

ホモロジー平面について

京大理 杉江 徹

§1. 序

X を 複素数体 $\mathbb{C}$ 上で定義された非特異代数曲面とする。
 X の一次元以上のホモロジー群 $H_i(X, \mathbb{Z})$ が $i \geq 1$ に対して自明であるとき、 X をホモロジー平面という。

Whitehead の定理により、特に X がホモロジー平面でかつ $\pi_1(X)$ が自明であることと、 X が可縮であることは同値である。

X がホモロジー平面であるとき、 X は次の性質を持つ。

(1) X は アフィン曲面である。そこで X を $\text{Spec } A$ 、

A は アフィン環と表わす。

(2) $A^* = \mathbb{C}^*$ 、但し A^* は A の可逆元全体。

(3) $\text{Pic}(X) = (0)$ 。

上の (1), (2), (3) より X の代数的小平次元 $K(X)$ が $-\infty$ のとき $\mathbb{C}^2$ の特徴づけにより X は $\mathbb{C}^2$ に同型になる。
 $\mathbb{C}^2$ と異なるホモロジー平面の例は、最初 Ramanujam に

よって 1971年に 与えられた[7]。彼の例は 可縮な 有数の小平次元が2の曲面である。その後しばらくホモロジー平面についての研究は現れなかったが、1985年頃 Gurjar と宮西は小平次元が 0, 1 のホモロジー平面 X について 詳しく調べ 次の事を示した。

Case $\overline{K}(X)=0$ 有数の小平次元が 0 のホモロジー平面は存在しない。

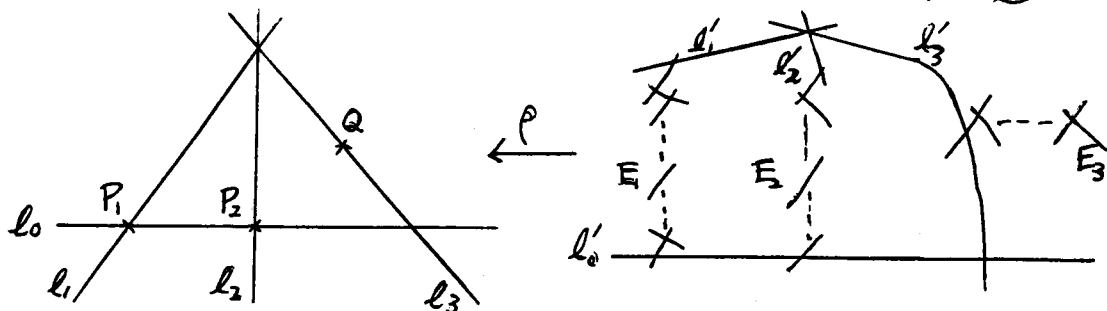
Case $\overline{K}(X)=1$ 有数の小平次元が 1 のホモロジー平面は、すべて次の方法によって得られる。

(i) 2組の整数の対 (m_i, δ_i) , (m_2, δ_2) を次の条件をみたすように選ぶ。

$$m_i > \delta_i > 0, \quad i=1, 2$$

$$m_1 m_2 - m_1 \delta_2 - m_2 \delta_1 = \pm 1$$

(ii) $\mathbb{P}^2$ 上に 4本の直線 l_0, l_1, l_2, l_3 を l_1, l_2, l_3 の3本が一点で交わり、 l_0 はその点を通らないように選ぶ。



い) l と l_1 の交点を P_1 , l と l_2 の交点を P_2 とし、さらに l_3 上に他の直線上にない点 Q を任意に選んで P_1, P_2, Q から始めて P_1, P_2, Q の infinitely near point まで blowing up を繰り返す。但し、この blowing up の列は新しく得られた曲面を V , V から $\mathbb{P}^2$ への blowing up の合成写像を ρ とするとき、次の条件をみたすように選ぶ。

