

関数環と作用素論の factorization について

北大 応電研 中路 貴彦
高橋 勝利

本講演の目的は、関数環と作用素論において知られている factorization の定理が適用できない関数を factorization する定理を見つけることである。関数環における factorization の定理の拡張は、積分の代わりに conditional expectation を使うことにより得られる。作用素論における factorization の定理の拡張は、一変数の作用素に値をとる関数を二変数の関数と見て、関数環で上に得られた結果を使うことにより得られる。よって両方とも、積分の代わりに conditional expectation を使うことにそのアイデアがある。

I 章 *弱 Dirichlet 環の factorization

A が *弱 Dirichlet 環であるとは、(i) A が確率測度空間 $(X, \mathcal{A}, m)$ の上の $L^\infty(m)$ の部分環であり定数を含み、(ii) $A +$

$\bar{A}$ は $L^\infty(m)$ で $*$ 弱稠密でありかつ (iii) $\int f g dm = \int f dm \int g dm$ ($f, g \in A$) となることである。

S が $L^p = L^p(m)$ ($1 \leq p \leq \infty$) の部分集合とすると、 $[S]_p$ は S の閉 linear span ($p = \infty$ のときは $*$ 弱閉) を示すとする。抽象的な Hardy 空間 $H^p = H^p(m)$ ($1 \leq p \leq \infty$) とは、 $H^p = [A]_p$ として定義する。 $f \in L^1(m)$ に対して $E(f)$ をその台集合とする。

A が $L^\infty(m)$ の $*$ 弱 Dirichlet 環となるとともに基本的な例は、(1) $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ 上の z の多項式の全体を A かつ $dm = d\theta/2\pi$ とするときである。ここで $\mathbb{C}$ は複素平面かつ $d\theta/2\pi$ は正規ルベーグ測度である。I 章では頭に描く例として、II 章では問題を解決する道具として重要なものは、(2) $T_1 \times T_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : |z_1| = |z_2| = 1\}$ 上の z_2^n $n \geq 0$ 、 $z_2^n z_1^m$ $m > 0$ の多項式の全体を A かつ $dm = d\theta d\varphi/4\pi^2$ とするときである。

次の定理は factorization の最も一般的なものである[6]。

定理 I-1 $w \in L^1$ 、 $w \geq 0$ かつ $M_w = [w^{1/2} A]_2$ とする。

このとき M_w が L^∞ を reduce する零以外の部分空間を含まないことは、 $w = |g|^2$ ($g \in H^2$) と書けることの必要十分条件である。

証明。必要性は明らかだから、十分性を示す。 $M_w^\perp = L^2 \ominus$

M_W 、即ち $M_W^\perp$ を M_W の直交補空間とする。もし $k \in M_W^\perp$ かつ $|k| \geq 0$ となる k が存在すると、 $A \overline{M_W^\perp} \subseteq \overline{M_W^\perp}$ 、即ち $\overline{M_W^\perp}$ が不変部分空間ということと [9] により、 $g \in M_W^\perp$ かつ $|g|=1$ となる g が存在する。このとき $M_W \subset gH^2$ 、よって $W = |g|^2 (g \in H^2)$ となる。よって k の存在がポイントであるが、 $k_1, k_2 \in M_W^\perp$ と正数 ε に対して、 $0 < \lambda < \varepsilon$ かつ $E(k_1 + \lambda k_2) = E(k_1) \cup E(k_2)$ となる λ が存在することが k の存在のポイントである。これは $K_\lambda = k_1 + \lambda k_2$ とすると、 $m(E(K_\lambda)^c \cap E(K_2)^c \cap \{E(k_1) \cup E(k_2)\}) = 0$ ($\lambda \neq \infty$)。よって高々可付番個の λ を除いて、 $m(E(K_\lambda)^c \cap \{E(k_1) \cup E(k_2)\}) = 0$ より得られる。///

上の定理は factorization の必要十分条件を与えているが、その十分条件はわかりにくくかつ factorization も完全とは云えない。良い十分条件を捜したい。

$g \in H^1$ が outer (function) とは、 $\exp \int \log |g| dm = |\int g dm|$ かつ $\int g dm \neq 0$ となることで、 $g \in H^\infty$ が inner (function) とは、 $|g|=1$ となることである。次の factorization は例の (1) で Beurling [1] が示したが、一般的には Srinivasan - Wang [9] による。

