

確率需要を伴う競合施設配置問題に対する 4つの基準を同時に考慮したタブー探索アプローチ

徳島大学大学院ソシオ・アーツ・アンド・サイエンス研究部 宇野 剛史 (Takeshi Uno)
Institute of Socio-Arts and Sciences, the University of Tokushima
広島大学大学院工学研究科 片桐 英樹 (Hideki Katagiri)
Graduate School of Engineering, Hiroshima University
広島工業大学情報学部 加藤 浩介 (Kosuke Kato)
Faculty of Applied Information Science, Hiroshima Institute of Technology

1 はじめに

競合施設配置問題は商業施設など他の施設との競合関係を考慮する必要のある施設に対して、利益や獲得購買力等の最大化を目的として最適な配置を求める問題である。Drezner [1] は施設の潜在的利用者の分布が平面内の有限個の点の集合として表される市場において、利用者から獲得可能な購買力の総和の最大化を目的として、既に競合施設が配置されている状況において新たに平面上に施設を配置するモデルを考察した。

Drezner のモデルにおいて利用者の保持する購買力は確定的に表されるが、現実においては利用者の人口推移や景気変動などにより確率的に変動すると考えられるため、不確実性によって生じるリスクを考慮して施設配置を行う必要がある。利用者の需要を確率変数として扱った施設配置モデルとしては、Wagner ら [8] などによる非競合型の研究や、Shiode と Drezner [5] によるネットワーク上での競合型の研究が挙げられる。宇野ら [6, 7] は Drezner の配置モデルに Huff [2] の勧誘力関数を導入し、購買力が確率変数として表される競合施設配置問題として定式化した。この問題に対する最適配置を求めるために、期待値基準 [7]、分散基準 [6]、確率最大化基準 [7]、及び、満足基準最大化基準 [7] を導入することで、4つの確定計画問題に変換した。これらの問題は最適解を直接求めることは困難であることから、最適解の一つが 0-1 計画問題を解くことで求められることを示した。さらに、この問題を効率的に求めるための解法として、施設配置モデルの特性を用いた戦略的振動に基づくタブー探索法を提案した。

本論文では、これらの4つの基準を同時に考慮することを提案する。競合施設配置問題を4つの基準をすべて含む多目的計画問題として定式化する。多目的計画問題では一般に完全最適解は存在しないことから、意思決定者の満足解を導出するために対話型ファジィ満足化手法 [4] を用いる。この手法では、意思決定者の与える基準メンバシップ値に対応してミニマックス問題を解く必要がある。本論文では Uno ら [7] によって提案された戦略的振動に基づくタブー探索法を改良することで、効率的にミニマックス問題を解くことを提案する。さらに、数値実験により提案解法の有効性を示す。

本論文の構成は次の通りである。第2章では、利用者の購買力が確率変数として表され

る競合施設配置問題を定式化し、上述の4つの基準を同時に考慮した多目的計画問題に変換する。第3章では、意思決定者の満足解を導出するために対話型ファジィ満足化手法を応用する。この手法におけるミニマックス問題に対する解法として、第4章では施設配置モデルの特性を取り入れた戦略的振動に基づくタブー探索法を提案する。最後に、第5章で競合施設配置問題の数値例に対して提案解法を適用することでその有効性を示す。

2 問題の定式化

2.1 確率競合施設配置問題の定式化

本研究における施設配置モデルでは、施設の潜在的利用者を平面 $\mathbf{R}^2$ 内の有限個の点上にのみ存在すると仮定し、そのような点を“需要点”とよぶことにする。平面上の需要点の例として、国内における都市などが挙げられる。以下では、需要点を同じ位置にいる利用者の集合とみなすことにより、各需要点を一人の利用者として扱う。

需要点の数を n とし、需要点の指標集合を $D = \{1, \dots, n\}$ とおく。意思決定者が配置する新規施設の数 m とし、 $\mathbf{R}^2$ 上に存在する新規施設と競合する既存施設（競合施設）の数を k とする。新規施設及び非協力施設の指標集合を各々 $F = \{1, \dots, m\}$, $F_C = \{m+1, \dots, m+k\}$ とおく。