- $\rho^{-1}(P_1), \rho^{-1}(P_2), \rho^{-1}(Q)$ は linear chain で、第一種例外曲線を丁度一本ずつ含む。これをそれぞれ E_1, E_2, E_3 とするとき、

$$\rho^*(l_1) = m_1 E_1 + \dots, \quad \rho^*(l_2) = m_2 E_2 + \dots$$

$$\rho^*(l) = \delta_1 E_1 + \delta_2 E_2 + \dots$$

が成り立ち、 E_3 は $\rho^{-1}(Q)$ の end component である。

以上の条件により、 P_1, P_2 およびそれぞれの infinitely near point を中心とする blowing up の列は一意的に定まり、 ρ には Q の infinitely near point を中心とする blowing up の列の任意性だけが残る。

$$(二) \quad D := \text{Supp}(P^{-1}(l_0 \cup l_1 \cup l_2 \cup l_3) - (E_1 \cup E_2 \cup E_3))$$

$$X := V - D$$

とおくと X はホモロジー平面になり、任意の $\bar{K} = 1$ のホモロジー平面は、この方法で得られる。

§.2. $\bar{K}(X) = 2$ のホモロジー平面

対数的小平次元が $-\infty, 0, 1$ のホモロジー平面が決定されたので $\bar{K}(X) = 2$ のホモロジー平面の構造が課題として残る。

X をホモロジー平面とし、 X を非特異射影曲面 V の中に埋め込んでおく。但し、 $D := V - X$ とするとき、 D は極小単純正規交叉型 (minimal simple normal crossing 以下、MSNC と略す) とする。ホモロジー完全系列を使って、容易に次の事がわかる。

- (1) $P_g(V) = 0$
- (2) D の各既約成分は、 P^1 に同型。
- (3) D の相対グラフ $\Gamma(D)$ は tree.
- (4) D の成分は $\text{Pic}(V)$ を自由に生成する。

さて、西井-宮岡氏によって、 $K_V + D$ が Zariski 分解を持つとき、宮岡の不等式が成り立つことが証明されている。

いま我々は、その不等式の特殊な形が必要になる。

V の一つの相対的極小モデルを V' , V から V'' への写像を π とし, π を次のように分解する。

$$\begin{array}{ccccc} \pi: V & \xrightarrow{\pi_1} & V' & \xrightarrow{\pi_2} & V'' \\ D & & D' = \pi_1(D) & & D'' = \pi(D). \end{array}$$

但し、 π_2 は、 D' の各既約成分の特異点の最短の特異点解消になっているとする。さらに、

$$\pi = \varphi_m \circ \varphi_{m-1} \circ \cdots \circ \varphi_1.$$

$$\psi_j = \varphi_j \circ \varphi_{j-1} \cdots \circ \varphi_1.$$

各 φ_i は *blowing up*.

$$E_1: \pi_1 \text{ の例外集合, } E_1 \text{ の既約成分の個数} = n_1.$$

$$E_2: \pi_2 \quad \quad \quad E_2 \quad \quad \quad = n_2.$$

$$E: \pi$$

とおく。

E_1 の各既約成分 L_i に対して、 $\psi_{k-1}(L_i)$ が ψ_k の例外曲線になっている時、

$$\beta(L_i) = (\psi_{k-1}(D) / \psi_{k-1}(L_i) \cdot \psi_{k-1}(L_i))$$

とおく。

以下、次の様に定義する。

$$R_3 = \cup \{L_i \mid \beta(L_i) = 3\}$$

$$R_4 := \cup \{L_i \mid \beta(L_i) \geq 4\}.$$

$$S := \varepsilon_2 \cap \pi_1(D).$$

$$e_1 := n_1 - b_2(\varepsilon_1 \cap D)$$

$$\sigma := n_2 - \sum_{E' \in S} (E'^2 + 2).$$

$$r_i = b_2(R_i).$$

$$\beta_i = b_i(V), \quad b_i = b_i(D).$$

但し、 $b_i(W)$ は、 W の i 次の *betti* 数を表す。

$$D'' = \cup D''_t, \quad D''_t \text{ は } D'' \text{ の既約成分.}$$

$P_{t,i}$ D''_t の *infinitely near point* を含む特異点。

$m_{t,i}$ $P_{t,i}$ における、 D''_t の *multiplicity* .

