

ある BANACH 空間の間の補間空間について

日本大学・経済学部 松岡勝男 (KATSUO MATSUOKA)
COLLEGE OF ECONOMICS OF NIHON UNIVERSITY

1. INTRODUCTION

以下において, $B(0, R) \subset \mathbb{R}^n$ は 中心 0, 半径 $R > 0$ の open ball を表すとする.
最初に, Beurling algebra A^p , B^p 空間, B_0^p 空間を定義する ([B], [CL], [G] 参照).

Definition 1. $1 < p < \infty$ とするとき,

$$\begin{aligned} A^p &= A^p(\mathbb{R}^n) \\ &= \left\{ f : \|f\|_{A^p} = \inf_{\omega \in \Omega} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x)^{-(p-1)} dx \right)^{1/p} < \infty \right\}. \end{aligned}$$

ただし, Ω は positive, radial, $|x|$ に関して nonincreasing, そして

$$\omega(0) + \int_{\mathbb{R}^n} \omega(x) dx = 1$$

である $\mathbb{R}^n$ 上の関数 ω の class である;

$$\begin{aligned} B^p &= B^p(\mathbb{R}^n) \\ &= \left\{ f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{B^p} = \sup_{R \geq 1} \left(\frac{1}{|B(0, R)|} \int_{B(0, R)} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\}; \\ B_0^p &= B_0^p(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in B^p : \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{|B(0, R)|} \int_{B(0, R)} |f(x)|^p dx = 0 \right\}. \end{aligned}$$

ここで, $1 < p < \infty$ に対して,

$$A^p, B^p, B_0^p : \text{Banach 空間}$$

である. また, $1 < p_1 < p_2 < \infty$ に対して,

$$L^1 \cap L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \supset A^{p_1} \supset A^{p_2}$$

そして

$$B^{p_1} \supset B^{p_2} \supset L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

である.

なお, 次の duality が成り立つ.

Theorem 2 ([B], [CL], [G]). $1 < p, p' < \infty$ with $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ とする. このとき,

$$(A^p)^* = B^{p'}$$

であり, また,

$$(B_0^p)^* = A^{p'}$$

である.

また, [CL], [G] において, 次の Hardy 空間 HA^p と CMO^p 空間が定義された.

Definition 3. $1 < p < \infty$ とする. このとき, Hardy 空間 HA^p associated to A^p を

$$HA^p = \{f \in A^p : f \text{ real, } f^* \in A^p\}$$

で定義する. ただし, f^* は f の Poisson 積分の nontangential maximal 関数, i.e. $\forall x \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \sup_{|y-x|<t} |(f * P_t)(y)| \\ &= \sup_{|y-x|<t} \left| c_n \int_{\mathbb{R}^n} f(y-x') \frac{t}{(t^2 + |x'|^2)^{(n+1)/2}} dx' \right|, \quad c_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{(n+1)/2}}, \end{aligned}$$

である. また, norm $\|\cdot\|_{HA^p}$ を

$$\|f\|_{HA^p} = \|f^*\|_{A^p},$$

で定義する.

ここで, $1 < p < \infty$ に対して,

$$HA^p : \text{Banach 空間}$$

である. また, $1 < p_1 < p_2 < \infty$ に対して,

$$H^1 \cap A^{p_1} \supset HA^{p_1} \supset HA^{p_2}$$

である.

Definition 4. $1 < p < \infty$ のとき, $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$ が central mean oscillation of order p の関数の class, CMO^p , に属するとは,

$$\|f\|_{CMO^p} = \sup_{R \geq 1} \left(\frac{1}{|B(0, R)|} \int_{B(0, R)} |f(x) - m_R(f)|^p dx \right)^{1/p} < \infty$$

を満たすことである. ただし,

$$m_R(f) = \frac{1}{|B(0, R)|} \int_{B(0, R)} f(x) dx$$

である.

ここで, $1 < p < \infty$ に対して,

CMO^p : Banach 空間

そして

$$CMO^p \supset B^p \supset B_0^p$$

である. また, $1 < p_1 < p_2 < \infty$ に対して,

$$CMO^{p_1} \supset CMO^{p_2} \supset BMO$$

である.

なお, Fefferman-Stein's H^1 - BMO duality の analog として, 次の duality が示された.

