

Laplacian の Dirichlet 問題の λ_1 固有値

京大 理 島倉紀夫

Ω は $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 2$) の有界領域で, その境界 $S = \partial\Omega$ は十分なめらかな超曲面であるとする. Ω における $-\Delta$ の Dirichlet 問題の λ_j 固有値を $\lambda_j(\Omega)$ とする ($-\Delta u = \lambda u$ をみたし 0 でない $u \in H_0^1(\Omega)$ の存在するような正数のすべてを $(0 <) \lambda_1(\Omega) < \lambda_2(\Omega) \leq \lambda_3(\Omega) \leq \dots$ の順に並べるものとする).

問題は, 各 j に対して, 領域の函数 $\lambda_j: \Omega \rightarrow \lambda_j(\Omega)$ の性質を調べることであるが, 特に領域の微小な変形が λ_j に及ぼす効果を変分公式を用いて調べるのがこの講演の目的である.

固有値の基本的性質のいくつかは R. Courant - D. Hilbert 「数理物理学の方法」にものべられており古典的な研究対象である. λ_1 固有値は常に単純 (即ち重複度が 1) であるが, λ_2 以降の固有値には一般に 1 とは限らない重複度もみこまれるので, その点に注意して問題を幾分詳しくのべ直すと次のようになる:

問題 Ω における ($-\Delta$ の Dirichlet 問題の) ひとつの固有値 μ をとりその重複度を $m (\geq 1)$ とする. Ω をわずかに変形した領域 $\tilde{\Omega}$ をとると, μ に近い $\tilde{\Omega}$ における ($-\Delta$ の Dirichlet 問題の) 固有値が丁度 m 個あるから, それらを $\{\mu_j(\tilde{\Omega})\}_{j=1}^m$ とする. これらが変形 $\Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ にどう依存するか?

§1 固有値の変分公式

領域の微小変形を次のように行う. 区間 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) を動く助変数 t のおのおのに対して, $\mathbb{R}^d$ からそれ自身への diffeomorphism ϕ_t があって, $\phi_0 = I$ (恒等写像) であり, ϕ_t について C^p 級 ($p \geq 1$) であると仮定する (つまり, $l = 0, 1, \dots, p$ に対して $(\frac{d}{dt})^l \phi_t$ が t について連続で $\mathbb{R}^d$ 上十分なめらかなベクトル場であると仮定する). 以下このことを簡単に $t \rightarrow \phi_t$ が C^p 級の diffeomorphism の曲線であるということにする. この変形 $\Omega \rightarrow \phi_t \Omega$ は Ω の位相的性質を変えない (最近の小沢真氏の研究 [7] は Ω の位相的性質を変える変形が単純固有値に及ぼす効果を明らかにしたものである. 本論とは関係がないが, ひとつの発展の可能性を含んでいるので, 付言しておく).

固有値 μ の重複度 m が 2 以上の場合, 変形 $\Omega \rightarrow \phi_t \Omega$ に伴う

個々の固有値 $\mu_j(\phi_t, \Omega)$ の動きはよくわからないが、これらの基本対称式の変化を解析することは可能である。そこで

$$\sigma_k(t) = \sum_{j=1}^m \mu_j(\phi_t, \Omega)^k, \quad 1 \leq k \leq m, \quad (1)$$

とおき、 $t=0$ での σ_k の逐次微係数を $t \rightarrow \phi_t$ を用いてあらわす公式のことを固有値の変分公式と呼ぶことにする。

そこで記号を導入しておく。最も重要なのはベクトル場

$$v = \frac{d}{dt} \phi_t \big|_{t=0} \quad (2)$$

である。次に、固有値 μ に属する Ω における $-\Delta$ の Dirichlet 問題の固有空間を E 、 $L^2(\Omega)$ から E への正射影を P とする。 E の実の正規直交基底の u と v を $\{\omega_j\}_{j=1}^m$ とする。

Ω における Dirichlet 問題の resolvent を $G_z = (z + \Delta)^{-1}$ ($z \in \mathbb{C}$) とすると、 $z = \mu$ での Laurent 展開により

$$G_z = (z - \mu)^{-1} P + H_z \quad (H_z \text{ は } z = \mu \text{ で正則}) \quad (3)$$

と分解できる。更にベクトル場 v を用いて m 次実対称行列

$$A^v = (A_{jk}^v)_{j,k=1}^m, \quad A_{jk}^v = \int_S \langle v|_S, n \rangle \frac{\partial \omega_j}{\partial n} \frac{\partial \omega_k}{\partial n} dS, \quad (4)$$

を導入する ($v|_S$ は v の S への制限、 n は S の各点における内向単位法線ベクトル)。

変分公式 Diffeomorphisms の曲線 $t \rightarrow \phi_t$ が C^p 級 ($p \geq 1$)