$$\tau = \sum m_{t,i} - 2n_2$$

$$\lambda = \sum D''_t \cdot K_{V''}$$

以上の記号の下で、次の命題が成り立つ。

命題 1. V を $P_g = q_t = 0$ の非特異射影曲面, D を V 上の *MSNC* の因子とする。 D の各既約成分は $\mathbb{P}^1$ に同型で、 D の各連結成分は、単連結で、一点に *blow down* できないとする (既ち、 D の各連結成分の V' 上の像は一次元であるとする)。 かつ、ある正数 m が存在して、 $m(K_V + D)$ が *effective* であるとする。 次の不等式が成り立つ。

$$3(h_2 - \beta_2) + h_0 + \lambda + c + e + e_1 + r_3 + 2r_4 \leq \beta_2'' - 5$$

上の不等式で、 λ 以外の項は、非負であり、 V が有理曲面
でなければ λ も、0 以上である。

上の不等式を使って、Gurjar-Shastri は、次の定理を
証明した。

定理 1 [3]. X がホモロジー平面であれば、 V は有理曲
面である。

従って、ホモロジー平面はすべて、次のようにして得られ
ることがわかる。

(★). ホモロジー平面の構成法

(1) $\mathbb{P}^2$ 上に、 $r+1$ 個の有理曲線 $H_1, H_2, \dots, H_{r+1}$ を取り、

$$H = H_1 \cup \dots \cup H_{r+1} \text{ とおく。}$$

(2) $\mathbb{P}^2$ から出発して *blowing up* を続け、合成を $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}^2$
としたとき、 $\pi^{-1}(H)$ が MSNC であるようにする。

$$(3) D = \text{Supp}(\pi^{-1}(H) - (E_1 \cup \dots \cup E_r))$$

但し、 $E_1, \dots, E_r$ は、 π の例外曲線。

上の (1) ~ (3) を

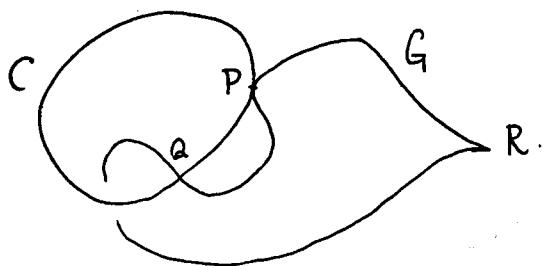
(a). D の相対グラフが *tree* になり.

(b). $X = V - D$ が ホモロジー平面 になるように選ぶ

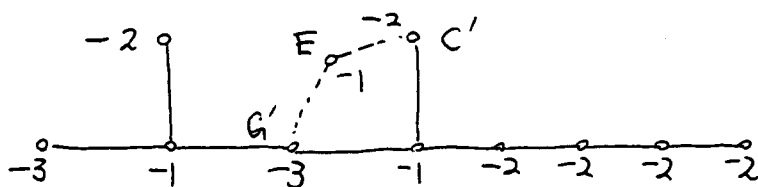
以上の方法で原理的には. 全てのホモロジー平面が得られる。

例 1. Ramanujam [7].

$\mathbb{P}^2$ 上の 2 次曲線 C と. 尖点を持つ 3 次曲線 G を. 一点で 横断的に交わり. もう一点で 5 重に接するように. 選ぶ。



P を 5 回. R を 3 回. *blowing up* することによって. $MSNC$ な因子を得る。さらに. Q を 一回 *blowing-up* し. これらすべての合成を $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}^2$ とするとき. $\pi^*(C \cup G)$ の 相対グラフは. 次のページのようになる。ここで E は点 Q の *blowing-up* によって得られる. (-1) curve (第一例外曲線を 以後こう呼ぶ) である。



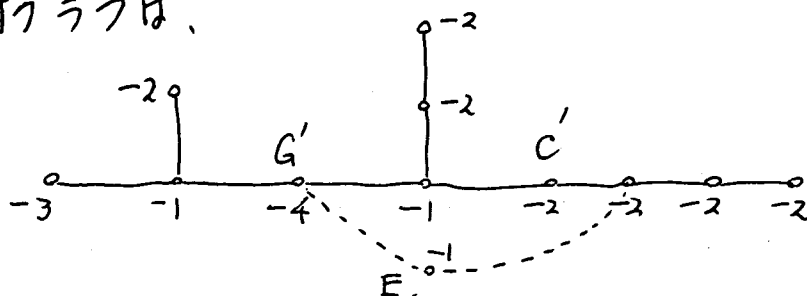
$X = V - \text{Supp}(\pi^{-1}(C \cup G) - E)$ が Ramanujan の与えた可縮曲面の例である。

