

Self-complementary な 平面分割の個数

東大理学部 石川 雅雄 (Masao Ishikawa)

§ 1 Introduction

R. P. Stanley : A BAKER'S DOZEN OF CONJECTURES CONCERNING
PLANE PARTITIONS

これは、plane partition に 関する 13 個の予想がのっている。
今回の講演内容は そのうちの Conjecture 2 と Conjecture 8 に
関するものである。 A_n という数を

$$A_n := \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(3i+1)!}{(n+i)!}$$

によって定義する。 例えば $A_1 = 1$, $A_2 = 2$, $A_3 = 7$, ...

である。 totally symmetric $(2n, 2n, 2n)$ -self-complementary plane
partition の 個数は上の論文で A_n であると予想されている。

また cyclically symmetric $(2n, 2n, 2n)$ -self-complementary plane
partition の 個数は上の論文で A_n^2 であると予想されている。

講演の目標は totally symmetric $(2n, 2n, 2n)$ -self-complementary plane
partition の 個数が次のような行列式の和であらわされることを
示すことである。

n 行 m 列 ($n \leq m$) の矩形行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

に対して

$$d_n(A) := \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_n \leq m} \begin{vmatrix} a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nj_1} & \cdots & a_{nj_n} \end{vmatrix}$$

と定義する。 $n \in \mathbb{P}$ に対して n 行 $2n-1$ 列の矩形行列 P_n を

$$P_n := \left(\binom{i-1}{j-i} \right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2n-1}$$

(但し内側のかっこは二項係数)

によつて定義すると totally symmetric $(2n, 2n, 2n)$ -self-complementary plane partition の個数は $d_n(P_n)$ によつて与えられることが証明できた。したがつて上の問題は $d_n(P_n)$ が A_n に等しいことを証明することと帰着したことになる。上の公式は より一般的な plane partition の generating function を与える公式の特別な場合として得られる。

§ 1² 準備

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{P} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{Z}$: 有理整数全体の集合, $[i, j] := \{x \in \mathbb{Z}; i \leq x \leq j\}$, $\#X$, $\text{card } X$: 有限集合 X の元の個数, $\binom{n}{r}$: 二項係数 (ただし $r < 0$ または $r > n$ のときは 0),

$\left[\begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right] := \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1}) \cdots (1-q^{n-r+1})}{(1-q^r)(1-q^{r-1}) \cdots (1-q)} : \text{Gauss 二項係数 (ただし } r < 0 \text{ または } r > n \text{ のときは 0)}$ という notation を使う.

$\lambda := (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0$ を partition とする.

λ の conjugate partition $\lambda' := (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots)$ とは.

$$\lambda'_i := \# \{j \in \mathbb{P}; \lambda_j \geq i\}$$

によって定義される partition である. $\ell(\lambda) := \lambda'_1$ を λ の length という. partition λ の Young diagram とは

$$D(\lambda) := \{(i, j) \in \mathbb{P}^2; j \leq \lambda_i\}$$

のことである. 今後 $D(\lambda)$ を λ と同一視し. 同じ記号であらわす.

(定義) plane partition a とは $(i, j) \in \mathbb{P}^2$ に対して定義された array $a = (a_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{P}^2}$ で (i) $a_{ij} \in \mathbb{N}$ for $(i, j) \in \mathbb{P}^2$ (ii) $a_{ij} \geq a_{i+1,j}$, $a_{ij} \geq a_{i,j+1}$ (iii) $|a| := \sum_{(i,j) \in \mathbb{P}^2} a_{ij} < \infty$ を満たすもののことである. 0 と異なる成分 a_{ij} を a の parts といい. $|a|$ を a の weight という. 特にすべての成分が 0 である plane partition を ϕ で表す.

