

Approximation of Solutions of a Variational Inequality Problem

東京工業大学 情報理工学研究科 数理・計算科学専攻

豊田 昌史 (Toyoda Masashi)

Department of Mathematical and Computing Sciences,
Tokyo Institute of Technology

1 はじめに

変分不等式問題とは, 実 Hilbert 空間 H の閉凸部分集合 K から H への写像 A に対して,

$$\langle Au_0, v - u_0 \rangle \geq 0 \quad (\forall v \in K)$$

をみたすような $u_0 \in K$ を見つける問題のことである. 以降, このような u_0 全体のことを $VI(K, A)$ と書くことにする. 変分不等式問題は, 凸関数の最小化問題や不動点問題の抽象化である.

変分不等式問題の解を近似する点列の構成方法として, 以前に次の結果を考察した ([6]).

定理 1. H を実 Hilbert 空間とし, K を H の閉凸部分集合とする. A を K から H への $\alpha > 0$ に関する逆強単調写像とし, $VI(K, A) \neq \emptyset$ とする. 点列 x_n を

$$\begin{cases} x_0 = x \in K, \\ y_n = P_K(x_n - \lambda_n Ax_n), \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) y_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

と構成する. ここで $\lambda_n \in [a, b]$, $a, b \in (0, 2\alpha)$ でありまた, $\alpha_n \in [0, c]$, $c \in (0, 1)$ である. このとき, 点列 x_n はある $z \in VI(K, A)$ に弱収束する.

ここで P_K は H から K への上への距離射影である. 距離射影の定義や性質に関しては, 例えば [5] を見よ.

写像 P_K のもつ性質のひとつとして, 非拡大性がある. K 上の写像 S が非拡大であるとは, 任意の $x, y \in K$ に対して $\|Sx - Sy\| \leq \|x - y\|$ が成り立つときをいう. S の不動点集合を $F(S)$ と書くことにする. すると $F(P_K) = K$ である. この表記を利用すると, $VI(K, A)$ は非拡大写像 S に関する $VI(F(S), A)$ の特別な場合と捉え直すことができる. それでは, $VI(F(S), A)$ の元に収束す

る点列はどのように構成されるのだろうか？ 本論文では、逆強単調写像に関する $\text{VI}(\text{F}(S), A)$ の元への収束定理について述べる。

2 主結果

実 Hilbert 空間 H の閉凸部分集合 K から H への写像 A が逆強単調であるとは、ある数 $\alpha > 0$ が存在して、任意の $u, v \in K$ に対して

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq \alpha \|Au - Av\|^2$$

が成り立つことを言う ([1]). このとき更に $\lambda \leq 2\alpha$ ならば、 $I - \lambda A$ は K から H への非拡大写像となる。実際、つぎの計算からそれがわかる。 $u, v \in K$ に対して

$$\begin{aligned} \|(I - \lambda A)u - (I - \lambda A)v\|^2 &= \|(u - v) - \lambda(Au - Av)\|^2 \\ &= \|u - v\|^2 - 2\lambda \langle u - v, Au - Av \rangle \\ &\quad + \lambda^2 \|Au - Av\|^2 \\ &\leq \|u - v\|^2 + \lambda(\lambda - 2\alpha) \|Au - Av\|^2 \quad (1) \end{aligned}$$

となる。また、 A は Lipschitz 連続である。すなわち

$$\|Au - Av\| \leq \frac{1}{\alpha} \|u - v\|$$

が任意の $u, v \in K$ に対して成り立つ。逆強単調写像 A に関して、後に示す定理 3 を得ることができる。

定理 3 を示す前に、補助定理を紹介する。つぎの結果は、Schu [4] によって一様凸な Banach 空間において示された。本論文では Hilbert 空間で適用する。ここでは Hilbert 空間での命題として証明をつけておく。

補助定理 2. H を実 Hilbert 空間とし、点列 α_n は $0 < a \leq \alpha_n \leq b < 1$ が各 n に対して成り立つものとする。また H の点列 v_n と w_n は、ある $c > 0$ に対して $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|v_n\| \leq c$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|w_n\| \leq c$ であり $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha_n v_n + (1 - \alpha_n) w_n\| = c$ をみたすものとする。このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - w_n\| = 0$$