例2. Gurjar-Miyazaki [2]

C, G は例1と同じで $C \cdot G = 3P + 3Q$ とする。



相対グラフは、



X は、例1と同様に定義する。但し、この構成法は、元々の構成法とは異なるが得られる曲面は、同一である。

一年ほど前までは、 $\pi(X) = 2$ のホモロジー平面は、以上の2例しか知られていなかった。我々は、 $r=1$ の場合に

次の様な結果を得た。

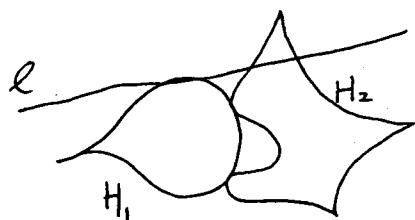
定理 2. [8]. H_1, H_2 を $\mathbb{P}^2$ 上の曲線で、それぞれ、 $\mathbb{P}^2$ に、位相同型であるとする。

$$m = \deg H_1, \quad n = \deg H_2, \quad m \leq n$$

$H_1 \cap H_2 = \{P, Q\}$, P, Q は H_i の非特異点、とする。(*) の方法で H_1, H_2 より、ホモロジー平面 X が構成できたとすれば、 $m \leq 2$ 。

注意 (1). 一般には、命題 1 の不等式および コンピューターを使った計算による。次のケースだけ、わからなかったが、酒井氏に教えていただいた。

・ $(m, n) = (3, 4)$. H_2 が 3 個の尖点を持つとき。



$H_1 \cup H_2$ に 一点で接する直線 l をつけ加えて、 $l \cup H_1 \cup H_2$

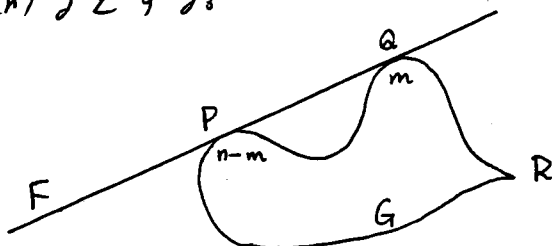
で分岐する $\mathbb{P}^2$ の 2 重被覆 S を考える。 S は 有理 2 重点を持ち、その非特異モデル $\tilde{S}$ として、一般型の曲面を得るが、 $\tilde{S}$ は、一般型の曲面の Matsuoaka-Sakai の不等式をみたさない。従って、上の様な曲線 H_1, H_2 は存在しない。

注意(2) . $(m, n) = (2, n)$ のケース.

H_2 が 一個の尖点を持つ時, $n \geq 7$ なら, ホモロジー平面を与えるような, 曲線の時, H_1, H_2 は存在しない.

$(m, n) = (1, n)$ のケース

F を P^2 の直線, G を P^2 上の次数 n で, 重複度 $n-1$ の尖点を一個持つ, 有理曲線とし, F と G は, G の尖点以外の 2 点で, 交わるとする.



まず, SNC な因子を得るために, P を $n-m$ 回, Q を m 回, R を n 回, blowing-up する。さらに, Q の,

infinitely near point で, G 上の点を $r+1$ 回 blowing-up し, 最後に, 得られた, (-1) curve を E , blowing-up の右成を $\sigma: V \longrightarrow P^2$ とする。

