

# 位数3の宮本自己同型を持つ軸代数について

東京大学大学院数理科学研究科 矢部 貴大

Takahiro Yabe

Graduate School of Mathematical Science,  
the University of Tokyo

本講究録では、軸代数 (axial algebra) と呼ばれる可換非結合的代数のうち位数3の自己同型と関係があるものについていくつかの例を見て行く。

軸代数とは、Monster 頂点作用素代数の Griess 代数を一般化したものとして [1] において導入されたものである。軸代数は、積作用が半単純であるような冪等元で生成される代数であり、結合性の代わりに fusion 則と呼ばれる条件で制御される。具体的には、以下の様に定義される。 $\mathbb{F}$  を体、 $\mathcal{F} = (S, \star)$  を集合  $S$  と  $S \times S$  から  $2^S$  への写像  $\star$  の組とする (この組を fusion 則という)。さらに、 $S$  から  $\mathbb{F}$  への写像  $\lambda$  をとる。この時、 $\mathbb{F}$  上の可換非結合的代数  $M$  の冪等元  $a$  と  $M$  の直和分解  $M = \bigoplus_{s \in S} \Phi_s$  の組が  $(\mathcal{F}, \lambda)$ -軸 (axis) であるとは、

- $\Phi_s$  の元は  $a$  倍作用の  $\lambda(s)$ -固有ベクトルである。
- $\Phi_s \Phi_t \subset \bigoplus_{u \in s \star t} \Phi_u$

を満たすことを言う  $M$  が  $(\mathcal{F}, \lambda)$ -軸の集合  $\mathcal{A}$  によって「生成」される、すなわち以下の条件を満たすとき、 $M$  を  $(\mathcal{F}, \lambda)$ -軸代数という。

- $M$  の部分代数  $N$  で、任意の  $(a, \Phi) \in \mathcal{A}$  について  $(a, \phi \cap N)$  が  $N$  の軸になる様なものは  $M$  自身と等しい。

ここで、軸  $a$  が原始的とは1-固有空間が一次元であることをいい、 $\mathcal{A}$  の元が全て原始的なとき軸代数  $M$  は原始的という。

Monster 群が Monster 頂点作用素代数の Griess 代数に作用しているように、一般の軸代数に対してもそれと対応する自己同型群が考えられる。具体的には各軸に対して、fusion 則により特徴づけられる次のような自己同型が定義される。まず、fusion 則  $\mathcal{F} = (S, \star)$  に対し群  $G$  と写像  $g: S \rightarrow G$  が  $S$  の任意の元  $s_1, s_2$  について  $g(s_1 \star s_2) \subset \{g(s_1)g(s_2)\}$  を満たすとする (このようなとき、 $\mathcal{F}$  が  $G$ -grading を誘導する、という)。このとき、 $G$  の指標  $\chi$  と  $\mathcal{F}$ -軸代数  $M$  及び  $\mathcal{F}$ -軸  $(a, \Phi)$  に対し  $\Phi_s$  を  $\chi(g(s))$  倍するような写像は  $M$  の自己同型となる。これを宮本自己同型と呼び、その生成する群を宮本群という。

軸代数の一例として、以下の表の様な fusion 則に従う Jordan 型と呼ばれる軸代数がある。Jordan 型 fusion 則は  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -grading を誘導し、 $\xi \neq \frac{1}{2}$  のとき宮本群は3-互換群と呼ばれるクラスに含まれる ([2])。また、逆に3-互換群から松尾代数と呼ばれる Jordan 型軸代数を構成出来る。

| $\star$ | 0     | 1     | $\xi$ |
|---------|-------|-------|-------|
| 0       | 0     |       | $\xi$ |
| 1       |       | 1     | $\xi$ |
| $\xi$   | $\xi$ | $\xi$ | 0, 1  |

Table 1: Jordan 型 fusion 則

もう少し複雑な例として、Majorana 型軸代数がある。これは頂点作用素代数 (VOA) に起源を持つ。モンスター VOA と呼ばれる頂点作用素代数  $V^\natural$  は、

$$V^\natural = V_0^\natural \oplus \bigoplus_{i=2}^{\infty} V_i^\natural$$

という grading と整数で指数づけられた積構造を持ち、最大の散在型有限単純群であるモンスター群が自己同型群となる。この  $V_2^\natural$  は Ising fusion 則と呼ばれる以下の表の fusion 則に従う軸代数となる。

| $\star$        | 0              | 1              | $\frac{1}{4}$  | $\frac{1}{32}$      |
|----------------|----------------|----------------|----------------|---------------------|
| 0              | 0              |                | $\frac{1}{4}$  | $\frac{1}{32}$      |
| 1              |                | 1              | $\frac{1}{4}$  | $\frac{1}{32}$      |
| $\frac{1}{4}$  | $\frac{1}{4}$  | $\frac{1}{4}$  | 0, 1           | $\frac{1}{32}$      |
| $\frac{1}{32}$ | $\frac{1}{32}$ | $\frac{1}{32}$ | $\frac{1}{32}$ | 0, 1, $\frac{1}{4}$ |

