

Blocks of finite groups

千葉大学大学院理学研究科 音喜多 純拓

Yoshihiro Otokita

Graduate School of Science

Chiba University

序論

G を有限群, $(K, \mathcal{O}, k)$ を p -モジュラー系とする. すなわち, $\mathcal{O}$ は完備離散付値環で標数 0 の商体 K と標数 $p > 0$ の剰余体 k を持つ. 以下では, k は代数的閉体, K は G の任意の部分群の分解体となっているものと仮定する. 群多元環 kG のブロック B に対し, B に属する既約通常指標, 既約 Brauer 指標の個数をそれぞれ $k(B), l(B)$ と表す. また B の不足群の一つを $\delta(B)$, カルタン行列を C_B とする. 一般に $l(B) \leq k(B)$ であり, 等号が成立するのは $k(B) = l(B) = 1$ のときに限る. さらにこれは $|\delta(B)| = 1$ であることも同値であることが知られている. そこで以下では $k(B) - l(B) = 1$ の場合を考える. このとき $\delta(B)$ は初等可換群 (elementary abelian group) であることが示されている ([4, Theorem 7.1]). 一方, 本稿の主定理は以下である.

主定理 [10, Theorems 1.1, Corollary 1.2]

- (1) $p = 2, k(B) - l(B) = 1$ のとき C_B の対角成分は偶数である.
- (2) $k(B) = 3$ のとき p は奇素数である.

群多元環 kG とそのブロック B は対称多元環である. 上記主定理は対称多元環のカルタン行列に関する [3] の結果を用いて示す. 本稿では証明の概要を挙げるが, 詳しくは [10] で述べている.

主定理 (1) の証明

Step 1

$\delta(B)$ の G -共役類は 2 個であり, よって $\delta(B)$ の指数 (exponent) は 2 である.

Step 2

$n \geq 0$ に対し, B の k -部分空間

$$\begin{aligned} K(B) &= \sum_{a, b \in B} k(ab - ba), \\ T_n(B) &= \{a \in B \mid a^{p^n} \in K(B)\}, \\ T_n(B)^\perp &= \{a \in B \mid \lambda(T_n(B)a) = 0\} \end{aligned}$$

を定義する. ここで $\lambda: B \rightarrow k$ は B の対称多元環としての k -線形形式である. このとき Step 1 と [7, Theorem J] より, $T_1(B) = J(B) + K(B)$, $T_1(B)^\perp = \text{soc}(B) \cap Z(B)$ を得る.

Step 3

以上より, $(T_1(B)^\perp)^2 = 0$ となり, [3, Lemma 3.4] から (1) を得る.

主定理 (2) の証明

Step 1

$p = 2$ と仮定して矛盾を導く. [8] より, $l(B) = 2$ としてよい. このとき (1) と [3, Lemma 4.3] を用いて, $Z(B)$ の Higman ideal $H(B)$ に対して $H(B) = 0$ を得る.

Step 2

[2, Proposition 3.13] より, Higman ideal は projective center $Z^{\text{pr}}(B)$ と一致する. ここで $k(B) - l(B) = 1$ のとき, [6, Theorem 3.1, Lemma 3.8] より $\dim Z(B)/Z^{\text{pr}}(B) = 2$ であるから, $k(B) = \dim Z(B) = 2$ となり矛盾である.

いくつかの問題

「 $k(B) = 2$ のとき $|\delta(B)| = 2$ 」であることが [1] によって示されている. 次の問題として「 $k(B) = 3$ のとき $|\delta(B)| = 3$ ではないか?」が予想されており, いくつかの仮定のもとではこれが正しい ([9, Theorem 4.1, Theorem 4.2]) ことが示されているが, 一般のブロックに対しては未解決である (この予想が正しければ「 $k(B) = 3$ ならば $p = 3$ 」が導かれる). 一方, [5] において「非自明な不足群を $\delta(B)$ を持つブロック B に対し, $2\sqrt{p-1} \leq k(B)$ ではないか?」が予想されており, これが正しければ本稿の主定理と合わせて, 「 $k(B) = 3$ ならば $p = 3$ 」を得る.

参考文献

- [1] J. Brandt, *A lower bound for the number of irreducible characters in a block*, J. Algebra **74** (1982), 509–515.
- [2] M. Broué, *Higman's criterion revisited*, Michigan Math. J. **58** (2009), 125–179.
- [3] L. Héthelyi, E. Horváth, B. Külshammer, J. Murray, *Central ideals and Cartan invariants of symmetric algebras*, J. Algebra **293** (2005), 243–260.
- [4] L. Héthelyi, R. Kessar, B. Külshammer, B. Sambale, *Blocks with transitive fusion systems*, J. Algebra **424** (2015), 190–207.
- [5] L. Héthelyi, B. Külshammer, *On the number of conjugacy classes of a finite solvable group*, Bull. Lond. Math. Soc. **32** (2000), 668–672.
- [6] R. Kessar, M. Linckelmann, *On blocks with Frobenius inertial quotient*, J. Algebra **249** (2002), 127–146.
- [7] B. Külshammer, *Bemerkungen über die Gruppenalgebra als symmetrische Algebra. II*, J. Algebra **75** (1982), 59–69.
- [8] B. Külshammer, *Symmetric local algebras and small blocks of finite groups*, J. Algebra **88** (1984), 190–195.
- [9] B. Külshammer, G. Navarro, B. Sambale, P. H. Tiep, *Finite groups with two conjugacy classes of p -elements and related questions for p -blocks*, Bull. Lond. Math. Soc. **46** (2014), 305–314.
- [10] Y. Otokita, *On 2-blocks with $k(B) - l(B) = 1$* , Arch. Math. (Basel) **106** (2016), 225–228.