

有界等質領域上の正則関数からなるヒルベルト空間と その上への直交射影

山口大 理 井上 透

D を $\mathbb{C}^n$ の単位開球 i.e. $D = \{z \in \mathbb{C}^n; |z| < 1\}$, ν を $\nu(D) = 1$ なる Lebesgue 測度, ν に関する D の L^p 空間を $L^p(D, \nu)$, D 上の正則関数全体を $H(D)$, $H^p(D, \nu) = L^p(D, \nu) \cap H(D)$ とする。

Forelli-Rudin [2] は 各 $s = x + iy \in \mathbb{C}$ に対し核関数 $G_s(z, w) = (1 - |w|^2)^s (1 - w^* z)^{-(n+1+s)}$ (z, w は列ベクトルで $w^* = \overline{w}^t$ とする) を対応させ

$$(T_s f)(z) = \binom{n+s}{n} \int_D G_s(z, w) f(w) d\nu(w)$$

で定義される作用素 T_s を考察し、次のことを示している。

(a) $1 \leq p < \infty$ のとき

T_s が $L^p(D, \nu)$ の有界作用素 $\iff (1+x)p > 1$.

(b) $(1+x)p > 1$ のとき T_s は $L^p(D, \nu)$ の $H^p(D, \nu)$ 上への射影。

(c) $p = 2$ のとき

T_s が $L^2(D, \nu)$ の $H^2(D, \nu)$ 上への直交射影 $\iff s = 0$.

/

2

Kolaski [8] は D 上の測度 $d\sigma_s(z) = (1-|z|^2)^s dv(z)$ を考え、上の T_s を

$$(T_s f)(z) = \binom{n+s}{n} \int_D (1-w^*z)^{-(n+1+s)} f(w) d\sigma_s(w)$$

と $(1-w^*z)^{-(n+1+s)}$ を核とし測度 σ_s に関する積分作用素とみなせば、 $H^2(D, \sigma_s) = L^2(D, \sigma_s) \cap H(D)$ とおくとき

$$\begin{cases} s > -1 \quad (s \in \mathbb{R}) \text{ なる任意の } s \text{ に対し } T_s \text{ は } L^2(D, \sigma_s) \text{ の} \\ H^2(D, \sigma_s) \text{ 上への直交射影である} \end{cases}$$

ことを示した。

ところで $K(z, w)$ を D の Bergman kernel i.e. $H^2(D, \nu)$ の再生核 ($K(z, w)$ は $K(\cdot, w) \in H^2(D, \nu)$ for $\forall w \in D$, $f(z) = \int_D K(z, w) f(w) dv(w)$ for $\forall f \in H^2(D, \nu)$ で特徴づけられ、 $\mathbb{C}^n$ の任意の有界領域に対し定義できる) とすると、今の場合 $K(z, w) = (1-w^*z)^{-(n+1)}$ で与えられる。そこで $t \in \mathbb{R}$ に対し D 上の測度 μ_t を

$$d\mu_t(z) = K(z, z)^{-t+1} dv(z)$$

で定義すれば、 $t = \frac{n+1+s}{n+1}$ のとき

$$d\sigma_s(z) = d\mu_t(z), \quad (1-w^*z)^{-(n+1+s)} = K(z, w)^t.$$

さらに恒等的に 1 の値をとる関数を $\mathbb{1}$ とすれば、 $s > -1$ のとき $\mathbb{1} \in H^2(D, \sigma_s)$ 、従って $T_s \mathbb{1} = \mathbb{1}$ より

$$\binom{n+s}{n} = \left(\int_D (1-w^*z)^{-(n+1+s)} d\sigma_s(w) \right)^{-1}$$

これより上の T_s は

$$(P_t f)(z) = C_t \int_D K(z, w)^* f(w) d\mu_t(w)$$

$$\left(C_t = \left(\int_D K(z, w)^* d\mu_t(w) \right)^{-1} \right)$$

で定義される P_t と同じものである。 T_s をこの形に書けば、この P_t は単位球以外の領域に対しても定義できる場合があるが、このとき単位球に対する Kolaski の結果がそのような領域についても成立するかという疑問が生じる。

ここでは D が有界等質領域 (その正則同型群が推移的に作用するような $\mathbb{C}^n$ の有界領域) のときはそれが成立すること、

すなわち、 $H^2(D, \mu_t) = L^2(D, \mu_t) \cap H(D)$ とおけば

$$\begin{cases} t \geq 1 \text{ のとき } H^2(D, \mu_t) \neq \{0\} \text{ 以上で定義された } P_t \text{ は} \\ L^2(D, \mu_t) \text{ の } H^2(D, \mu_t) \text{ 上への直交射影である} \end{cases}$$