が成り立つ。

証明. いま $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - w_n\| = 0$ が成り立たないとする。このとき、ある $\epsilon > 0$ と部分列 v_{n_i}, w_{n_i} が存在して

$$\|v_{n_i} - w_{n_i}\| \geq \epsilon$$

が任意の i に対して成り立つ. この部分列 n_i に対して

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|v_{n_i}\| \leq c, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \|w_{n_i}\| \leq c, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_{n_i} = \alpha \in [a, b]$$

が成り立つと仮定してもよい. このとき

$$\begin{aligned} a(1-b)\epsilon^2 &\leq \alpha_{n_i}(1-\alpha_{n_i})\|v_{n_i} - w_{n_i}\|^2 \\ &= \alpha_{n_i}\|v_{n_i}\|^2 + (1-\alpha_{n_i})\|w_{n_i}\|^2 - \|\alpha_{n_i}v_{n_i} + (1-\alpha_{n_i})w_{n_i}\|^2 \end{aligned}$$

である. $i \rightarrow \infty$ とするとき

$$a(1-b)\epsilon^2 \leq \alpha \lim_{i \rightarrow \infty} \|v_{n_i}\|^2 + (1-\alpha) \lim_{i \rightarrow \infty} \|w_{n_i}\|^2 - c^2 \leq 0$$

を得る. ところが $0 < a(1-b)\epsilon^2$ であるから, これは矛盾である. $\square$

主結果を示す.

定理 3. H を実 Hilbert 空間とし, A を H からそれ自身への $\alpha > 0$ に関する逆強単調写像とし, S を H からそれ自身への非拡大写像とする. いま $F(S) \cap A^{-1}0 \neq \emptyset$ とする. 点列 x_n を

$$\begin{cases} x_0 = x \in H, \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)S(x_n - \lambda_n A x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

と構成する. ここで $\lambda_n \in [a, b]$, $a, b \in (0, 2\alpha)$ でありまた, $\alpha_n \in [c, d]$, $c, d \in (0, 1)$ である. このとき, 点列 x_n はある $z \in VI(F(S), A)$ に弱収束する.

証明. はじめに $y_n = x_n - \lambda_n A x_n$ とおく. いま $u \in F(S) \cap A^{-1}0$ とする.

(1) より,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - u\|^2 &= \|\alpha_n(x_n - u) + (1-\alpha_n)(Sy_n - u)\|^2 \\ &\leq \alpha_n\|x_n - u\|^2 + (1-\alpha_n)\|Sy_n - u\|^2 \\ &\leq \alpha_n\|x_n - u\|^2 + (1-\alpha_n)\|y_n - u\|^2 \\ &\leq \alpha_n\|x_n - u\|^2 + (1-\alpha_n)\{\|x_n - u\|^2 \\ &\quad + \lambda_n(\lambda_n - 2\alpha)\|Ax_n - Au\|^2\} \\ &= \|x_n - u\|^2 + (1-\alpha_n)\lambda_n(\lambda_n - 2\alpha)\|Ax_n - Au\|^2 \\ &\leq \|x_n - u\|^2 + (1-d)a(b-2\alpha)\|Ax_n - Au\|^2 \\ &\leq \|x_n - u\|^2 \end{aligned}$$

をみtas. よつて 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - u\|$ が存在し $Ax_n - Au \rightarrow 0$ を得る. これより点列 x_n と y_n は有界である. 写像 $I - \lambda_n A$ は非拡大であることと

$u = u - \lambda_n Au$ が成り立つことから

$$\begin{aligned}
 \|y_n - u\|^2 &= \frac{1}{2} \left\{ \|y_n - u\|^2 + \|(x_n - \lambda_n Ax_n) - (u - \lambda_n Au)\|^2 \right. \\
 &\quad \left. - \|(y_n - u) - \{(x_n - \lambda_n Ax_n) - (u - \lambda_n Au)\}\|^2 \right\} \\
 &\leq \frac{1}{2} \left\{ \|y_n - u\|^2 + \|x_n - u\|^2 \right. \\
 &\quad \left. - \|(y_n - x_n) + \lambda_n (Ax_n - Au)\|^2 \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \|y_n - u\|^2 + \|x_n - u\|^2 - \|y_n - x_n\|^2 \right. \\
 &\quad \left. - 2\lambda_n \langle y_n - x_n, Ax_n - Au \rangle - \lambda_n^2 \|Ax_n - Au\|^2 \right\}
 \end{aligned}$$