定理 I - 2 (1) $W \in L^1$ かつ $W \geq 0$ とするとき、 $\int \log W dm$

$> -\infty$ は H^2 のある outer g があって $w = |g|^2$ となるための必要十分条件である。

(2) $f \in H^1$ とするとき、 $\int \log |f| dm > -\infty$ は inner g と outer g があって $f = g \bar{g}$ となるための必要十分条件である。

(3) $g \in H^1$ のとき g が outer であることは $[gA]_1 = H^1$ となることと同じである。

例の(1)では factorization は定理 I-2 で完全に与えられる。なぜならどんな零でない $f \in H^1$ も $\int \log |f| dm > -\infty$ だから。しかし例の(2)では $\int \log |f| dm = -\infty$ となる零でない $f \in H^1$ が存在するから、factorization は完全ではない。一般に、 H^∞ が L^∞ で * 弱閉部分環として極大でないなら $m(f=0) > 0$ となる零でない $f \in H^1$ が存在するから factorization は完全ではない。

問題 I $w \in L^1$ 、 $w \geq 0$ かつ $\int \log w dm = -\infty$ となるときの factorization はどのように得られるだろうか？ $f \in H^1$ かつ $\int \log |f| dm = -\infty$ となるときの inner-outer-factorization はどんなものが考えられるだろうか？

問題を解決するために、 B として A を含む * 弱閉部分環を考える。 E^B を L^∞ から $B \cap \bar{B}$ への conditional expectation とすると、 $E^B(E^B(w)v) = E^B(w)E^B(v)$ ($w, v \in L^\infty$) を満

たしている。 E^{H^∞} は m による積分に他ならない。

仮定 $E^B(fg) = E^B(f)E^B(g) \quad (f, g \in B).$

多くの例では仮定を満たしていて、満たしていない例が知られていない。例の(2)で、 $B = [\bigcup_{n \geq 0} \bar{Z}_2^n A]_*$ とすると、 E^B は仮定を満たしている。 $I_B = \{f \in B; E^B(f) = 0\}$ とすると、 $H^\infty = E^B(H^\infty) + I_B$ と書ける。例の(2)では $I_B = [\bigcap_{n \geq 0} \bar{Z}_2^n A]_*$ である。

$g \in [B]_1$ が weak outer (function) とは、 $\int \exp E^B(\log |g|) dm = \int |E^B(g)| dm$ かつ $|E^B(g)| \geq 0$ となることで、 $g \in B$ が weak inner (function) とは $|g| = 1$ となることである。ここで $E^B(\log |g|) = \lim_{0 < \varepsilon \rightarrow 0} E^B(\log(|g| + \varepsilon))$ として定義される。

$g \in H^1$ について $\exp \int \log |g| dm \geq |\int g dm|$ は Jensen の不等式といわれるが、 g が outer というのはこの不等式が等式になることである。 $g \in [B]_1$ について常に $\exp E^B(\log |g|) \geq |E^B(g)|$ よって $\int \exp E^B(\log |g|) dm \geq \int |E^B(g)| dm$ が成立するが [5]、 $B = H^\infty$ のときこれは Jensen の不等式に他ならない。 g が weak outer というのはこの不等式が等式になることである。もちろん $B = H^\infty$ のとき weak outer な outer である。また $\exp \int \log |g| dm = \exp \int E^B(\log |g|) dm \leq \int \exp E^B(\log |g|) dm$ 。 $\int \log w dm > -\infty$ なら $E^B(\log w) > -\infty$ は明らかであるが、逆は云えない。次の定理は問題 I に対す

る部分的な解答である[5]。例(2)については完全に解決される。

定理 I-3 (1) $w \in L^1$, $w \geq 0$ かつ $X_{E(w)} \in B$ とするとき、 $X_{E(w)} E^B(\log w) > -\infty$ は $[B]_2$ のある weak outer g があって $w = X_{E(w)} |g|^2$ となるための必要十分条件である。

(2) $f \in [B]_1$ かつ $X_{E(f)} \in B$ とするとき、 $X_{E(f)} E^B(\log |f|) > -\infty$ は weak inner g と weak outer g があって $f = X_{E(f)} g g$ となるための必要十分条件である。

(3) $f \in H^1$ かつ $f = g g$ と weak-inner-outer-factorization ができているとする。 $\{h \in L^\infty; h[E^B(g)H^\infty]_2 \subseteq [E^B(g)H^\infty]_2\} = H^\infty$ となることは $f = g' g'$ かつ $(g' \in H^1)$ と weak-inner-outer-factorization ができるための必要十分条件である。