ことと、さらに

$$\begin{cases} D \text{ が有界対称領域 (各 } z \in D \text{ に対し } z \text{ を孤立不動点とする} \\ D \text{ の正則同型群で } \sigma_z^2 = I \text{ となるものが存在する) のとき} \\ \text{きは、ベクトル値関数 (核関数は作用素値) の場合に拡張される} \end{cases}$$

ことの概略を示す (詳細は [7] 参照)。後者の場合 D の正則同型群の正則離散系列に属する表現は D 上のベクトル値正則関

数からなるあるヒルベルト空間上で実現できるが、その空間上への直交射影になっている。これらの結果は領域に正則同型として推移的に作用する Lie 群のある 2-タリ表現を構成することにより証明される。

§ 1. この § では D は有界等質領域とする。Vinberg et al. [10] により D は II 型の等質 Siegel 領域と正則同型、従って特に D は単連結である。 D の Bergman kernel を $K(z, w)$ とする (D が有界対称領域のときは、Bergman kernel の explicit formula が知られている: cf. [5], [9], [6])。 D は等質だから $\lim_{z \rightarrow \partial D} K(z, z) = \infty$ となる ([1], p.40)。従ってある $C > 0$ が存在して

$$(1.1) \quad K(z, z)^{-1} \leq C \quad \text{for } \forall z \in D.$$

D の正則同型群は Lie 群になるが、その単位元を含む連結成分の universal covering group を G とすると、 G も自然に D に推移的に作用する。 $g \in G, z \in D$ に対して正則写像 $u \rightarrow g \cdot u$ の点 z での complex Jacobian を $j(g, z)$ とする。 $G \times D$ は単連結だから、 $t \in \mathbb{R}$ に対して $j(g, z)^t$ か $j(e, z)^t = 1$ ($\forall z \in D, e$ は G の単位元) なるように定義できる。同様に $K(z, w)^t$ を $K(z, z)^t > 0$ ($\forall z \in D$) なるように定義できる。このとき

$$(1.2) \quad j(g_1 g_2, z)^t = j(g_1, g_2 z)^t j(g_2, z)^t, \quad g_1, g_2 \in G, z \in D,$$

$$(1.3) \quad K(g \cdot z, g \cdot w)^t = j(g, z)^{-t} K(z, w)^t \overline{j(g, w)^t}, \quad g \in G, z, w \in D$$

が成り立つ。

ν を D の Lebesgue 測度とし、 $t \in \mathbb{R}$ に対し D 上の測度 μ_t を

$$d\mu_t(z) = K(z, z)^{-t+1} d\nu(z)$$

で定義する。

(1.4) 注意 μ_0 ($t=0$ のとき) は G の変換で不変な測度で、この μ_0 を用いれば $d\mu_t(z) = K(z, z)^{-t} d\mu_0(z)$ 。

μ_t に関する D の L^2 空間を $L^2(D, \mu_t)$ 、また D 上の正則関数全体を $H(D)$ とし $H^2(D, \mu_t) := L^2(D, \mu_t) \cap H(D)$ とおく。 $L^2(D, \mu_t)$ は自然な内積によりヒルベルト空間になる。この内積に関する norm を $\|\cdot\|_t$ で表わすことにする。

(1.5) 補題 $t \in \mathbb{R}$ を固定すると、 D のコンパクト集合 X に対し $C_X \geq 0$ が存在し

$$|f(z)| \leq C_X \|f\|_t$$

が任意の $f \in H^2(D, \mu_t)$ と $z \in X$ について成り立つ。

この補題と (1.1) より次の命題が得える。

(1.6) 命題 $t \geq 1$ ならば $H^2(D, \mu_t) \neq \{0\}$ で $H^2(D, \mu_t)$ は $L^2(D, \mu_t)$ の閉部分空間。

以下 $t \geq 1$ と仮定する。 $f \in L^2(D, \mu_t)$ に対し

$$(P_t f)(z) = C_t \int_D K(z, w)^t f(w) d\mu_t(w)$$

で、この積分が存在するような $z \in D$ に対し、 $P_t f$ を定義する。ただし $C_t = \left(\int_D K(z, w)^t d\mu_t(w) \right)^{-1}$ (後で C_t は z に依存しないことがわかる)。