需要点 $i \in D$ の位置を $\mathbf{u}_i \in \mathbf{R}^2$ とする。施設 $j \in F \cup F_C$ の位置を $\mathbf{x}_j \in \mathbf{R}^2$ とし、その質的評価値を $q_j > 0$ とする。このとき、需要点 i から見た施設 j の勧誘力を、Huff [2] によって提案された次の勧誘力関数によって与える。

$$a_i^j(\mathbf{x}_j) := \begin{cases} \frac{q_j}{\|\mathbf{u}_i - \mathbf{x}_j\|^2}, & \text{if } \|\mathbf{u}_i - \mathbf{x}_j\| > \varepsilon \\ \frac{q_j}{\varepsilon^2}, & \text{if } \|\mathbf{u}_i - \mathbf{x}_j\| \leq \varepsilon \end{cases} \quad (2.1)$$

ここで、 $\varepsilon > 0$ は利用者が施設まで移動するのに全く苦にならないと考える距離の上限を意味する。全ての利用者は最大勧誘力をもつ施設のみを利用すると仮定し、最大勧誘力をもつ施設が複数ある場合には、競合施設を優先的に施設を一つだけ利用すると仮定する。

新規施設の位置ベクトルを $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ で表す。このとき、需要点 i が新規施設 j を利用するか否かを次の0-1変数を用いて表す：

$$\varphi_i^j(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{需要点 } i \text{ が新規施設 } j \text{ を利用する場合,} \\ 0, & \text{それ以外の場合} \end{cases} \quad (2.2)$$

需要点 i の購買力を確率変数 $\bar{w}_i > 0$ で表すと、新規施設 j の獲得購買力は次式で表される：

$$\sum_{i=1}^n \bar{w}_i \varphi_i^j(\mathbf{x}) \quad (2.3)$$

以上より、利用者の購買力が確率変数として表される競合施設配置問題は、次の確率計画問題として定式化される：

$$\left. \begin{array}{ll} \text{maximize} & f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \bar{w}_i \varphi_i^j(\mathbf{x}) \\ \text{subject to} & \mathbf{x} \in R^{2m} \end{array} \right\} \quad (2.4)$$

問題 (2.4) を直接解くことが困難なことから、宇野ら [6, 7] は次の 0-1 計画問題を解くことにより問題 (2.4) の最適解が得られることを示した：

$$\left. \begin{array}{ll} \text{maximize} & f(\mathbf{x}^L) \\ \text{subject to} & L \in \{0, 1\}^{nm} \end{array} \right\} \quad (2.5)$$

ここで、行列

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & \cdots & l_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & \cdots & l_{nm} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

内の各成分 $l_{ij} \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$ は、意思決定者が需要点 i を新規施設 j によって優先的に獲得させる場合には 1、そうでない場合には 0 で表す 2 値変数である。また、 $\mathbf{x}^L$ は補助変数 $r > 0$ を伴う次の凸計画問題の最適解を意味する：

$$\left. \begin{array}{ll} \text{minimize} & r^2 \\ \text{subject to} & a_i^A \leq a_i^1(\mathbf{x}_1) \cdot r, \quad \forall i \in \{\xi \in D | l_{\xi 1} = 1\}, \\ & \vdots \\ & a_i^A \leq a_i^m(\mathbf{x}_m) \cdot r, \quad \forall i \in \{\xi \in D | l_{\xi m} = 1\}, \\ & r > 0, \\ & \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \in R^2 \end{array} \right\} \quad (2.7)$$

ここで、

$$a_i^A = \max_{j \in F_C} \{a_i^j(\mathbf{x}_j)\} \quad (2.8)$$

2.2 4つの基準を同時に考慮した多目的計画問題への変換

問題 (2.5) における最適解を求めるために、次の 4 つの基準に基づく確定問題に変換する：

(i) 期待値最大化モデル

$$\left. \begin{array}{ll} \text{maximize} & f_E(L) := E[f(\mathbf{x}^L)] \\ \text{subject to} & L \in \{0, 1\}^{nm} \end{array} \right\} \quad (2.9)$$

(ii) 分散最小化モデル

$$\left. \begin{array}{ll} \text{minimize} & f_V(L) := V[f(\mathbf{x}^L)] \\ \text{subject to} & f_E(L) \geq \lambda, \\ & L \in \{0, 1\}^{nm} \end{array} \right\} \quad (2.10)$$

ここで、 λ は獲得購買力に対して与えられた期待基準値を表す。

(iii) 確率最大化モデル

$$\left. \begin{array}{ll} \text{maximize} & f_P(L) := \Pr[f(\mathbf{x}^L) \geq f_0] \\ \text{subject to} & L \in \{0, 1\}^{nm} \end{array} \right\} \quad (2.11)$$