Theorem 5 ([CL], [G]). $1 < p, p' < \infty$ with $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ とする. このとき,

$$(HA^p)^* = CMO^{p'}$$

である.

次に, [Ma₁] において, A^p, B^p, B_0^p 空間それぞれの間の複素補間空間が示された (複素補間空間 $(\cdot, \cdot)_{[\theta]}$, $(\cdot, \cdot)^{[\theta]}$ の定義については, [BL], [S], [T] 参照).

Theorem 6 ([Ma₁]). $1 < p_0, p_1 < \infty$, $0 < \theta < 1$ のとき,

$$(A^{p_0}, A^{p_1})_{[\theta]} = (A^{p_0}, A^{p_1})^{[\theta]} = A^p \quad (\text{equal norms})$$

である. ただし, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$.

Theorem 7 ([Ma₁]). $1 < p_0, p_1 < \infty$, $0 < \theta < 1$ のとき,

$$(B^{p_0}, B^{p_1})_{[\theta]} = (B^{p_0}, B^{p_1})^{[\theta]} = B^p \quad (\text{equal norms})$$

である. ただし, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$.

Theorem 8 ([Ma₁]). $1 < p_0, p_1 < \infty$, $0 < \theta < 1$ のとき,

$$(B_0^{p_0}, B_0^{p_1})_{[\theta]} = B_0^p \quad (\text{equal norms})$$

である. ただし, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$.

さらに, [Ma₂] において, C. Fefferman and E. M. Stein の $L^p(\mathbb{R}^n)$ と BMO の間の補間定理 ([FS], [GR], [J], [S] 参照) の analog である, 次の B_0^p と BMO の間の補間定理が示された.

Theorem 9 ([Ma₂]). $1 < p_0 < \infty$ とし, T は linear operator で,

$$T : B^{p_0} \rightarrow B_0^{p_0}$$

そして

$$T : L^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow BMO$$

boundedly, とする. このとき, $\forall p$ with $p_0 < p < \infty$ に対して,

$$T : B^p \rightarrow CMO^p$$

boundedly.

本講演の目的は, この B_0^p と BMO の間の補間定理に現れる CMO^p 空間について, それらの間の複素補間空間を構成することである.

2. HARDY 空間 $HA_{p,q}$

最初に, $k \in \mathbb{Z}$ に対して, $B_k = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 2^k\}$, $C_k = B_k \setminus B_{k-1}$, $\chi_k = \chi_{C_k}$ と定義する. ただし, χ_{C_k} は C_k の characteristic function である. また, $\tilde{\chi}_k = \chi_k$ if $k \in \mathbb{N}$, そして $\tilde{\chi}_0 = \chi_{B_0}$ とする.

[G] において, J. Garcia-Cuerva は A^p 空間と B^p 空間のもう一つの定義を与えた (one-dimensional case は, [F] において, 与えられた).

Definition 10. $1 < p < \infty$ とするとき,

$$A^p = A^p(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \|f\|_{A^p} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{kn/p'} \|f \tilde{\chi}_k\|_p \right) < \infty \right\}.$$

ただし, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ である;

$$B^p = B^p(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \|f\|_{B^p} = \sup_{k \leq 0} \left(2^{-kn/p} \|f \tilde{\chi}_k\|_p \right) < \infty \right\}.$$

また, [GH] において, J. Garcia-Cuerva and M. -J. L. Herrero は, 次の $A_{p,q}$ 空間と $B_{p,q}$ 空間を定義した.

Definition 11. $0 < q \leq 1$, $q \leq p < \infty$ に対して,

$$\begin{aligned} A_{p,q} &= A_{p,q}(\mathbb{R}^n) \\ &= \left\{ f : \|f\|_{A_{p,q}} = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{kn(1/q-1/p)} \|f \tilde{\chi}_k\|_p \right)^q \right\}^{1/q} < \infty \right\} \end{aligned}$$

そして, $0 < q \leq 1, 1 < p < \infty$ に対して,

$$B_{p,q} = B_{p,q}(\mathbb{R}^n) \\ = \left\{ f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{B_{p,q}} = \sup_{k \leq 0} \left\{ 2^{-kn(1/q-1/p')} \|f \tilde{\chi}_k\|_p \right\} < \infty \right\}$$

と定義する. ただし, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ である.