(4) B は L^∞ を reduce する零以外の部分空間を含まないとする。 $w \in L^1$, $w \geq 0$ かつ $X_{E(w)} \in B$ とするとき、 $X_{E(w)} E^B(\log w) > -\infty$ ならば、 $w = X_{E(w)} |h|^2$ ($h \in H^2$) とできる。

証明。(1) $X_{E(w)} E^B(\log w) > -\infty$ とする。 $f \in I_B$ ならば、 B に対する Jensen の不等式と conditional expectation に対する geometric-arithmetic means の不等式により、任意の $X_E w \neq 0$ である $X_E \in B$ に対して、 $\int_E |1-f|^2 w dm \geq \int_E \exp E^B(\log w) dm > 0$ となる。[4] または [5] より、

$M_W = \times_{E(W)} \{ [B]_2 \mid |g|=1 \}$ とできるから、factorization
ができる。逆はやはり B に対する Jensen の不等式を使う。

(2) は (1) より明らか。(3) $\{ h \in L^\infty ; h [E^B(g)H^\infty]_2 \subseteq [E^B(g)H^\infty]_2 \}$
 $= H^\infty$ により、定理 I-1 は $E^B(g) = g \cdot g_0$ ($g_0 \in H^1$) を示
している。 $\bar{g}_0 \in B$ とできるから、 $g' = g \cdot g_0$ か $g' = \bar{g}_0 \cdot g$ と
すると $f = g' \cdot g'$ か $g' \in H^1$ となる。逆は明らか。(4)

M_W は (1) と同じく $M_W = \times_{E(W)} \{ [B]_2 \mid |g|=1 \}$ とできるが、
 B についての仮定より M_W は L^∞ を reduce する零以外の部分
空間を含まないから、定理 I-1 よりである。///

$g \in [B]_1$ とする。 g が weak outer であることは、 $[gB]_1 = [B]_1$
 または $[gI_B]_1 = [I_B]_1$ か $|E^B(g)| > 0$ となることと同値で
ある。 $g \in H^1$ が outer ならば weak outer である。もっと一
般に、 $g \in H^1$ が $g = \bar{g}h$ ($\bar{g} \in B$) と inner-outer-factorization
されているならば、weak outer である。 $g \in H^1$ が $E^B(g) = g$
 か $|g| > 0$ ならば、weak outer である。

II 章 作用素に値をとる解析関数の factorization

T_1 を単位円周、 $d\theta/2\pi$ を T_1 上の正規ルベーグ測度、 $\mathcal{H}$ を可
分ヒルベルト空間かつ $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ を $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素の全体
とする。 T_1 上の $\mathcal{H}$ に値をとる可測関数 F とは $(F(e^{i\theta}), x)_{\mathcal{H}}$

$(x \in \mathcal{H})$ がルベーグ可測関数であることである。ここで
 $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$ は $\mathcal{H}$ の内積である。 $L^2_{\mathcal{H}} = \{ F \text{ 可測関数} ; \int \|F(e^{i\theta})\|_{\mathcal{H}}^2 d\theta < \infty \}$ とすると、 $F \in L^2_{\mathcal{H}}$ ならば $F(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\theta}$ ($f_n \in \mathcal{H}$) と書ける。 $H^2_{\mathcal{H}} = \{ F \in L^2_{\mathcal{H}} ; F(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{in\theta} \}$ とする。 T_1 上の $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ に値をとる可測関数 W とは $W(e^{i\theta})x$ ($x \in \mathcal{H}$) が可測関数であることである。 $\|W\|_{\infty} = \text{ess. sup } \|W(e^{i\theta})\|_{\mathcal{H}}$, $L^{\infty}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = \{ W \text{ 可測関数} ; \|W\|_{\infty} < \infty \}$ かつ $H^{\infty}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = \{ G \in L^{\infty}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} ; GH^2_{\mathcal{H}} \subseteq H^2_{\mathcal{H}} \}$ とする。

$W \in L^{\infty}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$ が a.e. - invertible とは、 $W(e^{i\theta})^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ a.e. θ 。 次の定理は Lowdenslager (cf. [3, p117]) によるが、関数環の定理 I-1 に相当する。