ここで、 f_0 は獲得購買力に対して与えられた満足基準値を表す。

(iv) 満足基準最大化モデル

$$\left. \begin{array}{ll} \text{maximize} & f_S(L) := f_0 \\ \text{subject to} & \Pr[f(\mathbf{x}^L) \geq f_0] \geq \alpha, \\ & L \in \{0, 1\}^{nm} \end{array} \right\} \quad (2.12)$$

ここで、 α は獲得購買力に対して与えられた確率基準値を表す。上述の4つの問題の各々において、宇野ら [6, 7] は戦略的振動に基づくタブー探索法を提案した。本研究では、これら4つの基準を同時に考慮することを提案する。

行列 $L \in \{0, 1\}^{nm}$ に対して、対応する新規施設の配置 $\mathbf{x}^L$ においていずれかの新規施設が購買力を獲得している需要点の集合を次式で表す：

$$N(L) := \left\{ i \mid \sum_{j=1}^m \varphi_i^j(\mathbf{x}^L) = 1 \right\} \quad (2.13)$$

このとき、次の定理が成り立つ：

定理 1 2つの行列 $L_1, L_2 \in \{0, 1\}^{nm}$ において、 $N(L_1) \subseteq N(L_2)$ が成り立つとする。このとき、次の3つの式が成り立つ：

$$f_E(L_1) \leq f_E(L_2), \quad f_P(L_1) \leq f_P(L_2), \quad f_S(L_1) \leq f_S(L_2) \quad (2.14)$$

証明：問題 (2.9), (2.11), (2.12) の性質、及び、すべての需要点 $i \in N$ において $\bar{w}_i > 0$ より、明らかである。 ■

一方、問題 (2.10) において定理 1 は成り立たない。このことは問題 (2.10) の最適解を求めることの困難さを意味する。よって、本研究では問題 (2.10) の目的関数を制約条件式として扱い、その他の3つの問題の目的関数を同時に考慮した3目的計画問題として次のように定式化する (ここで、 T は行列の転置を表す)：

$$\left. \begin{array}{ll} \text{maximize} & (f_E(L), f_P(L), f_S(L))^T \\ \text{subject to} & f_V(L) \leq \beta, \\ & f_P(L) \geq \alpha, \\ & f_S(L) \geq f_0, \\ & L \in \{0, 1\}^{nm} \end{array} \right\} \quad (2.15)$$

3 対話型ファジィ満足化手法による満足解の導出

本章では、多目的計画問題 (2.15) に対する意思決定者の満足解を導出するために、坂和等 [4] によって提案された対話型ファジィ満足化手法について説明する。

現実の意思決定において、意思決定者は目的関数値を最小（最大）化したいと考えるよりも、ある値より良くしたいと考える方が一般的である。このような目的は意思決定者の判断のあいまい性を含み、ファジィ目標とよばれる。以下では、(2.15) の3つの目的関数 E, P, S を各々メンバシップ関数 μ_E, μ_P, μ_S により規定されるファジィ目標として表す。

以下では、各目的に対してファジィ目標を規定するために、線形メンバシップ関数を用いる。期待値 E について、意思決定者は目的関数値が E_1 以上であれば十分満足であり、 E_1 以下であったとしても E_0 以下であれば少しは満足でき、 E_0 以下であれば全く満足できないと考えるものとする。このとき、期待値における線形メンバシップ関数は次式で表される：

$$\mu_E(f_E(L)) := \begin{cases} 1, & \text{if } f_E(L) \geq E_1, \\ \frac{E_1 - f_E(L)}{E_1 - E_0}, & \text{if } E_0 \leq f_E(L) < E_1, \\ 0, & \text{if } f_E(L) \leq E_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

他の2つの目的関数 P, S についても同様に、 P_1, P_0, S_1, S_0 を与えることで、線形メンバシップ関数を定義する。ここで、 $P_0 = \alpha$ 及び $S_0 = f_0$ とおくことで、(2.15) の2つの制約条件はファジィ目標 μ_P, μ_S により含めることができる。よって、(2.15) は次の多目的ファジィ計画問題に再定式化される：

$$\left. \begin{array}{ll} \text{maximize} & (\mu_E(E[f(L)]), \mu_P(P[f(L)]), \mu_S(S[f(L)]))^T \\ \text{subject to} & V[f(L)] \leq \beta, \\ & L \in \{0, 1\}^{nm} \end{array} \right\} \quad (3.2)$$

