

代数曲面上の vector bundle

名大 理 竹本史夫

序 k を代数的閉体, X を k 上 non-singular 既約射影代数多様体とする。(以後, これを仮定する) 次の問題を考える。rank と numerically chern class を定めた X 上の vector bundle 全体は, algebraic family に成るか? つまり, k -algebraic scheme によって parametrize されるか。 X が曲線の場合 indecomposable bundle に制限すれば, 成り立つことが知られている (Atiyah [1])。又, 曲面の場合 indecomposable に制限するだけでは algebraic family にならない例がある (Atiyah [1])。そこで Mumford [5] が 曲線上の vector bundle の moduli を構成した際, 定義した stable bundle の概念を拡張して, stable bundle に制限すれば, 曲面上では algebraic family になる (定理)。

§1. X が一般次元の場合

vector bundle と locally free sheaf of finite rank とを混同して用いる。だから line bundle は, rank 1 の locally free

sheaf 又は 同じ事であるか invertible sheaf を意味する。任意の coherent sheaf $\mathcal{F}$ に対して, X についての仮定より, invertible sheaf $\text{Inv}(\mathcal{F})$ が定義できる (first chern class Mumford [6]). つまり $\mathcal{E}_i$ を locally free sheaf $\mathcal{E}_i$ による $\mathcal{F}$ の finite resolution とすると, $\text{Inv}(\mathcal{F}) = \bigotimes_i (\bigwedge^{\text{rank}(\mathcal{F})} \mathcal{E}_i)^{-D_i}$ ここで $\bigwedge$ は highest exterior power. そのとき, $\text{Inv}(\mathcal{F})$ は自然な同型を除いて $\mathcal{F}$ にのみ依存する. 次の事は容易にわかる.

i) もし $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ が coherent sheaf の exact sequence とすると, そのとき自然な同型 $\text{Inv}(\mathcal{F}) \simeq \text{Inv}(\mathcal{F}') \otimes \text{Inv}(\mathcal{F}'')$ がある.

ii) もし $\mathcal{F}$ が locally free ならば, $\text{Inv}(\mathcal{F}) = \bigwedge^{\text{rank}(\mathcal{F})} \mathcal{F}$.

iii) もし $\mathcal{F}$ が torsion sheaf ならば, $\text{Inv}(\mathcal{F}) = \mathcal{O}_X(D)$. ここで D は positive Cartier divisor.

又, 任意の coherent sheaf $\mathcal{F}$ に対して, $\mathcal{F}$ の rank が定義できる. つまり, ξ を X の generic point とする. $\text{rank}(\mathcal{F}) = r(\mathcal{F}) = \dim_{\mathcal{O}_{X,\xi}} \mathcal{F}_{\xi}$. $\mathcal{F}$ が torsion であるのは, $\text{rank}(\mathcal{F}) = 0$ のときのみである.

X が曲線の場合 stable の定義 (Mumford [5])

vector bundle E が stable とは, すべての non-trivial quotient bundle $\mathcal{F}$ に対して, $\delta(E) < \delta(\mathcal{F})$. ここで $\delta(E) = \deg(E)/\text{rk}(E)$.

ところで, X が曲線の場合, 任意の vector bundle は, line bundle の extension で表わされるが, X が 2 次元以上のときは, 一般には quotient vector bundle は存在しないから,

stable の定義を次の様にする。 $\mathcal{H}$ を very ample line bundle on X 。 X の次元を n とする。

定義 vector bundle E が $\mathcal{H}$ -weakly stable (resp. $\mathcal{H}$ -weakly semi stable) とは, すべての non-trivial, not torsion, coherent quotient sheaf $\mathcal{F}$ に対して, $d_{\mathcal{H}}(E) < d_{\mathcal{H}}(\mathcal{F})$ (resp. $\leq$)。

ここで, $d_{\mathcal{H}}(E) = (\text{Inv}(\mathcal{F}) \cdot \mathcal{H}^{n-1}) / r(\mathcal{F})$ ($(,)$ は intersection number

X が 曲線の場合 locally free と torsion free とは同値となることに注意すれば, Mumford の定義と我々の定義と一致することは容易にわかる。定義より次の性質は容易 (Mumford [5])。

1. line bundle は, 必ず $\mathcal{H}$ -weakly stable。
2. もし L が line bundle ならば, そのとき E が $\mathcal{H}$ -weakly stable と $E \otimes L$ が $\mathcal{H}$ -weakly stable とは同値。
3. もし E_1, E_2 が 2つの vector bundle とすれば, $E_1 \oplus E_2$ は決して $\mathcal{H}$ -weakly stable でない。
4. もし rank 2 の vector bundle が $\mathcal{H}$ -weakly semi stable でないならば, そのとき $d_{\mathcal{H}}(\mathcal{F})$ が最小になる rank 1 の unique coherent quotient sheaf が存在する。

Prop. $\mathcal{H}$ -weakly stable vector bundle は, simple である。
 E が simple であるとは, E の global な endomorphism は constant だけ, i.e. $P(X, \text{End}(E)) = k$ 。証明は 曲線の場合 [7] と同様。

§ 2. 以下 X が曲面の場合. 前と同様に $\mathcal{H}$ を very ample line bundle on X とする.

定義 vector bundle E が $\mathcal{H}$ -stable (resp. $\mathcal{H}$ -semi stable) とは, ① E は $\mathcal{H}$ -weakly stable (resp. $\mathcal{H}$ -weakly semi stable) ② C を $|\mathcal{H}|$ に含まれるすべての non-singular curve とすると, E の C への制限が C 上 indecomposable (resp. $E = \bigoplus E_i$, E_i の Remark 分解, 各 E_i の C への制限が C 上 indecomposable).