ならば、おのおのの $t \rightarrow \sigma_k(t)$ ($1 \leq k \leq m$) も C^p 級であって次式がなりたつ

$$\frac{d^p \sigma_R}{dt^p}(0) = \sum_{j=1}^p \binom{R}{j} a_j^{(p)} \mu^{R-j}, \quad 1 \leq R \leq m, \quad (5)$$

ここで $a_j^{(p)}$ は R にはよらない。特に

$$a_p^{(p)} = p! \operatorname{Tr}((A^p)^p), \quad p \geq 1. \quad (6)$$

($m=p=1$ のときは J. Hadamard の公式 [3])。

証明 $A_t = -\phi_{t*} \Delta \phi_{t*}^{-1}$ とおく (Ω (resp. $\phi_t \Omega$) 上の函数 f (resp. g) に対して $\phi_{t*}^{-1} f(y) = f(\phi_t^{-1} y)$, $y \in \phi_t \Omega$ (resp. $\phi_{t*} g(x) = g(\phi_t x)$, $x \in \Omega$)). すると $\phi_t \Omega$ における Dirichlet 問題の resolvent $(z + \Delta)^{-1}$ は Ω における $-A_t$ の resolvent $Q_z = (z - A_t)^{-1} = (z + \Delta - B_t)^{-1} = G_z (I - B_t G_z)^{-1}$ とみなせる ($B_t = A_t + \Delta$)。複素平面上に $z = \mu$ を中心とする半径 δ (十分小) の円 C を描き, その開円板を K とすると, $|t|$ が小さいなら, K 上には 1 位の極 $\{\mu_j(\phi_t \Omega)\}_{j=1}^m$ (内部にある) 以外に Q_z の極はない。そして

$$\sigma_R(t) = \operatorname{Tr} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_C z^R Q_z dz \right), \quad 1 \leq R \leq m,$$

がなりたつ。しかも

$$Q_z = \sum_{l=0}^p G_z (B_t G_z)^l + R_p$$

とかくと, $z \in \mathbb{C}$ のとき一様に, R_p の $L^2(\Omega)$ での作用素ノルムは $O(t^p)$ である。そこで $z = \mu$ での Laurent 展開

$$\sum_{l=0}^p G_z (B_t G_z)^l = \sum_{j=0}^p (z - \mu)^{-j-1} f_{p,j}(t) + h_p(z, t)$$

(h_p は $\mathbb{K}$ で正則, $f_{p,j}$ は z によらない) を行い

$$a_j^{(p)} = \frac{d^p}{dt^p} \text{Tr} f_{p,j}(t) \Big|_{t=0}, \quad 0 \leq j \leq p, \quad p \geq 1,$$

とおくと (5) 式が得られ, 特に $f_{p,p}(t) = P(B_t P)^p$ だから (6) 式が得られる. (3) を用いて計算すると $\text{Tr} f_{p,0}(t) = \text{Tr} P = m$ となるから $a_0^{(p)} = 0$ であり (5) 式の和が $j=1$ から始まることがわかる. 証了.

(5) 式からまず次のことがわかる: $t \rightarrow 0$ のとき

$$\sum_{j=1}^m \left(\frac{\mu_j(\phi_t \Omega) - \mu}{t} \right)^p = \text{Tr}((A^v)^p) + o(1). \quad (7)$$

従って特に $t \rightarrow \phi_t$ が $C^{\min(m, 2)}$ 級であれば, おのものの $t \rightarrow \mu_j(\phi_t \Omega)$ は $t=0$ で Lipschitz 連続である. 更に,

系 $t \rightarrow \phi_t$ が C^m 級であるとする. 他方行列 A^v の固有値を $\{\alpha_j^v\}_{j=1}^m$ とする. すると, $\{\mu_j(\phi_t \Omega)\}_{j=1}^m$ の番号づけを適当に行えば, おのものの $t \rightarrow \mu_j(\phi_t \Omega)$ が $t=0$ で微分可能で $\frac{d}{dt} \mu_j(\phi_t \Omega) \Big|_{t=0} = \alpha_j^v$ ($1 \leq j \leq m$) となる.

証明 α の多項式 $\prod_{j=1}^m \left(\alpha - \frac{\mu_j(\phi_t \Omega) - \mu}{t} \right)$ の各係数が $t=0$ で連続だからである. 証了.

§ 5 で, $\sigma_k''(0)$ のより具体的な表示を与える.

§2 単純固有値の危点とその安定性

ある $j (\geq 1)$ について λ_j が Ω において単純 (つまり $\lambda_j(\Omega)$ の重複度が 1) であると仮定する. このとき $t \rightarrow \phi_t$ が C^p 級ならば $t \rightarrow \lambda_j(\phi_t \Omega)$ もそうであり, 変分公式が使える.