$$X := V - \text{Supp}(\sigma^{-1}(F+G) - E)$$

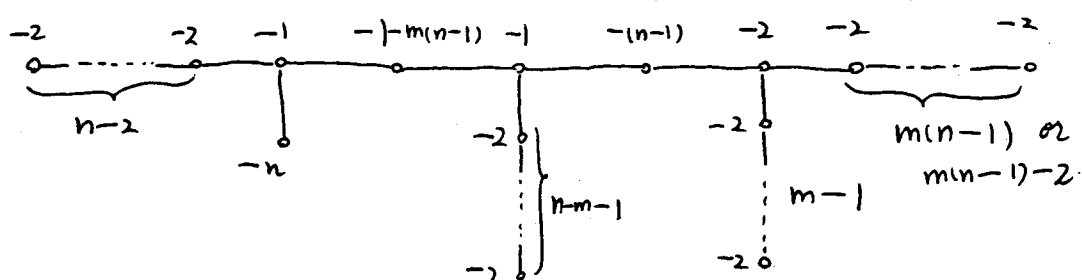
とおき, $n \geq 3$, $[\frac{n}{2}] \geq m \geq 1$ と仮定する。

以上の記号の下で, 次の定理を得る。

定理 3.15,

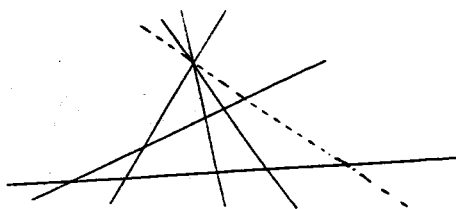
X が ホモロジー平面である $\Leftrightarrow Y = m(n-1)$ の $m(n-1)-2$.
特に, $m=1$, $Y=n-1$ なら, X は可縮であり, また, $m=1$,
 $n=3$ の時, X は Ramanujam の例に同型である.

V 上での $\text{Supp}(\sigma^{-1}(F+G)-E)$ の相対グラフは次の様になる.

