

On Quasi-Buchsbaum Rings and Modules

静岡薬科大学 鈴木直義 (Naoyoshi Suzuki)

講演では、後藤四郎、山岸規久道由氏との共著で準備中の論文[9]の一部分の紹介をしました。そのうち、quasi-Buchsbaum環の存在定理については、第4回可換環論シンポジウムの報告集に、後藤氏により詳細が述べられるはずですので、本稿では、講演の前半に相当する、基本定理を中心に述べます。

§0. 序. Buchsbaum環の研究は、D. A. Buchsbaumによる次の予想に源があります：局所環 $(A, \mathfrak{m}, k)$ の system of parameters (s.o.p.) $\underline{a} = \{a_1, \dots, a_d\}$ に対して、 $\ell_A(A/\underline{a}) - e_0(\underline{a}; A)$ は、たとえば $\dim A - \text{depth} A$ といった環 A の numerical な不変量に一致する、[1].

W. Vogelはこの問題に注目し、Buchsbaum環の理論へと発展させました、[7]. Vogel達の東独での基礎理論の一応の完成にひきつづき、Y. Shimoda及びS. Gotoにより、Rees環との関連で独自の理論が、ここ数年で急速に展開され、Buchsbaum環の理論が一層豊になって来ました。

さて、次元以外の local cohomology が vector space over $A/\mathfrak{m}$ であるような局所環を quasi-Buchsbaum 環と呼びます, [5]. その名の通り, Buchsbaum 環はたしかに, quasi-Buchsbaum 環です. 1978年10月の軽井沢での第1回可換環論シンポジウム 当時は, 両者の差を明確に認識出来るほどには, 十分に Buchsbaum 環がわかっていませんでした. 我々が知っていた唯一の例は, 2次元のもので, Stückrad によって与えられたものでした, (1.5). 以後の Buchsbaum 環についての研究の進歩は, quasi-Buchsbaum 環について, さまざまな方法と知識を提供して来ました. 同時に, quasi-Buchsbaum 環の研究は, さらに, 次元以外の local cohomology が有限生成であるような局所環の理論への重要な足がかりとなっています.

§1. Buchsbaum 環について. quasi-Buchsbaum 環の概念は, そもそも Buchsbaum 環を正確に認識するために導入されたものですから, 茲 Buchsbaum 環について述べることにします. 以下 $(A, \mathfrak{m}, k)$ は Noetherian 局所環とします.

(1.1) Definition & Theorem, ([11, 14, 15, 19]). 有限生成 A -加群 M について, 以下の条件は同値である:

(i) 加群 M の numerical な不変量 $I(M)$ で, 任意の s.o.p. for M , $\mathfrak{a}$ に対して

$$\ell_A(M/\mathfrak{a}M) - e_0(\mathfrak{a}; M) = I(M)$$

が成立するものがある.

(ii) 任意の s.o.p. $\mathfrak{a} = \{a_1, \dots, a_d\}$ for M は weak M -sequence をなす.

つまり, $i=1, \dots, d$ に対して,

$$(a_1, \dots, a_{i-1})M \stackrel{\cdot a_i}{\subset} (a_1, \dots, a_{i-1})M \stackrel{\cdot a_i}{\subset} \mathcal{M}$$

が成立する。

(iii) 任意の M の s.o.p. $\mathfrak{a}$ に対して,

$$\mathcal{M}H_1(\mathfrak{a}; M) = 0 \quad (\text{resp.}, \mathcal{M}H_p(\mathfrak{a}; M) = 0, \forall p \geq 1).$$

(iii') 任意の M の s.o.p. $\mathfrak{a}$ に対して, truncated complex $\tau^d K^\bullet(\mathfrak{a}; M)$ は, ある $\mathcal{M}$ -vector space からなる complex に quasi-isomorphic である。ここで, 2 つの complex が quasi-isomorphic であるとは, homology が同型であることで,

complex $X^\bullet$ に対して, その truncated $\tau^n X^\bullet$ とは,

$$\rightarrow X^p \rightarrow X^{p+1} \rightarrow \dots \rightarrow X^{n-1} \rightarrow B^n(X^\bullet) \rightarrow 0,$$