定義 vector bundle E が $\mathcal{H}$ -strongly stable (resp. $\mathcal{H}$ -strongly semi stable) とは, C を $|\mathcal{H}|$ に含まれるすべての non-singular curve とすると, E の C への制限が stable (resp. semi stable).

上の定義の相互関係は, $\mathcal{H}$ -strongly stable $\Rightarrow \mathcal{H}$ -stable $\Rightarrow \mathcal{H}$ -weakly stable $\Rightarrow \mathcal{H}^{\otimes n}$ -stable ある $n > 0$. (resp. semi stable)

注1. 一般には $\mathcal{H}$ -weakly stable は $\mathcal{H}$ -stable にはならない. 例えば, $X = \mathbb{P}^2$, $\mathcal{H} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$, E を rank 2 の simple bundle on X とし, §3 の Prop. 5) E は $\mathcal{H}$ -weakly stable とするが 任意の $C \in |\mathcal{H}|$ は $\mathbb{P}^1$ に同型だから $E|_C$ は decomposable.

注2. $\mathcal{H}$ が特別な line bundle のとき, $\mathcal{H}$ -strongly stable と $\mathcal{H}$ -stable は同値. 例えば, $C \in |\mathcal{H}|$ non-singular curve が "elliptic" で, $d_{\mathcal{H}}(E) = d$, $r(E) = r$ が $(r, d) = 1$ のとき.

X 上の vector bundle の集合 A が algebraic family を成すとは, algebraic $\mathbb{k}$ -scheme T , $T \times_{\mathbb{k}} X$ 上の vector bundle $\mathcal{E}$ が存在して,

A の任意の元 F に対して, 次のような T の closed point σ が存在する。 $\mathcal{E}_\sigma \subset F$ 。

定理 X を non-singular projective surface とする。 X 上の $\mathcal{H}$ -semi stable vector bundle $\mathcal{E}$, rank $\leq$ numerically chern class を定めたものの全体は, algebraic family をなす。

証明は, Atiyah [1], Kleiman [3] と次の lemma を使えばよい。

lemma E を rank $\leq r$ の $\mathcal{H}$ -weakly semi stable vector bundle で $d_{\mathcal{H}}(E) \leq 0$ とする。 そのとき, $\dim_{\mathbb{P}} P(X, E) \leq r$ 。

Mumford の stable の定義に於いて quotient bundle に注目すると, 曲面上のすべての vector bundle は, 適当な有限回の σ -process の後には, line bundle の extension になる事 (Schwarzenberger [8], 一般次元の X については Hironaka [2], Kleiman [4]) を考慮に入れれば, 又 stable の定義が出来るが, これは前の定義と同じ。 つまり, E が $\mathcal{H}$ -weakly stable であることと, 次の事は同値。 X の任意の有限回 σ -process $\pi: X' \rightarrow X$ と, $\pi^*(E)$ の任意の non-trivial quotient bundle E' に対して, $d_{\mathcal{H}}(E)/r(E) < d_{\mathcal{H}}(E')/r(E')$ ここで $d_{\mathcal{H}}(E') = (\pi^*\mathcal{H}, \text{Inr}(E'))$ 。

§3. 曲面上 rank 2 の vector bundle

曲面上のすべての vector bundle E は, extension $0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow 0$ で得られることが知られている。 ここで F は rank 2 の vector bundle,

この事から曲面上の vector bundle の分類に於いて, rank 2 の vector bundle が重要である。以下 rank 2 の vector bundle のみ考える。 $N(E) = C^2(E) - 4C(E)$ とおくと, 任意の line bundle L に対して $N(E \otimes L) = N(E)$ が成り立つ。この $N(E)$ は次の様な意味をもつ。 L を E の quotient line bundle とすると, 自然な projection $p: P(E) \rightarrow X$ に対して L は section s を定義する。 $s(X) = Y$ とおくと, $(Y^2)_{P(E)} = N(E)$ である。この事より, p の section の image の self-intersection number は, section s のとりえに依存しないことがわかる。次の事が成り立つ。

Prop. rank(E)=2, $N(E) > 0$ のとき, weakly stable bundle の定数は, very ample line bundle H の $(\cdot, \cdot)$ による。 (更に X が abelian surface のときは, $N(E)=0$ の場合も成り立つ)。

Prop. $X = \mathbb{P}^2$, rank(E)=2 のとき, weakly stable と simple は同値。 (このとき $N(E) < 0$)。

この事より, $X = \mathbb{P}^2$ 上には stable bundle が多く存在する事がわかる。

文 献

- [1] Atiyah, M.F., Vector bundles over an elliptic curve, Proc. London Math. Soc. (3) 7 (1957) 414-452
- [2] Hirronaka, H., Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, I, II, Annals of Math. vol. 79 (1964) 109-326

- [3] Kleiman, S., Les theoremes de finitude pour le foncteur de Picard, SGA 6 exposé 13
- [4] Kleiman, S., Geometry on Grassmannians and applications to splitting bundles and smoothing cycles,
Publ. Math. I.H.E.S. no. 36 p281-297
- [5] Mumford, D., Projective invariants of projective structures and applications, Proc. Inter. Congress Math. Stockholm (1962) 526-530
- [6] Mumford, D., Geometric invariant theory Springer-Verlag 1965
- [7] Narasimhan, M.S. and C.S. Seshadri, Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface,
Ann. of Math vol. 86 (1965) 540-567
- [8] Schwarzenberger, R.L.E., Vector bundles on algebraic surfaces,
Proc. London Math. Soc. (3) 11 (1961) 601-622