ここで, $1 < p < \infty$ に対して,

$$B_{p,1} = B^p \quad \text{そして} \quad A_{p,1} = A^p$$

である. また, $0 < q \leq 1, 1 < p < \infty$ に対して,

$$A_{p,q} \subset A^p \subset L^p \subset B^p \subset B_{p,q}$$

である.

Proposition 12 ([GH]). $f \in B_{p,q}$ であるための必要十分条件は

$$\sup_{R \geq 1} \left\{ |B(0, R)|^{1-1/q} \left(\frac{1}{|B(0, R)|} \int_{B(0, R)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \right\} < \infty$$

である.

なお, 次の duality が成り立つ.

Theorem 13 ([GH]). $0 < q \leq 1, 1 < p < \infty$ そして $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ とする. このとき,

$$(A_{p,q})^* = B_{p',q}$$

である.

さらに, [GH] において, 次の Hardy 空間 $HA_{p,q}$ と $\Lambda_{p,q}$ 空間が定義された.

Definition 14. $0 < q \leq 1, q \leq p < \infty$ そして $f \in \mathcal{S}'$ とする. このとき, f が Hardy 空間 $HA_{p,q}$ に属するとは, f が調和関数 $u(x, t)$ in $\mathbb{R}_+^{n+1}$ の boundary distribution であり,

$$m_u(x) = \sup_{|y-x|<t} |u(y, t)| \in A_{p,q}$$

を満たすことである. また, quasi-norm $\|\cdot\|_{HA_{p,q}}$ を

$$\|f\|_{HA_{p,q}} = \|m_u\|_{A_{p,q}}$$

で定義する.

ここで, $0 < q \leq 1, q \leq p < \infty$ に対して,

$HA_{p,q}$: complete 空間

そして

$$HA_{p,q} \subset H^q$$

である.

Definition 15. $1 < p < \infty$ のとき, $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ が $\Lambda_{p,q}$ with $0 < q \leq 1$ and $1 < p < \infty$ に属するとは, $\forall R \geq 1$ に対して, 高々 $N = [n(1/q - 1)]$ の多項式 $P_R^N f(x)$ が存在して,

$$\|f\|_{\Lambda_{p,q}} = \sup_{R \geq 1} \left\{ |B(0, R)|^{1-1/q} \left(\frac{1}{|B(0, R)|} \int_{B(0, R)} |f(x) - P_R^N f(x)|^p dx \right)^{1/p} \right\} < \infty$$

を満たすことである.

ここで, $0 < q \leq 1, 1 < p < \infty$ に対して,

$\Lambda_{p,q}$: Banach 空間

であり, また,

$$\Lambda_{p,1} = CMO^p$$

である.

なお, 次の duality が成り立つ.

Theorem 16 ([GH]). $0 < q \leq 1, 1 < p < \infty$ そして $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ とする. このとき,

$$(HA_{p,q})^* = \Lambda_{p',q}$$

である.

3. CMO^p の間の複素補間空間

最初に, $HA_{p,q}$ の間の複素補間空間について述べる.

Theorem 17 ([HY]). $0 < q_0, q_1 \leq 1, 1 < p_0, p_1 < \infty, 0 < \theta < 1$ とし, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$ とする. このとき,

$$(HA_{p_0,q_0}, HA_{p_1,q_1})_{[\theta]} = HA_{p,q}$$

である.

ここで, $0 < q_0, q_1 < 1$ のときの Theorem 17 は, [GH] において示された.

Corollary 18. $1 < p_0, p_1 < \infty$, $0 < \theta < 1$ とし, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ とする. このとき,

$$(HA_{p_0,1}, HA_{p_1,1})_{[\theta]} = HA_{p,1},$$

i.e.

$$(HA^{p_0}, HA^{p_1})_{[\theta]} = HA^p$$

である.

次に, 複素補間法における duality theorem について述べる ([BL], [S], [T] 参照).

Theorem 19. compatible Banach 空間 A_0, A_1 に対して, $A_0 \cap A_1$ が A_0, A_1 で dense のとき,

$$(A_0, A_1)_{[\theta]}^* = (A_0^*, A_1^*)_{[\theta]} \quad (\text{equal norms})$$

である.

また, 次の定義を用いて, [LY] において, $HA_{p,q}$ における denseness が示された ([Mi] 参照).

Definition 20. 整数 k に対して, $k \geq 0$ のとき, $\mathcal{P}_k$ を次数 k を越えない $\mathbb{R}^n$ 上の多項式関数の全体, $k < 0$ のとき, $\mathcal{P}_k = \{0\}$ と定義する.