定理 II-1 $W \in L^{\infty}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$ かつ $W(e^{i\theta}) \geq 0$ a.e. θ とし、
 かつ $\mathcal{M}_W = W^{1/2} H^2_{\mathcal{H}}$ の $L^2_{\mathcal{H}}$ での閉包とする。 $\mathcal{M}_W$ が $z = e^{i\theta}$ を reduce する零以外の部分空間を含まないことは、 $W(e^{i\theta}) = G(e^{i\theta})^* G(e^{i\theta})$ a.e. θ ($G \in H^{\infty}_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$) と書けることの必要十分条件である。

上の定理は factorization の必要十分条件を与えているが、その十分条件はわかりにくいので良い十分条件を捜したいが、それについては Wiener - Devinatz (cf. [3, p119 ~ p123]) による次の定理がある。 $\dim \mathcal{H} < \infty$ のときは Wiener によ

ら、一般には Devinatz による。これは関数環の定理 I-2 に相当する。定理 II-2 と II-3 を証明するのに必要な、関数環のときには明らかな Douglas [2] による補題を述べておく。この補題はもっと一般的な形で彼によって示されている。

補題 $W_1, W_2 \in L^\infty_{B(\mathcal{H})}$ かつ $W_1(e^{i\theta}) \geq 0, W_2(e^{i\theta}) \geq 0$ a.e. θ とする。

(i) $W_2(e^{i\theta}) \geq W_1(e^{i\theta})$ a.e. θ , (ii) $\text{null}[W_2(e^{i\theta})] = \text{null}[W_1(e^{i\theta})]$ a.e. θ かつ (iii) $W_1(e^{i\theta})W_2(e^{i\theta}) = W_2(e^{i\theta})W_1(e^{i\theta})$ a.e. θ とするとき、もし $W_1(e^{i\theta}) = G_1(e^{i\theta})^* G_1(e^{i\theta})$ a.e. θ ($G_1 \in H^\infty_{B(\mathcal{H})}$) ならば、 $W_2(e^{i\theta}) = G_2(e^{i\theta})^* G_2(e^{i\theta})$ a.e. θ ($G_2 \in H^\infty_{B(\mathcal{H})}$)。

定理 II-2 $W \in L^\infty_{B(\mathcal{H})}, W(e^{i\theta}) \geq 0$ a.e. θ かつ W は a.e.-invertible とする。もし $\int_0^{2\pi} \log \|W(e^{i\theta})^{-1}\|_{\mathcal{H}}^{-1} d\theta/2\pi > -\infty$ ならば、ある $G \in H^\infty_{B(\mathcal{H})}$ があって $W(e^{i\theta}) = G(e^{i\theta})^* G(e^{i\theta})$ a.e. θ とできる。 $\dim \mathcal{H} < \infty$ のとき、逆も正しくかつ条件は $\int_0^{2\pi} \log |\det W(e^{i\theta})| d\theta/2\pi > -\infty$ で置きかえることができる。

$\dim \mathcal{H} = \infty$ のとき、 W が a.e.-invertible はかなり強く、 $W(e^{i\theta})$ が a.e. θ で $B(\mathcal{H})$ の dense range 作用素でもそうはならない。 $W(e^{i\theta})$ が a.e. θ で $B(\mathcal{H})$ の closed range 作用素のとき、定理 II-2 に相当する factorization を Helson-

Lowdenslager は示している。しかし closed range 作用素でないときはたとえ dense range でも知られていない。また $W = G^*G$ ($G \in H^\infty_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$) が a.e.-invertible としても、 $\int_0^{2\pi} \log \|W(e^{i\theta})^{-1}\|_{\mathcal{H}}^{-1} d\theta/2\pi = -\infty$ となる例を見つけるのは易しい。

問題Ⅱ $\dim \mathcal{H} = \infty$ のとき、 W が a.e.-invertible ではないが a.e.-dense range のとき factorization はどのように得られるだろうか？ $\dim \mathcal{H} = \infty$ のとき、 W が a.e.-invertible かつ $\int_0^{2\pi} \log \|W(e^{i\theta})^{-1}\|_{\mathcal{H}}^{-1} d\theta/2\pi = -\infty$ となるとき factorization はどのように得られるだろうか？