(1.7) 定理 任意の $f \in L^2(D, \mu_t)$ と任意の $z \in D$ に対し $(P_t f)(z)$ を定義する積分は存在し、 $P_t f$ は $H^2(D, \mu_t)$ に属す。さらに $P_t: L^2(D, \mu_t) \rightarrow H^2(D, \mu_t)$ は $H^2(D, \mu_t)$ 上への直交射影である。

以下この定理の証明のあらすじ、および G のユニタリ表現との関係について述べる。

$f \in L^2(D, \mu_t)$, $g \in G$ に対し

$$(U_t(g)f)(z) = j(g^{-1}, z)^t f(g^{-1} \cdot z)$$

とおけば (1.2), (1.3), (1.4) より次の命題がいえ。

(1.8) 命題 $U_t: g \rightarrow U_t(g)$ は G の $L^2(D, \mu_t)$ 上でのユニタリ表現である。

明らかに $H^2(D, \mu_t)$ は表現 U_t の不変部分空間であるが、次の命題は $H^2(D, \mu_t)$ の表現論的意味を与える。

(1.9) 命題 G の $H^2(D, \mu_t)$ 上での表現 $(U_t, H^2(D, \mu_t))$ は既約。

補題 (1.5) より各 $z \in D$ に対し $f \rightarrow f(z)$ は $H^2(D, \mu_t)$ から $\mathbb{C}$ への連続な線型写像である。従って $H^2(D, \mu_t)$ は再生核をもつ。

次の (1.10a) ~ (1.10c) をみたす $K_t: D \times D \rightarrow \mathbb{C}$ が存在する。
(すなわち)

$$(1.10a) \quad K_t(\cdot, w) \in H^2(D, \mu_t) \quad \text{for } \forall w \in D,$$

$$(1.10b) \quad K_t(w, z) = \overline{K_t(z, w)},$$

$$(1.10c) \quad f(z) = \int_D K_t(z, w) f(w) d\mu_t(w) \quad \text{for } \forall f \in H^2(D, \mu_t).$$

$(U_t, L^2(D, \mu_t))$ がヒルベルト空間表現ということからこの再生核 K_t は次の性質をもつことがいえる。

(1.11) 補題 任意の $g \in G, z, w \in D$ に対し

$$K_t(g \cdot z, g \cdot w) = j(g, z)^{-t} K_t(z, w) \overline{j(g, w)^{-t}}$$

とこの関数 $M: D \times D \rightarrow \mathbb{C}$ が

$$(a) \quad M(z, w) \text{ は } z \text{ について正則で } M(w, z) = \overline{M(z, w)}$$

$$(b) \quad M(g \cdot z, g \cdot w) = j(g, z)^{-t} M(z, w) \overline{j(g, w)^{-t}}, \quad g \in G, z, w \in D$$

を満たせば D は等質だから M は定数倍を除いて一意に定まる。

従って (1.3) と補題 (1.11) より次の補題がいえる。

(1.12) 補題

$$K_t(z, w) = c_t K(z, w)^t$$

$$\text{ここで } c_t = \left(\int_D K(z, w)^t d\mu_t(w) \right)^{-1} \text{ で } c_t \text{ は } z \text{ によらない。}$$

定理 (1.7) の証明

$$f \in L^2(D, \mu_t) \text{ とし } f = f_1 + f_2, \quad f_1 \in H^2(D, \mu_t), \quad f_2 \perp H^2(D, \mu_t)$$

と分解すると、(1.10c) と補題 (1.12) より $P_t f_1 = f_1$ 。一方

$$\begin{aligned} (P_t f_2)(z) &= \int_D K_t(z, w) f_2(w) d\mu_t(w) \\ &= \int_D f_2(w) \overline{K_t(w, z)} d\mu_t(w) = 0 \quad ((1.10ab) \text{ より}) \end{aligned}$$

$$\therefore P_t f = f_1$$

§ 2. この § では D は有界対称領域とする。 D は Harish-Chandra realization により circular starlike 領域と正則同型であることが知られている。以下では Harish-Chandra realization が本質的なのでその復習から始める (詳細は [4] 参照)

まず D は正則同型として作用する線型単純 Lie 群 G とその極大コンパクト部分群 K により $D = G/K$ とかける。 $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ を G, K の Lie 環とし、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を Cartan 分解とする。 $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ の複素化を $\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{k}_\mathbb{C}$ とすれば D の複素構造により

$$\mathfrak{p}_\mathbb{C} = \mathfrak{p}^+ + \mathfrak{p}^-, \quad \mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{k}_\mathbb{C} + \mathfrak{p}^+ + \mathfrak{p}^-$$