問題 (3.2) は一般に完全最適解をもたないため、多目的ファジィ計画問題に対する最適解として M-パレート最適解の概念が一般に用いられている。

定義 2 すべての $i \in \{E, P, S\}$ に対して $\mu_i(f_i(L)) \geq \mu_i(f_i(L^*))$ で、しかもある $j \in \{E, P, S\}$ について $\mu_j(f_j(L)) > \mu_j(f_j(L^*))$ となるような $L \in \{0, 1\}^{nm}$ が存在しないとき、 L^* を M-パレート最適解とよぶ。

対話型ファジィ満足化手法 [4] は意思決定者との対話を通して満足解となる M-パレート最適解を導出する手法であり、その手順は以下の通りである。

対話型ファジィ満足化手法

手順 1: メンバシップ関数 μ_E, μ_P, μ_S を設定する。

手順 2: 初期の基準メンバシップ値 ($\bar{\mu}_E, \bar{\mu}_P, \bar{\mu}_S$) を与える。

手順3: 与えられた基準メンバシップ値 $(\bar{\mu}_E, \bar{\mu}_P, \bar{\mu}_S)$ に対応する M-パレート最適解を求めるために、次のミニマックス問題を解く：

$$\left. \begin{array}{ll} \text{minimize} & \max_{i \in \{E, P, S\}} \left\{ \bar{\mu}_i - \mu_i(f_i(L)) + \rho \sum_{i \in \{E, P, S\}} \{\bar{\mu}_i - \mu_i(f_i(L))\} \right\} \\ \text{subject to} & V[f(L)] \leq \beta, \\ & L \in \{0, 1\}^{nm}. \end{array} \right\} \quad (3.3)$$

ここで、 ρ は十分に小さい正数である。

手順4: もし意思決定者が現在の基準メンバシップ値に対応する最適解に満足すればアルゴリズムは終了し、得られた M-パレート最適解は満足解である。そうでなければ、意思決定者の選好や現在のメンバシップ値などに基づいて基準メンバシップ値 $(\bar{\mu}_E, \bar{\mu}_P, \bar{\mu}_S)$ を更新し、手順3に戻る。

手順3において、与えられた基準メンバシップ値に対してミニマックス問題 (3.3) を解く必要があることから、次章ではその効率的解法を提案する。

4 ミニマックス問題に対する解法

問題 (2.9), (2.11), 及び (2.12) に対して、宇野ら [7] は定理 1 で示される問題の性質を用いることで、戦略的振動に基づくタブー探索法による効率的解法を提案した。しかし、(3.3) は分散制約を伴うことから、この解法をそのまま適用することはできない。以下では、分散制約を考慮した提案解法について述べる。

タブー探索法は近傍探索法の一つであり、提案手法では (3.3) の探索過程における現在解 $L^{\text{now}} \in \{0, 1\}^{mn}$ の近傍を、 L^{now} から一つの要素を増減させたときに得られる解全体の集合と定義し、 L^{now} から近傍内の解への移動をムーブと呼ぶ。近傍探索法において、 L^{now} から次の探索解への移動は、目的関数値や制約違反度などの与えられた基準において近傍内で最良となる解が選ばれる。しかし、上記の選択ルールだけでは局所最適解の周辺では現在解として選ばれる解が循環することから、探索中において選ばれたムーブは与えられた期間 T_1 だけタブー制約を活性化させる。このとき、活性化されたムーブはタブーとみなされ、与えられた規準において近傍内で最良であっても次の探索解として選ばれることを禁止する。タブーとなるムーブの情報は探索過程においてタブーリストに格納される。

タブー探索法は解を集中的に探すのに優れた手法であるが、(3.3) が大規模な場合には実行可能領域が広くなることから最適解の導出が困難である。以下では、タブー探索法に戦略的振動を導入することで大域的に探索可能な解法アルゴリズムを提案する。