また, $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ のとき, $f \perp \mathcal{P}_k$ であるとは, $\forall P \in \mathcal{P}_k$ に対して,

$$fP \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{そして} \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x)P(x)dx = 0$$

を満たすことである.

Proposition 21 ([LY]). $0 < q \leq 1$, $q \leq p < \infty$ のとき,

$$X_k = \{f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) : f \perp \mathcal{P}_k\} \quad \text{with} \quad k \geq n \left(\frac{1}{q} - 1 \right)$$

は $HA_{p,q}$ の dense subspace である.

このとき, これらの結果を用いると, 次の CMO^p 空間の間の複素補間空間が得られる.

Theorem 22. $1 < p < \infty$, $0 < \theta < 1$ とし, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ とする. このとき,

$$(CMO^{p_0}, CMO^{p_1})_{[\theta]} = CMO^p$$

である.

Proof. 最初に, Theorem 5, Theorem 19, Proposition 21 より,

$$(CMO^{p_0}, CMO^{p_1})^{[\theta]} = \left((HA^{p_0'})^*, (HA^{p_1'})^* \right)^{[\theta]} = (HA^{p_0'}, HA^{p_1'})_{[\theta]}^*.$$

ただし, $\frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i'} = 1$ ($i = 0, 1$) である. このとき, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ とすると, $\frac{1-\theta}{p_0'} + \frac{\theta}{p_1'} = \frac{1}{p'}$ であるから, Corollary 18 より,

$$(HA^{p_0'}, HA^{p_1'})_{[\theta]} = HA^{p'}.$$

故に,

$$(CMO^{p_0}, CMO^{p_1})^{[\theta]} = (HA^{p'})^* = CMO^p$$

が得られる. □

REFERENCES

- [BL] J. Bergh and J. Löfström, *Interpolation Spaces*, Springer-Verlag, 1976.
- [B] A. Beurling, Construction and analysis of some convolution algebra, *Ann. Inst. Fourier*, **14** (1964), 1–32.
- [CL] Y. Chen and K. Lau, Some new classes of Hardy spaces, *J. Func. Anal.*, **84** (1989), 255–278.
- [FS] C. Fefferman and E. M. Stein, H^p spaces of several variables, *Acta Math.*, **129** (1972), 137–193.
- [F] H. Feichtinger, An elementary approach to Wiener's third Tauberian theorem on Euclidean n -spaces, *Proceedings, Conference at Cortona 1984*, Symposia Mathematica (Academic Press, New York), **29** (1987), 267–301.
- [G] J. Garcia-Cuerva, Hardy spaces and Beurling algebras, *J. London Math. Soc. (2)*, **39** (1989), 499–513.
- [GH] J. Garcia-Cuerva and M. -J. L. Herrero, A theory of Hardy spaces associated to the Herz spaces, *J. London Math. Soc. (3)*, **69** (1994), 605–628.
- [GR] J. Garcia-Cuerva and J. L. Rubio de Francia, *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [HY] E. Hernández and D. Yang, Interpolation of Herz-type Hardy spaces, *Illinois J. Math.*, **42** (1998), 564–581.
- [J] P. W. Jones, Interpolation between Hardy spaces, 437–451 in *Conference on Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund*, edited by W. Beckner, A. P. Calderón, R. Fefferman and P. W. Jones, Wadsworth, Belmont, California, 1983.
- [LY] S. Lu and D. Yang, Some characterizations of weighted Herz-type Hardy spaces and their applications, *Acta Mathematica Sinica (New Ser.)*, **13** (1997), 45–58.
- [Ma₁] K. Matsuoka, Interpolation between some Banach spaces in generalized harmonic analysis, *Tokyo J. Math.*, **13** (1990), 117–124.
- [Ma₂] K. Matsuoka, Interpolation theorem between B_0^p and BMO , *Scientiae Mathematicae Japonicae*, **53** (2001), 547–554.
- [Mi] A. Miyachi, Remarks on Herz-type Hardy spaces, *Acta Mathematica Sinica, English Series*, **17** (2001), 339–360.
- [S] C. Sadosky, *Interpolation of Operators and Singular Integrals*, Marcel Dekker, New York, 1979.
- [T] H. Triebel, *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, North-Holland, 1979.