という直和分解が定まる。ここで $\mathfrak{p}^\pm$ は可換な部分環で $\mathfrak{k}_\mathbb{C}$ で normalize される。

$G_\mathbb{C}$ を G の複素化とし、 $\mathfrak{k}_\mathbb{C}, \mathfrak{p}^\pm$ を $\mathfrak{k}_\mathbb{C}, \mathfrak{p}^\pm$ に対応する $G_\mathbb{C}$ の連結な部分群とする。 $\Omega = P^+ K_\mathbb{C} P^-$ とおけば Ω は $G_\mathbb{C}$ の稠密な開集合で G を含んでいる。また $(X, k, Y) \rightarrow \exp X \cdot k \cdot \exp Y$ で定義される $\mathfrak{p}^+ \times \mathfrak{k}_\mathbb{C} \times \mathfrak{p}^-$ から Ω への写像は正則同型である。従って $g \in \Omega$ は

$$(2.1) \quad g = \pi_+(g) \cdot \pi_0(g) \cdot \pi_-(g), \quad \pi_\pm(g) \in P^\pm, \pi_0(g) \in K_\mathbb{C}$$

と一意的に表わされる。そこで $\zeta: \Omega \rightarrow \mathfrak{p}^+$ を $\zeta(g) = \log \pi_+(g)$ で定義すれば、 ζ は $D = G/K$ から $\zeta(G) \subset \mathfrak{p}^+$ への正則同型を引き起こし $\zeta(G)$ は $\mathfrak{p}^+$ の有界領域となる。以下 $D = G/K = \zeta(G) \subset \mathfrak{p}^+$ とする。このとき G の D 上での作用は $g \cdot z = \zeta(g \cdot \exp z)$ であり

えられる。

$\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{g}$ の極大可換部分環とすれば、 $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の Cartan 部分環である。 $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{h}$ に関するルート系とし、 $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ をそれぞれコンパクト, 非コンパクトルートの全体とする。従って

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} + \sum_{\alpha \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}} \mathfrak{g}_{\alpha}^{\alpha}, \quad \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}} \mathfrak{g}_{\alpha}^{\alpha}$$

となつてゐる ($\mathfrak{g}_{\alpha}^{\alpha}$ はルート α に対する固有空間)。 $\sqrt{-1}\mathfrak{h}$ の $\mathfrak{h}$ に対する線型順序を、対応する正ルートをそれぞれ $\mathfrak{h}^{+}$, $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^{+}$, $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{+}$ としたとき、 $\mathfrak{g}^{+} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^{+}} \mathfrak{g}_{\alpha}^{\alpha}$ とおきように入れることが出来る。

λ を $\mathfrak{h}$ 上の整形式で $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^{+}$ に関し dominant とする。 すなわち、 $\langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0$ ($\forall \alpha \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^{+}$) とする。 τ_{λ} を λ を最高ウェイトとする $K_{\mathbb{C}}$ の正則表現、 E_{λ} をその表現空間とし $J_{\lambda}: G \times D \rightarrow GL(E_{\lambda})$ と $K_{\lambda}: D \times D \rightarrow GL(E_{\lambda})$ を

$$J_{\lambda}(g, z) = \tau_{\lambda}(\pi_0(g \exp z))$$

$$K_{\lambda}(z, w) = \tau_{\lambda}(\pi_0(\exp(-\bar{w}) \exp z))^{-1}$$

で定義する (π_0 は (2.1) で定義したものの、 π_1 は $w \rightarrow \bar{w}$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{g}$ に関する conjugation とする)。 E_{λ} に $\tau_{\lambda}(K)$ 不変な内積を入れ置き、 $J_{\lambda}(g, z)$, $K_{\lambda}(z, w)$ の adjoint を $J_{\lambda}(g, z)^*$, $K_{\lambda}(z, w)^*$ とすれば、 J_{λ} と K_{λ} は次の性質をもつてゐる。

(2.2a) $J_\lambda(g, z)$ は $g \in G$ に関し C^∞ かつ $z \in D$ に関し正則

$$(2.2b) \quad J_\lambda(g_1 g_2, z) = J_\lambda(g_1, g_2 \cdot z) J_\lambda(g_2, z),$$

$$(2.3a) \quad K_\lambda(w, z) = K_\lambda(z, w)^*,$$

$$(2.3b) \quad K_\lambda(g \cdot z, g \cdot w) = J_\lambda(g, z) K_\lambda(z, w) J_\lambda(g, w)^*.$$