戦略的振動に基づくタブー探索法

- 手順 0: [初期化] ランダムに初期探索点 L^{now} を生成し、暫定最良解やタブーリスト等の初期化を行う。初期探索点が分散制約をみたすならば、手順 5 へ進む。
- 手順 1: [TS_PROJECT] 分散制約の改善を目的として、探索点 L^{now} をタブーでないムーブにより次の探索点に移す。この手順は探索点が分散制約をみたすまで行う。
- 手順 2: [TS_ADD] 目的関数値の改善を目的として、探索点 L^{now} をタブーでないムーブにより次の探索点に移す。この手順は分散制約をみたしつつ目的関数値を改善するようなムーブが存在しなくなるまで行う。
- 手順 3: [TS_COMPLEMENT] 目的関数値の改善を目的として、探索点 L^{now} 付近を集中的に探索する。
- 手順 4: [TS_DROP] 分散制約の改善を目的として、探索点 L^{now} を目的関数値を考慮せずにタブーでないムーブにより次の探索点に移す。この操作は分散値がある一定以下になるか、規定回数になるまで行われる。
- 手順 5: [TS_ADD] (手順 2 と同様)
- 手順 6: [TS_COMPLEMENT] (手順 3 と同様)
- 手順 7: [TS_INFEASIBLE_ADD] 目的関数値の改善を目的として、探索点 L^{now} を分散水準の制約を考慮せずにタブーでないムーブにより次の探索点に移す。この操作は目的関数値がある一定の値以下になるか、規定回数になるまで行われる。
- 手順 8: [終了判定] 終了条件をみたせばアルゴリズム終了。そうでなければ手順 1 に戻る。

5 数値実験

本章では、前章までに述べた対話型ファジィ満足化手法を数値例に適用することでその有効性を示す。各数値例において、需要点の数は $n = 40$ とし、需要点の位置 $u_1, \dots, u_{40}$ は $[0, 100]^2$ 内でランダムに与える。購買力 $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_{40}$ は 10 個の等しい確率のシナリオをもつ確率変数として表し、各シナリオでの購買力は $[0.1, 10]$ 内でランダムに与えるものとする。既存施設の数 $k = 5$ とし、これらの位置はあるランダムに選ばれた相異なる需要点上で配置されるものとし、質的評価値は $\{1, \dots, 5\}$ 内でランダムに与える。意思決定者は 1 つの新規施設を平面 $[0, 100]^2$ 上に配置するものとし、その質的評価値は $q_1 = 3$ とする。また、(2.15) の分散制約について、比較的緩やかな値として $\alpha = 5.0$ とする。

次に、提案解法のパラメータを決める。タブー期間を $T_1 = 5$ とし、提案アルゴリズムにおける終了条件を反復回数が 10 回で真となるものとする。手順 4 から抜け出す判定基準は、 $E[f(x^{L^{\text{now}}})] \leq \alpha/2$ をみたすか、10 回を超えるまでとする。また、手順 7 から抜け出す判定基準は、目的関数値が 2 倍以上改善されるか、10 回を超えるまでとする。

対話型ファジィ満足化手法を用いて (2.15) を解いた結果を表 1 に示す. ここで, 全ての計算結果は DELL Studio XPS 8100 (Intel^R CoreTM i7-860 CPU (2.80GHz, 8MB L3 キャッシュ), 6GB RAM) を用いて得られたものである. 表 1 より, 意思決定者は基準メンバーシップ値を更新することにより, その値に対応する解を得られていることが分かる.

表 1: 対話型ファジィ満足化手法による計算結果

$\bar{\mu}_E$	1.0	1.0	0.9
$\bar{\mu}_P$	1.0	1.0	1.0
$\bar{\mu}_S$	1.0	0.8	0.8
$\mu_E(f_E(L))$	0.65	0.72	0.67
$\mu_P(f_P(L))$	0.60	0.70	0.80
$\mu_S(f_S(L))$	0.73	0.47	0.58
計算時間 (秒)	19.83	18.48	20.13

参考文献

- [1] Z. Drezner, Competitive location strategies for two facilities. *Regional Science and Urban Economics* 12 (1982) 485-493.
- [2] D.L. Huff, Defining and estimating a trading area, *Journal of Marketing* 28 (1964) 34-38.
- [3] J. Nocedal, S. Wright, *Numerical optimization*, Springer-Verlag (1999).
- [4] M. Sakawa, H. Yano, An interactive fuzzy satisficing method for multiobjective linear fractional programming problems, *Fuzzy Sets and Systems* 28 (1988) 129-144.
- [5] S. Shiode, Z. Drezner, A competitive facility location problem on a tree network with stochastic weights, *European Journal of Operational Research* 149 (2003) 47-52.
- [6] 宇野剛史, 片桐英樹, 加藤浩介, 不現実性を伴う競合施設配置問題に対するタブー探索法に基づく近似解法, *数理解析研究所講究録* 1636 (2009) 185-192.
- [7] T. Uno, H. Katagiri, K. Kato, Facility location problems with random demands in a competitive environment, *IAENG International Journal of Applied Mathematics* 39 (2)(2009) 122-127.
- [8] M.R. Wagner, J. Bhadury, S. Panga, Risk management in uncapacitated facility location models with random demands, *Computers & Operations Research* 36 (4)(2009) 1002-1011.