問題を解決するために、 $\mathcal{C}$ を $\mathcal{H}$ の閉部分空間とすると $\mathcal{H} = L^2_{\mathcal{C}}$ と表現する。このとき、 $\mathcal{B}(L^2_{\mathcal{C}}) \supset L^\infty_{\mathcal{B}(\mathcal{C})}$ かつ $L^\infty_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = L^\infty_{\mathcal{B}(L^2_{\mathcal{C}})} \supset L^\infty_{\mathcal{B}(\mathcal{C})}$ 。 $T_1 \times T_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; |z_1| = |z_2| = 1\}$ とし $d\theta d\varphi/4\pi^2$ をその上の正規ルベーク測度とする。 $L^2(T_1 \times T_2)_{\mathcal{C}}$ は $L^2_{\mathcal{H}}$ と同様に定義すると、 $F \in L^2(T_1 \times T_2)_{\mathcal{C}}$ ならば $F(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} f_{nm} e^{in\theta} e^{im\varphi}$ ($f_{nm} \in \mathcal{C}$) と書ける。 $H^2(T_1 \times T_2)_{\mathcal{C}} = \{F \in L^2(T_1 \times T_2)_{\mathcal{C}}; F(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) = \sum_{n \geq 0, m=-\infty}^{\infty} f_{nm} e^{in\theta} e^{im\varphi}\}$ とする。 $L^\infty(T_1 \times T_2)_{\mathcal{B}(\mathcal{C})}$ と $L^\infty_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$ と同様に定義し、かつ $H^\infty(T_1 \times T_2)_{\mathcal{B}(\mathcal{C})} = \{G \in L^\infty(T_1 \times T_2)_{\mathcal{B}(\mathcal{C})}; G H^2(T_1 \times T_2)_{\mathcal{C}} \subseteq H^2(T_1 \times T_2)_{\mathcal{C}}\}$ とする。 次の簡単な補題は、 $L^\infty_{\mathcal{B}(\mathcal{C})}$ の元を二変数の関数とみること

可能にしている[7].

補題 (1) $L^2_{L^2_C}$ は $L^2(T_1 \times T_2)_C$ とヒルベルト空間として同型である. この同型対応は $H^2_{L^2_C}$ と $H^2(T_1 \times T_2)_C$ を同型にする. (2) (1)の同型対応を通して, $L^{\infty}_{B(C)}$ と $L^{\infty}(T_1 \times T_2)_{B(C)}$ は 1 ニタリ-同値となる.

$W \in L^{\infty}_{B(C)}$ かつ $W(e^{i\theta}) \geq 0$ a.e. θ とする. $\tilde{W} \in L^{\infty}(T_1 \times T_2)_{B(C)}$ は W と 1 ニタリ-同値な作用素を表わす. $\tilde{W}(e^{i\theta}, e^{i\varphi})^{-1} \in B(C)$ a.e. (θ, φ) とすると, W は $L^2_{L^2_C}$ 上の作用素として dense range であるが必ずしも a.e.-invertible ではない. なぜならば, $\tau(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) = \|\tilde{W}(e^{i\theta}, e^{i\varphi})^{-1}\|_C^{-1}$ とすると, $\tilde{W}(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) \geq \tau(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) I_C$ a.e. (θ, φ) (I_C は C 上の恒等作用素). もし W が a.e.-invertible ならば, $\lambda(e^{i\theta}) = \|W(e^{i\theta})^{-1}\|_{\mathcal{H}}^{-1}$ に対して, $W(e^{i\theta}) \geq \lambda(e^{i\theta}) I_{\mathcal{H}}$ a.e. θ . $(\lambda(e^{i\theta}) I_{\mathcal{H}})^{\sim} = \tilde{\lambda}(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) I_C$ と書くと, 同型対応の仕方から $\tilde{\lambda}(e^{i\theta}, e^{i\varphi})$ は φ について定数であるから $\hat{\lambda}(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) = \hat{\lambda}(e^{i\theta})$ と書ける. よって, $\tilde{W}(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) \geq \tau(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) I_C \geq \hat{\lambda}(e^{i\theta}) I_C$ a.e. (θ, φ) かつ $\inf_{\varphi} \tau(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) \geq \hat{\lambda}(e^{i\theta})$. これは, $\tilde{W}(e^{i\theta}, e^{i\varphi})^{-1} \in B(C)$ a.e. (θ, φ) であり $W(e^{i\theta})$ は a.e.-invertible ではないことを示している. 上の注意より a.e.-invertible な $W(e^{i\theta})$ が $\int_0^{2\pi} \log \|W(e^{i\theta})^{-1}\|_{\mathcal{H}}^{-1} d\theta/2\pi = -\infty$ であり, $\int_0^{2\pi} \log \|\tilde{W}(e^{i\theta}, e^{i\varphi})^{-1}\|_C^{-1} d\theta/2\pi > -\infty$ a.e. φ と