そこで $\rho_n = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi_n^+} \alpha$ とおき、 $\text{vol}(D)$ を Lebesgue 測度 ν に関する D の volume とおけば、 D の Bergman kernel K は

$$K(z, w) = \text{vol}(D)^{-1} K_{-\rho_n}(z, w)$$

と与えられる ([6], p. 123). μ を

$$d\mu(z) = K(z, z) d\nu(z)$$

で定義される D の G 不変な測度とし、

$$L^2(D, \lambda) = \left\{ f: D \rightarrow E_\lambda; \begin{array}{l} f \text{ は measurable} \\ \|f\|_\lambda^2 = \int_D \langle K_\lambda(z, z)^{-1} f(z), f(z) \rangle d\mu(z) < \infty \end{array} \right\}$$

とおけば、 $L^2(D, \lambda)$ は内積

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_D \langle K_\lambda(z, z)^{-1} f_1(z), f_2(z) \rangle d\mu(z)$$

によりヒルベルト空間になる。

$f \in L^2(D, \lambda)$, $g \in G$ に対し

$$(U_\lambda(g)f)(z) = J_\lambda(g^{-1}, z)^{-1} f(g^{-1} \cdot z)$$

とおくと

(2.4) 命題 $U_\lambda: g \rightarrow U_\lambda(g)$ は G の $L^2(D, \lambda)$ 上の π 表現.

$$H_\lambda = \{f \in L^2(D, \lambda); f \text{ は正則}\}$$

とおけば、 H_λ は $L^2(D, \lambda)$ の閉部分空間で表現 U_λ で不変であるが、次のことが知られている。

(2.5) 定理 (Harish-Chandra [3], Wallach [11])

$H_\lambda \neq \{0\}$ であるための必要十分条件は $\langle \lambda + \rho, \alpha \rangle < 0$
for $\forall \alpha \in \Phi_m^+$. ただし $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi_m^+} \alpha$. またこのとき表現
(U_λ, H_λ) は既約.

そこで以下 λ は $\langle \lambda + \rho, \alpha \rangle < 0$ ($\forall \alpha \in \Phi_m^+$) をみたすと仮定する。

$$c(\lambda) = \frac{1}{\dim E_\lambda} \prod_{\alpha \in \Phi_m^+} \frac{\langle \lambda + \rho, \alpha \rangle}{\langle \rho, \alpha \rangle}$$

とおき、 $f \in L^2(D, \lambda)$ に對し

$$(P_\lambda f)(z) = |c(\lambda)| \int_D K_\lambda(z, w) K_\lambda(w, w)^{-1} f(w) d\mu(w)$$

で $P_\lambda f$ を定義する。

(2.6) 定理 任意の $f \in L^2(D, \lambda)$ と $z \in D$ に對し $(P_\lambda f)(z)$ を定義する積分は存在し、 $P_\lambda f \in H_\lambda$. しかも $P_\lambda: L^2(D, \lambda) \rightarrow H_\lambda$ は上への直交射影である。

この定理と定理(1.7)と同様 H_λ の再生核をもち、それが $|c(\lambda)| K_\lambda(z, w)$ で与えられることを示すことにより証明される。まず H_λ の再生核から始まる。

$z \in D$ に對し $E_z: H_\lambda \rightarrow E_\lambda$ を $E_z(f) = f(z)$ で定義すると、 E_z が E_λ 上への連続線型写像であることはいえ、従って E_z の

adjoint $E_z^*: E_\lambda \rightarrow H_\lambda$ が存在し.

$$(2.7a) \quad \langle f(z), a \rangle_{E_\lambda} = \langle f, E_z^* a \rangle_{H_\lambda}, \quad f \in H_\lambda, a \in E_\lambda$$

をみたす. z は H_λ の再生核とよばれる関数 $R_\lambda: D \times D \rightarrow \text{End}(E_\lambda)$ を

$$R_\lambda(z, w) = E_z E_w^*$$

で定義する. このとき (2.7a) は

$$(2.7b) \quad \langle f(z), a \rangle_{E_\lambda} = \langle f(\cdot), R_\lambda(\cdot, z)a \rangle_{H_\lambda}$$

とかけらる.

(U_λ, H_λ) がユニタリ表現ということから次の補題がいえる.