又, $\tau_m X^\bullet$ とは,

$$0 \rightarrow B^{m+1}(X^\bullet) \rightarrow X^{m+1} \rightarrow X^{m+2} \rightarrow \dots$$

(iv) 任意の $p < \dim M$ に対して, direct system の limit map

$$H^p(\mathcal{M}; M) \longrightarrow H^p_{\mathcal{M}}(M)$$

は surjective である。

(v) $\tau^d R^p_{\mathcal{M}}(M)$ が k -vector spaces からなるある complex に quasi-isomorphic である。

さらに, Dualizing complex of A , $D^\bullet$ が存在するならば,

(v') $\tau_{-d} \text{Hom}(M, D^\bullet)$ が, ある k -vector spaces からなる complex に quasi-isomorphic である。

これらの同値な条件を満たす加群 M を Buchsbaum 加群 と呼ぶ。

局所環 A は, A 上の Buchsbaum 加群 であるとき, Buchsbaum 環 と呼ばれる。

次は、上の定理より直ちに得る。

(1.2) Corollary. M が Buchsbaum 加群ならば、任意の $i < \dim M$ に対して、 $\mathcal{H}_M^i(M) = 0$ が成立する。

(1.3) Remarks. (i) M が Buchsbaum 加群のとき、(1.1) の (i) の $I(M) = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} h^i(M)$, ここで、 $h^i(M) = \ell_A(H_M^i(M))$. 従って、特に、 M が C-M.
 $\Leftrightarrow M$ が Buchsbaum で $I(M) = 0$.

(ii) $i \neq d$, t に対して $H_M^i(M) = 0$ のとき、 M が Buchsbaum $\Leftrightarrow \mathcal{H}_M^t(M) = 0$.

さて、(1.2), (1.3) から、Buchsbaum 加群 M の重要な性質として、

$$(*) \quad \mathcal{H}_M^i(M) = 0 \quad \text{for } \forall i \neq \dim M$$

に着目するとき、'Cohen-Macaulay' という性質が local cohomology で完全に記述することが出来るわけですから、条件 (*) は、加群が Buchsbaum であることのうちのどれぐらいの意味をもっているかという疑問は、自然なものです。

(1.4) Definition. 有限生成加群 M が 'quasi-Buchsbaum 加群' であるとは、上記 (*) の条件が成立するとする。ring A は、 A -加群として、quasi-Buchsbaum であるとき、'quasi-Buchsbaum 環' と呼ぶ。

quasi-Buchsbaum 環は必ずしも Buchsbaum 環ではない。実際、

(1.5) Example. ([Stuckrad]). $R := k[x_1, x_2, y_1, y_2] \supset \mathcal{O}_R :=$

$(X_1, X_2) \cap (Y_1, Y_2) \cap (X_1^2, X_1, Y_1^2, Y_1)$. $A := R/\mathcal{O}$ とすると, $\dim A = 2$ で,
 A は quasi-Buchsbaum. しかし, A は Buchsbaum ではない: $\{x_1+y_1, x_2+y_2\}$
 は (A の s.o.p. で) weak A -sequence ではない.

ここで注目すべきことは, $\forall m, n \geq 1$ に対して, $\{(x_2+y_2)^m, (x_1+y_1)^n\}$ は
 weak A -sequence をなしていることである. つまり, 'weak-sequence' という性質
 は, その要素の順序に依存する のである.

さらに A は quasi-Buchsbaum で, $a = x_1+y_1, b = x_2+y_2$ は s.o.p. であるが,
 もし, A/a も quasi-Buchsbaum 環であると, (1.3)(ii) より, A/a は Buchsbaum
 環である. a は weakly A -regular (i.e., $\nu_{\mathcal{O}_A}(a) = 0$). 従って, $\{a, b\}$ が
 weak A -sequence となってしまふ. 従って, A/a は quasi-Buchsbaum 環では
 ない.