なる W がある。 $\int_0^{2\pi} \log \|W(e^{i\theta})^{-1}\|_C^{-1} d\theta/2\pi > -\infty$ なら明らかに $\int_0^{2\pi} \log \|\tilde{W}(e^{i\theta}, e^{i\varphi})^{-1}\|_C^{-1} d\theta/2\pi > -\infty$ a.e. φ となる。次の定理は関数環の定理 I-3 に相当し、問題 II に対する部分的な解答である [7]。

定理 II-3 $W \in L_{B(C)}^\infty$ かつ $W(e^{i\theta}) \geq 0$ a.e. θ とする。

$\tilde{W} \in L^\infty(T_1 \times T_2)_{B(C)}$ を W と 1 ニタリ一同値な作用素としかつ

$\tilde{W}(e^{i\theta}, e^{i\varphi})^{-1} \in B(C)$ a.e. (θ, φ) とする。もし

$\int_0^{2\pi} \log \|\tilde{W}(e^{i\theta}, e^{i\varphi})^{-1}\|_C^{-1} d\theta/2\pi > -\infty$ a.e. φ ならば、ある $G \in H_{B(C)}^\infty$ があって $W(e^{i\theta}) = G(e^{i\theta})^* G(e^{i\theta})$ a.e. θ とできる。

$\dim C < \infty$ のとき、逆も正しくかつ条件は $\int_0^{2\pi} \log |\det \tilde{W}(e^{i\theta}, e^{i\varphi})| d\theta/2\pi > -\infty$ a.e. φ で置きかえることができる。

証明. $\tau(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) = \|\tilde{W}(e^{i\theta}, e^{i\varphi})^{-1}\|_C^{-1}$ とすると、 $\tilde{W}(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) \geq \tau(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) I_C$ a.e. (θ, φ) かつ $\int_0^{2\pi} \log \tau(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) d\theta/2\pi > -\infty$ a.e. φ . $B = \{f \in L^\infty(T_1 \times T_2); f I_C H^2(T_1 \times T_2)_C \subseteq H^2(T_1 \times T_2)_C\}$ とすると、例の (2) の A について $B = [\bigcup_{n \geq 0} \bar{z}_2^n A]_*$ となる。 E^B を $B \cap \bar{B}$ への conditional expectation とすると、上のことは $E^B(\log \tau) > -\infty$ a.e. (θ, φ) を示している。定理 I-3 より $\tau = |g|^2$ となる $g \in B$ があるから、 $\tau I_C = (g I_C)^* (g I_C)$ かつ $g I_C \in H^\infty(T_1 \times T_2)_C$. $\tilde{W} \tau I_C = \tau I_C \tilde{W}$ から W が Douglas の補題の条件を満たす、よってこの定理の前半が導

びける。 $\dim C < \infty$ のとき、 $\tilde{W}$ の determinant が計算できかつ $g \in B(|g| > 0)$ ならば $E^B(\log |g|) > -\infty$ a.e. (θ, φ) より逆がいえる。///

参照 文献

1. Gamelin, T. : Uniform algebras, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1969.
2. Douglas, R. : On factoring positive operator functions, J.Math.Mech. 16(1966), 119-126.
3. Helson, H. : Analyticity on compact abelian groups, Algebras in analysis, Williamson, J., Academic press, 1975, 1-62.
4. Nakazi, T. : Weak-* Dirichlet algebra に現われる近似について、数理研講究録 289(1976), 48-57.
5. Nakazi, T. : Extended weak-* Dirichlet algebras, to appear in Pacific J. Math..
6. Nakazi, T. : Helson's existence theorem of function algebras, to appear in Arkiv der Math..
7. Nakazi, T. - Takahashi, K. : 準備中.
8. Srinivasan, T. - Wang, J. : Weak-* Dirichlet algebras, Function algebras, Birtele, F., Scott-Foresman,

Chicago, III., 1966, 216-249.

9. Tanaka, J.: A note on Helson's existence theorem, Proc. Amer. Math. 69(1978), 87-90.