Table 2: Ising fusion 則

Majorana 代数の宮本群は 6-互換群となり、現在 6-互換群から軸代数を構成する研究が盛んに行われている。

以上の例はどちらも宮本自己同型が位数 2 となる例である。その他の位数の例は現在あまり知られていない。位数 3 の宮本自己同型を与える fusion 則で最も簡単なものの一つが次の表である。

| $\star$  | 0        | 1        | $\eta^+$ | $\eta^-$ |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0        | 0        |          | $\eta^+$ | $\eta^-$ |
| 1        |          | 1        | $\eta^+$ | $\eta^-$ |
| $\eta^+$ | $\eta^+$ | $\eta^+$ | $\eta^-$ | 0, 1     |
| $\eta^-$ | $\eta^-$ | $\eta^-$ | 0, 1     | $\eta^+$ |

Table 3: 位数 3 の fusion 則  $\mathcal{F}$ 

現在、この fusion 則に従う 2 元生成軸代数の構造を研究している。このような非結合的軸代数の例として、線形空間  $B = \sum_{i=0}^3 \mathbb{F}a_i$  に積を  $i \neq j$ 、 $\{i, j, k, l\} = \{0, 1, 2, 3\}$  として  $a_i a_j = \frac{\eta}{3}(2a_i + 2a_j - a_k - a_l)$  で定めて得られるものがある。

実は、一定の制限のもとでは、これが唯一の例となる。

**Theorem 1.** 平面上の 2 点を中心とした  $\frac{2\pi}{3}$  回転で生成されるアフィン変換群  $G$  を考える ( $p3$  型の壁紙群とも呼ばれる)。このとき、0, 1 以外の固有値  $\eta$  が  $\frac{1}{2}$  でないなら、宮本群が  $G$  の商となる非結合的軸代数は  $B$  のみである。

以下証明の概略を述べる。 $\mathbb{F}$  を体、 $\text{ch}\mathbb{F} \neq 2, 3$ ,  $\mathbb{F} \ni \omega$  とする。ここで、 $\omega$  は 1 の原始三乗根である。 $\mathbb{F}$  上の 2 元生成  $\mathcal{F}$ -軸代数で宮本群が  $G$  の商となるものは、次のように表せる。格子  $L = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega$  とし、 $d: L \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  を  $n + m\omega \mapsto \overline{n + m}$  で定めて部分集合  $X := d^{-1}(\overline{1}, \overline{0}) \subset L$  をとる。

$\phi: L \rightarrow \mathbb{F}$  を次を満たす写像とする。

- $\forall u \in L, \forall i, \phi(u) = \phi(\omega u) = \phi(\omega u - \omega + 1)$
- $\forall u, v \in L, \phi(u - v) = \phi(v - u)$
- $\forall u, v, w \in L,$

$$\begin{aligned} 0 &= (\phi(v - u) - \frac{2\eta}{3})\phi(u - w) \\ &\quad - (\phi(u - v) - \frac{2\eta}{3})\phi(v - w) \\ &\quad + \frac{\eta}{3} (\phi(\omega u + (1 - \omega)v - w) + \phi(\omega^2 u + (1 - \omega^2)v - w) \\ &\quad - \phi((1 - \omega)u + \omega v - w) - \phi((1 - \omega^2)u + \omega^2 v - w)) \end{aligned}$$

$M(\phi) = \text{Span}_{\mathbb{F}}\{a_u \mid u \in X\}$  は次を満たす線型空間とする。  
 $\forall u, v \in X,$

$$\begin{aligned} 0 &= (\phi(v - u) - \frac{2\eta}{3})a_u - (\phi(u - v) - \frac{2\eta}{3})a_v \\ &\quad + \frac{\eta}{3}(a_{\omega u + (1 - \omega)v} + a_{\omega^2 u + (1 - \omega^2)v} - a_{(1 - \omega)u + \omega v} - a_{(1 - \omega^2)u + \omega^2 v}) \end{aligned}$$

積は以下で定める。

$$a_u a_v = \phi(v - u)a_u + \frac{\eta}{3}(2a_v - a_{(1 - \omega)u + \omega v} - a_{(1 - \omega^2)u + \omega^2 v})$$

このとき、 $M(\phi)$  は可換代数となる。今考えている軸代数は全てこのように書けるため、 $\phi$  を決定すれば分類が完了する。

実際、この  $\phi$  は以上の条件及び fusion 則から 3 通りに定まり、そのうち 2 つは 1 次元及び 2 次元の可換結合的代数なので、定理が示される。

## References

- [1] J. I. Hall, F. Rehren, and S. Shpectorov, Universal Axial Algebras and a Theorem of Sakuma, J. Algebra 421, (2015), 394–424.
- [2] J. I. Hall, F. Rehren, and S. Shpectorov, Primitive axial algebras of Jordan type, J. Algebra 437 (2015), 79–115, arXiv:1403.1898.