座標系に相似変換を施せばわかるように, $\lambda_j(\alpha\Omega) = \lambda_j(\Omega)/\alpha^2$ ($\alpha > 0$) がなりたつ. つまり λ_j の値域は正数全体にわたる. だから, Ω のもうひとつの幾何学的な量を一定にしておいて λ_j の大きさを論じることが理にかなっている. この § では $t \rightarrow \phi_t$ が Ω の体積を保つと仮定しよう:

$$\text{vol.}(\phi_t \Omega) = \text{vol.}(\Omega), \quad -\varepsilon < t < \varepsilon. \quad (8)$$

また, $S = \partial\Omega$ の空でない開集合 Σ をとり, 高々 Σ だけを動かす $t \rightarrow \phi_t$ ばかりを考える, 即ち,

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_t \text{ は } (\mathbb{R}^d \text{ における}) S \setminus \Sigma \text{ のある近傍} \\ \text{で恒等写像に等しい} \end{array} \right\} \quad (9)$$

と仮定する. この仮定は領域の局所的な変形がもたらす固有値の変動を観察するためにおくものである.

領域 Ω が, 函数 λ_j の, Σ -危点 (Σ -critical domain) であるとは, (8) および (9) をみたすすべての $t \rightarrow \phi_t$ (C^1 級) に対し

$$\frac{d}{dt} \lambda_j(\phi_t \Omega) \Big|_{t=0} = 0$$

がなりたつことをいう.

Faber-Krahn ([1], [2]) の定理により、体積が一定な領域のうちで λ_1 を最小にするものは球である。実際、球 Ω は λ_1 の $\partial\Omega$ -危点である。

$\lambda_j(\Omega)$ に属する正規化された実の固有函数を w とすると

$$\frac{d}{dt} \lambda_j(\phi_t \Omega) \Big|_{t=0} = \int_S \langle v|_S, n \rangle \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)^2 dS \quad ((5), (6) \text{ による}).$$

$$\text{他方 } \frac{d}{dt} \text{vol.}(\phi_t \Omega) \Big|_{t=0} = - \int_S \langle v|_S, n \rangle dS \quad ((8) \text{ による}), = 0.$$

であるから、 Ω が λ_j の Σ -危点であるのは $\partial w / \partial n$ が Σ 上定数に等しいときかつそのときに限る。

J. Serrin の一定理 [5] の応用により、 $\partial w / \partial n$ が $\partial\Omega$ 上定数に等しいなら Ω は球である。故に、 λ_j が Ω において単純であるという前提のもとで、 Ω が λ_j の $\partial\Omega$ -危点であるのは Ω が球のときかつそのときに限る。

次に、函数 λ_j が Ω において Σ -安定 (Σ -stable) であるとは、 Ω が λ_j の Σ -危点であり、しかも、(8) および (9) をみだし $\langle v|_S, n \rangle$ が恒等的に 0 でないすべての $t \rightarrow \phi_t$ (C^2 級) に対し

$$\frac{d^2}{dt^2} \lambda_j(\phi_t \Omega) \Big|_{t=0} > 0$$

がなりたつことをいう。

Faber-Krahn の定理により、 λ_1 は球において最小である。しかも、 Ω と同体積の球を Ω^* とすると、 Ω が球でないなら $\lambda_1(\Omega^*) < \lambda_1(\Omega)$ がなりたつことが G. Talenti [6] の計算をみればわかる。また上記の定義によっても、 Ω が球ならば

λ_j は Ω において Ω -安定であることがわかる (但し, $t \rightarrow \phi_t$ のうち Ω を球にうつすものすべてを除外して定義にあてはめなくてはならない)。

この講演の主要な結果は次の通り (証明は [8] 参照) :

定理 Ω が λ_j の Σ -危点であるとき, Σ の各点 x^0 において, x^0 を含む Σ の適当な開部分集合 Σ' をとれば, λ_j は Ω において Σ' -安定である。

つまり, Ω が λ_j の Σ -危点であるとき, Σ の各点でその十分小さな近傍 Σ' をとれば, 高々 Σ' だけを微小変形するとき λ_j は増大する。割切っているが, 無限小 (infinitesimal な) 安定性が示されたにすぎない, といってもよい。しかし, 次に例示するように, たとえ微小であっても Σ 全体を変形すると λ_j が減少することもあり得るからこの定理も無意味ではない。

§3 一例

同心球 $S^+ = \{|x| = b\}$ と $S^- = \{|x| = a\}$ で囲まれる球殻

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d; a < |x| < b\}, \text{ 但し } 0 < a < b < \infty,$$