を得る. ゆえに

$$\|y_n - u\|^2 \leq \|x_n - u\|^2 - \|y_n - x_n\|^2 - 2\lambda_n \langle y_n - x_n, Ax_n - Au \rangle - \lambda_n^2 \|Ax_n - Au\|^2$$

を得る. これよりさらに

$$\begin{aligned}
 \|x_{n+1} - u\|^2 &\leq \alpha_n \|x_n - u\|^2 + (1 - \alpha_n) \|Sy_n - u\|^2 \\
 &\leq \alpha_n \|x_n - u\|^2 + (1 - \alpha_n) \|y_n - u\|^2 \\
 &\leq \|x_n - u\|^2 - (1 - \alpha_n) \|y_n - x_n\|^2 \\
 &\quad - 2\lambda_n (1 - \alpha_n) \langle y_n - x_n, Ax_n - Au \rangle \\
 &\quad - \lambda_n^2 (1 - \alpha_n) \|Ax_n - Au\|^2 \\
 &\leq \|x_n - u\|^2 - (1 - d) \|y_n - x_n\|^2 \\
 &\quad - 2\lambda_n (1 - \alpha_n) \langle y_n - x_n, Ax_n - Au \rangle \\
 &\quad - \lambda_n^2 (1 - \alpha_n) \|Ax_n - Au\|^2
 \end{aligned}$$

である. いま $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - u\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - u\|^2$ と $Ax_n - Au \rightarrow 0$ から, $y_n - x_n \rightarrow 0$ を得る. 写像 A は Lipschitz 連続であるから, $Ax_n - Ay_n \rightarrow 0$ も成り立つ. 点列 x_n が有界であることから, ある部分列 x_{n_i} が存在してある点 $z \in H$ に弱収束する. このとき $z \in F(S) \cap A^{-1}0$ をみたす. 以下, これを確認する.

まず $z \in A^{-1}0$ を確認する. 空間 H の任意の元を v とする. $y_n - x_n = \lambda_n Ax_n$ であることに注意して

$$\begin{aligned}
 \langle v - y_{n_i}, Av \rangle &= \langle v - y_{n_i}, Av \rangle - \langle v - y_{n_i}, Ax_{n_i} + \frac{y_{n_i} - x_{n_i}}{\lambda_{n_i}} \rangle \\
 &= \langle v - y_{n_i}, Av - Ax_{n_i} - \frac{y_{n_i} - x_{n_i}}{\lambda_{n_i}} \rangle \\
 &= \langle v - y_{n_i}, Av - Ay_{n_i} \rangle + \langle v - y_{n_i}, Ay_{n_i} - Ax_{n_i} \rangle \\
 &\quad - \langle v - y_{n_i}, \frac{y_{n_i} - x_{n_i}}{\lambda_{n_i}} \rangle \\
 &\geq \langle v - y_{n_i}, Ay_{n_i} - Ax_{n_i} \rangle - \langle v - y_{n_i}, \frac{y_{n_i} - x_{n_i}}{\lambda_{n_i}} \rangle.
 \end{aligned}$$

を得る. よって $\langle v - z, Av \rangle \geq 0$ である.

空間 H の任意の元を w とする. そこで点列

$$w_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)z + \frac{1}{n}w$$

を構成する. すると

$$\langle w_n - z, Aw_n \rangle \geq 0$$

である. これより

$$\langle w - z, Aw_n \rangle \geq 0$$

を得る. $n \rightarrow \infty$ とすれば

$$\langle w - z, Az \rangle \geq 0$$

を得る. ここで w は任意だから $Az = 0$ である. すなわち $z \in A^{-1}0$ を得る.