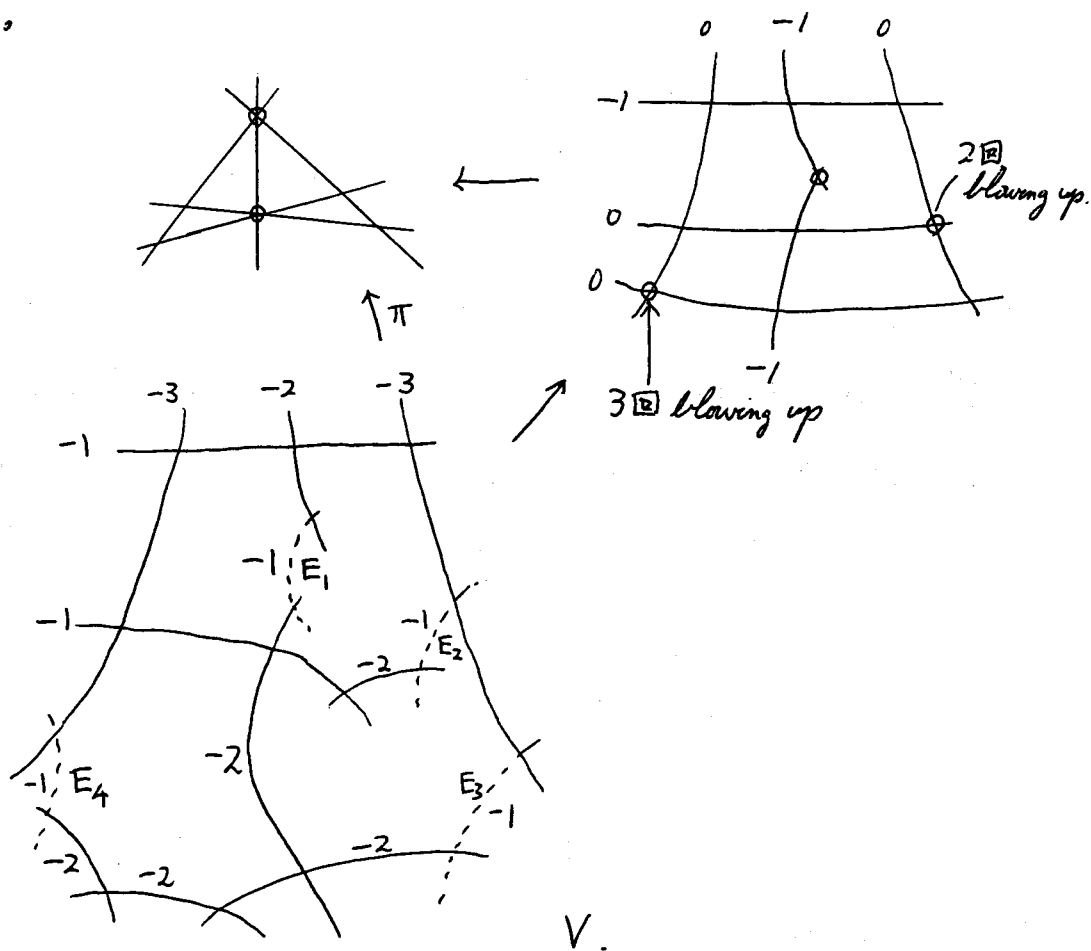


Tom Dieck - Petrie の例

★の方法によって, ホモロジー平面を構成しようとする時
定理 2 からわかるように, $\mathbb{P}^2$ 上の有理曲線, H_i の選び方には
かなり制限があると思われるが, H_i の本数をふやした
時の状況については, わからない. 例えば, Tom Dieck
と Petrie は, 次の様な例で, ホモロジー平面を与える
直線の配置で, 直線の数には, 制限がないことを示した.



また 次の直線の配置は、やはり Ramanujan の例を与え
る。



$$D := \text{Supp}(\pi^{-1}(\text{lines})) - (E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4)$$

$$X = V - D$$

とすると、 X が Ramanujan の例に同型になる。

§.3. 群の作用との関係

Tom Dieck と Petrie が ホモロジー 平面の研究を始めたのは、次の予想との関連による。

予想 A. $\mathbb{C}^*$ の $\mathbb{C}^3$ への代数的な作用は linearizable である。

この予想については、いくつかの研究があって、部分的には解決されており、次のケースだけが知られていない。

(a). $\mathbb{C}^*$ は $\mathbb{C}^3$ 内に、一点だけ固定点 P を持ち、 $\mathbb{C}^*$ の $T_P \mathbb{C}^3$ への作用を、一次元の表現の直和として $z^a + z^b + z^c$ と書いたとき、 $a > 1$, $b, c < 0$ かつ、 a, b, c は互いに素。

次の予想は、Petrie による。

予想 B. $\mathbb{C}^2$ 以外の ホモロジー平面は、有限個数の自明でない、自己同型を持たない。

Kraft により、(a) の場合、予想 B から予想 A が導びかれることが示されている。

予想 B については, Petrie は, $\overline{K}=1$ のホモロジー平面,
 $\overline{K}=2$ の Ramanujam, Gurjar-Miyanishi の例について
 この予想が成り立つことを示した。定理 3 の我々の
 例についても, m が 2 以上なら, Petrie の方法によって,
 相対グラフの形から, 予想 B が正しいことは, すぐにわかる。
 $m=1$ の場合でも, $n=4, 5, \dots$ と相対グラフの形を,
 具体的に決めれば, B が成り立つことはわかる。しかし,
 このケースも含めて, 一般に, 予想 B が成り立つかどうかは
 わかっていない。

References

- [1] T. Fujita, On the topology of non-complete algebraic surfaces,
 J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo, 29(1982), 503-566.
- [2] R.V. Gurjar and M. Miyanishi, Affine surfaces with $\overline{K} \leq 1$
 Algebraic geometry and commutative algebra in honor of Masayoshi
 Nagata(1987), 99-124
- [3] R.V. Gurjar and A.R. Shastri, On the rationality of complex homology
 2-cells: I and II. Preprints.
- [4] T. Matsuoka and F. Sakai, The degree of rational cuspidal curves,
 preprint.
- [5] M. Miyanishi and T. Sugie, Examples of homology planes of general
 type, preprint.
- [6] T. Petrie, Algebraic automorphism of smooth affine surfaces, preprint.
- [7] C.P. Ramanujam, A topological characterization of the affine plane as
 an algebraic variety, Ann. Math. 94(1971), 69-88.
- [8] T. Sugie, On T. Petrie's problem concerning homology planes, preprint.