(2.8) 補題 任意の $g \in G$, $z, w \in D$ に対し

$$R_\lambda(g \cdot z, g \cdot w) = J_\lambda(g, z) R_\lambda(z, w) J_\lambda(g, w)^*$$

この補題と (2.3), D の等質性, および T_λ の既約性より, $c > 0$ が存在して, 任意の $z, w \in D$ に対し, $R_\lambda(z, w) = c K_\lambda(z, w)$ と表すことがいえる. この c が $|c(\lambda)|$ に等しいことは, a_λ を T_λ の最高ウェイトベクトルとし, 定値関数 $1_\lambda: z \rightarrow a_\lambda$ に (2.7b) を適用することにより示される.

定理 (2.6) の証明

$f \in L^2(D, \lambda)$ とし $f = f_1 + f_2$, $f_1 \in H_\lambda$, $f_2 \perp H_\lambda$ と分解すると, $R_\lambda(z, w) = |c(\lambda)| K_\lambda(z, w)$ より, $\forall a \in E_\lambda, \forall z \in D$ に対し,

$$\begin{aligned} \langle (R_\lambda f)(z), a \rangle &= \int_D \langle K_\lambda(w, w) f(w), R_\lambda(w, z)a \rangle d\mu(w) \\ &= \langle f_1(\cdot), R_\lambda(\cdot, z)a \rangle + \langle f_2(\cdot), R_\lambda(\cdot, z)a \rangle \end{aligned}$$

$$= \langle f_1(z), a \rangle \quad ((2.7b) \text{ と } R_\lambda(\cdot, z)a = E_z^* a \in H_\lambda(f))$$

従って $R_\lambda f = f_1$,

最後にこの結果を $D = \mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}^n$ の単位球 B の表現の次数が n である場合に適用すればこのように示す。

例

$D = \{z \in \mathbb{C}^n; |z| < 1\}$, ν を $\nu(D) = 1$ なる Lebesgue 測度.

$d\mu(z) = (1 - |z|^2)^{-(n+1)} d\nu(z)$ とする. 1_n を n 次単位行列とし.

$s \in \mathbb{R}$ に対し

$L^2(D, s)$

$$:= \left\{ f: D \rightarrow \mathbb{C}^n; f \text{ は measurable} \right. \\ \left. \int_D (1 - |z|^2)^s \langle (1_n - z z^*)^{-1} f(z), f(z) \rangle d\mu(z) < \infty \right\}$$

$$H_s := \left\{ f \in L^2(D, s); f \text{ は正則} \right\}$$

と記す。

$$H_s \neq \{0\} \iff s > n+1$$

このとき $L^2(D, s)$ の H_s 上への直交射影 P_s は

$$(P_s f)(z)$$

$$= |c(s)| \int_D \frac{(1 - w^* w)^s}{(1 - w^* z)^s} (1_n - z w^*) (1_n - w w^*)^{-1} f(w) d\mu(w)$$

$$\left(|c(s)| = \frac{\prod_{j=1}^{n+1} (s - j)}{(s - n) \cdot n!} \right)$$

が与えられる。

References

- [1] W.L. Baily: Introductory lectures on automorphic forms, Iwanami, 1973.
- [2] F. Forelli and W. Rudin: Projections on spaces of holomorphic functions in balls, Indiana Univ. Math. J. 24 (1974), 593-602.
- [3] Harish-Chandra: Representations of semi-simple Lie groups VI, Amer. J. Math. 78 (1956), 564-628.
- [4] S. Helgason: Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Academic Press, New York, 1978.
- [5] L.K. Hua: Harmonic analysis of functions of several complex variables in the classical domains, Trans. Math. Monographs, vol. 6, Amer. Math. Soc., 1963.
- [6] T. Inoue: Unitary representations and kernel functions associated with boundaries of a bounded symmetric domain, Hiroshima Math. J. 10 (1980), 75-140.
- [7] T. Inoue: Orthogonal projections onto spaces of holomorphic functions on bounded homogeneous domains (Preprint).
- [8] C.J. Kolaski: A new look at a theorem of Forelli and Rudin, Indiana Univ. Math. J. 28 (1979), 495-499.
- [9] A. Koranyi: The Poisson integral for generalized half-planes and bounded symmetric domains, Ann. of Math. 82 (1965), 332-350.
- [10] E.B. Vinberg, S.G. Gindikin and I.I. Piatetski-Sapiro: On classification and canonical realization of complex homogeneous domains, Trans. Moscow Math. Soc. 12 (1963), 404-437.
- [11] N.R. Wallach: The analytic continuation of the discrete series I, Trans. Amer. Math. Soc. 251 (1979), 1-17.