つぎに $z \in F(S)$ を示す. 集合 $F(S) \cap A^{-1}0$ の任意の元を u とする. いま

$$\|Sy_n - u\| \leq \|y_n - u\| = \|(x_n - \lambda_n Ax_n) - (u - \lambda_n Au)\| \leq \|x_n - u\|$$

であるから $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|Sy_n - u\| \leq c$ である. ここで $c = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - u\|$ である. さらに

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha_n(x_n - u) + (1 - \alpha_n)(Sy_n - u)\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - u\| \\ &= c \end{aligned}$$

である. 補助定理 2 から,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Sy_n - x_n\| = 0$$

である. また

$$\begin{aligned} \|Sx_n - x_n\| &\leq \|Sx_n - Sy_n\| + \|Sy_n - x_n\| \\ &\leq \|x_n - y_n\| + \|Sy_n - x_n\| \end{aligned}$$

である. よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Sx_n - x_n\| = 0$$

である. すると $z = Sz$ となる. いま $z \neq Sz$ とすると, Hilbert 空間は Opial 条件をみたす (例えば [5] を見よ) ことから

$$\begin{aligned} \liminf_{i \rightarrow \infty} \|x_{n_i} - z\| &< \liminf_{i \rightarrow \infty} \|x_{n_i} - Sz\| \\ &\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} (\|x_{n_i} - Sx_{n_i}\| + \|Sx_{n_i} - Sz\|) \\ &= \liminf_{i \rightarrow \infty} \|Sx_{n_i} - Sz\| \\ &\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \|x_{n_i} - z\| \end{aligned}$$

が得られ, 矛盾である. よって $z \in F(S)$ を得る.

他の部分点列 x_{n_j} で $z' \in H$ に弱収束するものを考える. このとき, 上記と同様にして $z' \in F(S) \cap A^{-1}0$ である. さらに $z = z'$ が示せる. $z \neq z'$ と仮定する. Hilbert 空間は Opial 条件をみたすことから,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\| &= \liminf_{i \rightarrow \infty} \|x_{n_i} - z\| \\ &< \liminf_{i \rightarrow \infty} \|x_{n_i} - z'\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z'\| = \liminf_{j \rightarrow \infty} \|x_{n_j} - z'\| \\ &< \liminf_{j \rightarrow \infty} \|x_{n_j} - z\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\| \end{aligned}$$

である. これは矛盾である. よって $z = z'$ である. 以上から点列 x_n は $z \in F(S) \cap A^{-1}0$ に弱収束する. いま $F(S) \cap A^{-1}0 \subset VI(F(S), A)$ であるから $z \in VI(F(S), A)$ である. $\square$

3 おわりに

本論文においては, 変分不等式問題の解集合 $VI(K, A)$ をその特別な場合として含む集合 $VI(F(S), A)$ への収束定理を考えた. 集合 $VI(F(S), A)$ を, 信号処理等の逆問題から扱った研究が, 山田と小倉によってなされている ([7, 2, 3]). それらと本研究との関係を調べたい.

参考文献

- [1] F. Liu and M. Z. Nashed, *Regularization of nonlinear ill-posed variational inequalities and convergence rates*, Set-valued Anal. **6** (1998) 313–344.
- [2] N. Ogura and I. Yamada, *Non-strictly convex minimization over the fixed point set of an asymptotically shrinking nonexpansive mapping*, Numer. Funct. Anal. Optim. **23** (2002), 113–137.
- [3] N. Ogura and I. Yamada, *Nonstrictly convex minimization over the bounded fixed point set of a nonexpansive mapping*, Numer. Funct. Anal. Optim. **24** (2003), 129–135.
- [4] J. Schu, *Weak and strong convergence to fixed points of asymptotically nonexpansive mappings*, Bull. Austral. Math. Soc. **43** (1991) 153–159.
- [5] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama Publishers, 2000.
- [6] M. Toyoda, *Variational inequality problems for monotone mappings*, 京都大学数理解析研究所講究録, **1306** (2003), 118–124.

- [7] I. Yamada, *The hybrid steepest descent method for the variational inequality problem over the intersection of fixed point sets of nonexpansive mappings*, Inherently Parallel Algorithms in Feasibility and Optimization and their Applications (Butnariu, Censor and Reich, eds.), Kluwer Academic Publishers, 2001, pp. 473–504.