(1.6) Question. M が quasi-Buchsbaum 加群のとき, M の 1 かなる parameter
 a に対して M/aM も quasi-Buchsbaum 加群となるか?

これが, 次節の主定理の motivation です.

2. Quasi-Buchsbaum 環の特徴付け.

(2.1) Theorem, ([Suzuki] (1978) also [16]). $a \in \mathcal{O}_M^2$ が M の parameter
 (i.e., $\dim M/aM < \dim M$) のとき, M が quasi-Buchsbaum 加群ならば,
 M/aM も quasi-Buchsbaum 加群である. もし, $\ell_A(\mathcal{O}_M/a) < \infty$ ならば
 逆も正しい.

この定理は, quasi-Buchsbaum の特徴付けを与える, 次の定理の基本的な部分を与える.

(2.2) Theorem ([Stückrad-Vogel-Schenzel], [Suzuki]). 有限生成 A -加群 M について, 次は同値である.

- (i) M は quasi-Buchsbaum 加群である;
- (ii) M^2 に含まれる s.o.p. for M で weak M -sequence をなすものがある;
- (iii) M^2 に含まれる s.o.p. for M は weak M -sequence をなす;
- (iv) M^2 に含まれる (sub-) s.o.p. for M $\mathfrak{a}$ に対して,

$$\mu H_1(\mathfrak{a}; M) = 0 \quad (\text{resp. } \mu H_p(\mathfrak{a}; M) = 0 \text{ for } \forall p \geq 1);$$

- (v) M^2 に含まれる s.o.p. for M で

$$\mu H_1(\mathfrak{a}; M) = 0$$

となるものがある.

Buchsbaum 加群の不変量 $I(M)$ については,

(2.3) Remarks. (i) 加群 M の次元以外の local cohomology が有限生成のとき, 任意の s.o.p. for M $\mathfrak{a}$ に対して

$$\ell_A(M/\mathfrak{a}M) - e_0(\mathfrak{a}; M) \leq \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} h^i(M) (=: I(M))$$

が成立する.

(ii) M が quasi-Buchsbaum のときは, $M^2 \supset \mathfrak{a}$ なる s.o.p. for M $\mathfrak{a}$ に対して

(i) で等号が成立する. (ただし, 右辺は正でない.)

Example, ([Yamagishi]). $(B, \mathcal{N})$ を 1次元 Buchsbaum 環で $\text{depth } 0$ のものとする.
 $A := B \times B \supset \mathcal{N} = \mathcal{N} \times B$ とする. すると, $\mathcal{N}^2 H_{\mathcal{N}}^0(A) = 0$. (しかし, $\mathcal{N} H_{\mathcal{N}}^0(A)$
 も 0 だから, A は quasi-Buchsbaum ではない. 一方で, $a \in \mathcal{N}^2$ が A の
 parameter ならば $a H_{\mathcal{N}}^0(A) = 0$ で, $\ell_A(A/aA) - e_0(a; A) = I(A)$.

Buchsbaum 環の研究の過程で派生したさまざまな問題を quasi-Buchsbaum 環についても検証されて, それにより, 逆に, Buchsbaum 環が いかにより
 リケートな性質をもつかがわかって来ました. このうちの最後に, quasi-Buchsbaum
 加群を一つの対象と認識する根拠となった定理を述べる.

Definition. 有限生成 A -加群 M に対して, ' M の type' $r_A(M)$ を

$$r_A(M) := \sup \{ \dim_{A/\mathfrak{q}} \text{Soc}_e(M/\mathfrak{q}M) ; \mathfrak{q} \text{ は } M \text{ の parameter ideal} \}$$

 と定義する.

