_{S_{n_0-1}} | B_{n_0}] - E[X_{S_{n_0-1}} | B_{n_0}] \\ &= 0, \quad [\mathcal{G}, p_0]. \end{aligned}$$

故に, あつてこの $p \in \mathcal{P}$ に対して.

$$\int_{\mathcal{P}} F dp = \int_{\mathcal{P}} E[F | B_{n_0}] dp = 0.$$

しかし, F は少なくとも S_{n_0-1} 上で: ゼロでない値をとり,

$p_0(S_{n_0-1}) > 0$ である $p_0 \in \mathcal{P}$ が存在する。

故に truncated procedure は complete でない。(証明終)

[例1] $X_1, X_2, \dots$ をそれぞれ, 平均未知, 分散既知の正規分布に従う独立確率変数とする。 $T_n = \sum_{i=1}^n X_i$ とすれば: fixed sample size の procedure は, complete であるが fixed でない。どんな procedure を考えてみても定理 3.3 の命題 (A) が成り立つ, ので complete でない。

参考文献

[1] Bahadur, R.R. (1954)

"Sufficiency and statistical decision functions."

A.M.S. Vol. 25. 423 ~ 462.

[2] Berk, R.H. (1967)

"Strong consistency of certain sequential estimators."

A.M.S. Vol. 40. No. 4 1492 ~ 1495.

[3] Lehmann, E.L. & Charles Stein (1950)

"Completeness in the sequential case."

A.M.S. Vol. 21. 376 ~ 385.

~~[4]~~