を考える。すると Ω は球ではないから,

(1°) Ω は λ_1 の $\partial\Omega$ -危点ではない。

しかし χ_1 固有函数は $|x|$ のみの函数であるから

(2°) Ω は λ_1 の S^+ -危点かつ S^- -危点である。

所が, $y \in \mathbb{R}^d$ として $\Omega_y = \{x \in \mathbb{R}^d; |x-y| > a \text{ かつ } |x| < b\}$ とおくと, $y \neq 0$ かつ $|y|$ が十分小さいとき $\lambda_1(\Omega_y) < \lambda_1(\Omega)$ となるから (証明は [9] 参照)

(3°) λ_1 は Ω において S^+ -安定でも S^- -安定でもない。

この例は, 境界が連結でないという点で説得力に欠ける嫌があるが, χ_1 固有値が領域の体積, 境界の面積だけでは律しきれない函数であることを示している。

§4 一注意

重複度 m が 2 以上の固有値について危点の概念を合理的に定義することは不可能である。何故なら, §1 の記号に則ってのべると, $t \rightarrow \phi_t$ (C^m 級) をとったとき, すべての j ($1 \leq j \leq m$) に対して $\frac{d}{dt} \mu_j(\phi_t \Omega)|_{t=0} = 0$ がなりたつのは $A^v = 0$ のときかつそのときに限る ((7) 式で $\phi=2$ とする)。しかし (8), (9) をみたとし $A^v \neq 0$ となる $t \rightarrow \phi_t$ を作ることは容易である。

§5 補足

$p=2$ のとき (5) 式は次のようになる ([4] 参照 ($d=2$ のとき)):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \sigma^k}{dt^2}(0) &= k(k-1) \mu^{k-2} \text{Tr}((A^v)^2) + \\ &+ k \mu^{k-1} \{Q(v|_S) + \text{Tr} A^w\}, \quad 1 \leq k \leq m. \end{aligned} \quad (10)$$

ここで, $w = \frac{d^2}{dt^2} \phi_t|_{t=0}$; A^w の定義は (4) と同様;

$$Q(v|_S) = \int_S \left\{ \Theta^v \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial w_j}{\partial n} \right)^2 - 2 \sum_{j=1}^m W_j^v \frac{\partial W_j^v}{\partial n} \right\} dS; \quad (11)$$

各 W_j^v は次の Dirichlet 問題の一意な解 ($\langle v|_S, n \rangle$ のみに依存):

$$\begin{cases} \Omega \ni \Delta W_j^v + \mu W_j^v = \sum_{k=1}^m A_{jk}^v \omega_k, & S \ni W_j^v = \langle v|_S, n \rangle \frac{\partial \omega_j}{\partial n}, \\ P W_j^v = 0, & 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

((11) において $\sum (\frac{\partial \omega_j}{\partial n})^2$ および $\sum W_j^v \frac{\partial W_j^v}{\partial n}$ は正規直交基底 $\{\omega_j\}_{j=1}^m$ のとり方によらない);

$$\Theta^v = \sum_{\alpha=1}^{d-1} \left\{ \kappa_\alpha \langle v|_S, n \rangle^2 - \kappa_\alpha \langle v|_S, e_\alpha \rangle^2 - 2 \langle v|_S, e_\alpha \rangle \frac{\partial}{\partial e_\alpha} \langle v|_S, n \rangle \right\},$$

但し, $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^{d-1}$ は S の各点での主曲率方向の単位ベクトルからなる正規直交系, κ_α はその点での e_α 方向の主曲率.

すると, §2 の定理の仮定のもとでは

$$\frac{d^2}{dt^2} \lambda_j(\phi_t \Omega)|_{t=0} = 2k^2 \int_S W^v (H W^v - \frac{\partial W^v}{\partial n}) dS \quad (12)$$

となる. 但し $k = \partial w / \partial n|_S$, $H = \sum_{\alpha=1}^{d-1} \kappa_\alpha$, W^v は

$$\begin{cases} \Omega \ni \Delta W^v + \lambda_j(\Omega) W^v = 0, & S \ni W^v = \langle v|_S, n \rangle, \\ \int_\Omega \omega W^v dx = 0 \end{cases}$$

の一意な解. 以上の証明は [9] 参照.

文献

- [1] G. Faber - Sitz. Bayer. Akad. Wiss. (1923), 169~172.
- [2] E. Krahn Math. Ann. 94 (1924), 97~100.
- [3] J. Hadamard Oeuvres 2 (1968), 515~631.
- [4] P. Garabedian - M. Schiffer J. Anal. Math. 2(1952~3), 281~369.
- [5] J. Serrin Arch. R. M. A. 43 (1971), 304~318.
- [6] G. Talenti Ann. Sc. N. S. Pisa, IV-3.4 (1976), 697~718
- [7] 小沢 真 数学, 33巻3号(1981), 248~261.
- [8] 島倉紀夫 C. R. Ac. Sc. Paris, 292(1981), 617~619.
- [9] 同 La première valeur propre du laplacien pour le
problème de Dirichlet, J. Math. pures et appl. に掲載の予定.