(2.4) Theorem, ([8]). M が d -次元の quasi-Buchsbaum 加群のとき,

$$r_A(M) = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d}{i} h^i(M) + \nu_A(K_M).$$

ここで, $\nu_A(\)$ は 最小生成系の個数, K_M は M の canonical module,

$$\widehat{K_M} \cong \text{Hom}_A(H_{\mathcal{N}}^d(M), E_A(k)).$$

§3. Existence Theorem for quasi-Buchsbaum domains.

Theorem ([Goto, 9]). 整数 $d \geq 3$, $h_1, \dots, h_{d-1} \geq 0$, $h_i, h_j > 0$

(for some $i < j$) に対し 次の条件を満足する quasi-Buchsbaum local domain A が存在する:

(a) $\dim A = d$; (b) $h^i(A) = h_i$ for $i=1, \dots, d-1$;

c) A は Buchsbaum 環ではない.

もし $h_1 = 0$ のときは, A を normal にとれる.

この定理についての詳細は, 第4回可換環論シンポジウムの報告集に, 後藤氏自身による解説が述べられる予定ですので, そちらへゆずります.

REFERENCES

- [1] D.A. Buchsbaum, Complexes in local ring theory, in Some Aspects of ring theory, C.I.M.E. Rome(1965).
- [2] E.G.Evans, Jr. and P.A.Griffith, Local cohomology modules for normal domains, J.London Math.Soc. 19(1976)277-279.
- [3] S.Goto, On Buchsbaum rings, J. of Alg. 67(1980)272-279.
- [4] S.Goto, On Buchsbaum local rings, RIMS Kôkyûroku 374(1980), Reprt of RIMS symposium on Commutative rings, Oct.31-Nov.2.(1979), in Japanese.
- [5] N. Suzuki, On the applications of generalized local cohomology, Report of the 1st symposium of commutative algebra, 1978, Karuizawa.
- [6] S.Goto, On the associated rings of parameter ideal in Buchsbaum rings, Preprint(1982).
- [7] S.Goto, The associated graded rings of Buchsbaum local rings, preprint(1982).
- [8] S.Goto and N. Suzuki, Index of reducibility of parameter ideals in a local ring, preprint (1982).

- |9| S.Goto, N.Suzuki and K.Yamagishi, On quasi-Buchsbaum rings and Modules, in preparation.
- |10| B. Renschuch, J. Stückrad and W. Vogel, Weitere Bemerkungen zu einem Problem der Schnitttheorie und über ein Maß von A.Seidenberg für die Imperfectheit, J. of Alg., 37(1975),447-471.
- |11| P.Schenzel, Applications of dualizing complexes to Buchsbaum rings, to appear in Advances in Mathematics.
- |12| P.Schenzel, Ngo Viet Trung, Nguyen Tu Cuong, Ver allgemeinerte Cohen-Macaulay-Moduln, Math. Nachr. 85(1978) 57-73.
- |13| J. Stückrad, Über die kohomologische Characterisierung von Buchsbaum-Moduln, Math. Nachr. 95(1980) 265-272.
- |14| J. Stückrad and W. Vogel, Ein Verallgemeinerung der Cohen-Macaulay-Ringe und Anwendungen auf ein Problem der Multiplizitätstheorie, J. of Math. Kyoto Univ.13(1973)513-528.
- |15| _____, Toward a theory of Buchsbaum singularity, Ammer. J. of Math. 100(1978)727-746.
- |17| W.Vogel, Über eine Vermutung von D.A.Buchsbaum, J. of Alg. 25(1973)106-112.
- |18| _____, A non-zero-divisor characterization of Buchsbaum modules, Michigan Math. J. 28(1981)147-152.
- |19| N. Suzuki, On the Kosuzul Complex generated by a system of parameters for a Buchsbaum Modules, Bulletin of Dept. of Gen. Education of Shizuoka College of Pharmacy, 8(1979).

Naoyoshi Suzuki
 Dept. of General Education
 Sizuoka College of Pharmacy
 2-2-1, Oshika, Shizuoka
 422 Japan