$$F(a) := \{ (i, j, k) \in \mathbb{P}^3 ; k \leq a_{ij} \}$$

によって定義される $\mathbb{P}^3$ の部分集合のことを plane partition a の Ferrers graph という。Ferrers graph は

$$(i) \quad \forall (x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{P}^3 \text{ に対して}$$

$$(x', y', z') \in F, x \leq x', y \leq y', z \leq z' \text{ ならば } (x, y, z) \in F$$

$$(ii) \quad \# F < \infty$$

を満たす。逆にこれは $\mathbb{P}^3$ の部分集合が Ferrers graph になるための条件でもある。今後 Ferrers graph と plane partition を同一視して同じ記号であらわす。また Ferrers graph の包含関係によって plane partition の包含関係を定義するとこれは plane partition の間の順序関係になる。

plane partition a に対して

$$bs(a) := \{ (x, y) \in \mathbb{P}^2 ; (x, y, 1) \in a \}$$

によって定義される partition を a の shape (または bottom shape) と呼ぶ。また

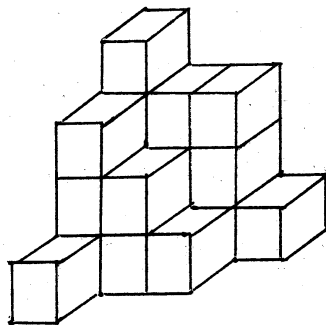
$$ss(a) := \{ (x, z) \in \mathbb{P}^2 ; (x, 1, z) \in a \}$$

によって定義される partition を a の side shape と呼ぶ。

a の Ferrers graph を図示するには 格子点 $(x, y, z) \in a$ を一辺の長さが 1 の立方体の箱におきかえて、 $(i, j) \in \mathbb{P}^2$ の位置に a_{ij} 個の箱を積み上げることによってあらわす。たとえば、

$$a = \begin{array}{cccc} 4 & 3 & 3 & 1 \\ & 3 & 2 & 1 \\ & & 1 & \end{array}$$

の Ferrers graph を 図示すると下のようになる。



次に plane partition の symmetry についてのいくつかの定義を行なう。詳しくは [St 3] を参照

(定義) $a = (a_{ij})_{a_{ij} \in \mathbb{P}^3}$ を plane partition とする。

- (1) a が column-strict とは $a_{ij} \neq 0$ のとき $a_{ij} > a_{imj}$ が成り立つこと。
- (2) a が row-strict とは $a_{ij} \neq 0$ のとき $a_{ij} > a_{ij+1}$ が成り立つこと。
- (3) a が symmetric とは 次が成り立つこと。
 $\forall (x, y, z) \in \mathbb{P}^3 ; (x, y, z) \in a \iff (y, x, z) \in a$
- (4) a が cyclically symmetric とは 次が成り立つこと。
 $\forall (x, y, z) \in \mathbb{P}^3 : (x, y, z) \in a \iff (y, z, x) \in a$
- (5) a が totally symmetric であるとは symmetric かつ

cyclically symmetric であること

$X_{l,m,n} := [1, l] \times [1, m] \times [1, n]$ とおく。

(6) a が (l, m, n) -self-complementary とは

$$a \subseteq X_{l,m,n} \quad \text{かつ}$$

$$\forall (x, y, z) \in X_{l,m,n} \quad (x, y, z) \in a \iff (l+1-x, m+1-y, n+1-z) \notin a$$

を満足すること。これは a が $X_{l,m,n}$ に含まれ、かつ a と $X_{l,m,n} \setminus a$ が中心 $(\frac{l}{2}, \frac{m}{2}, \frac{n}{2})$ に関して点対称となることである。

§3 いくつかの plane partition の class とその間の対応

(定義) $n \in \mathbb{P}$ とする。

- (i) $\mathcal{R}_n$ によって cyclically symmetric $(2n, 2n, 2n)$ -self-complementary plane partition 全体の成す集合を表す。
- (ii) $\mathcal{S}_n$ によって totally symmetric $(2n, 2n, 2n)$ -self-complementary plane partition 全体の成す集合を表す。

論文 [St3] からこの講演の主題である次の2つの予想を引用する。

(予想1)

$$(i) \quad \# \mathcal{S}_n = A_n \quad (\text{conjecture 2})$$

$$(ii) \quad \# \mathcal{R}_n = A_n^2 \quad (\text{conjecture 8})$$

(定義)

$$\mathcal{E}_n := \{ b \mid \text{plane partition st. } b \subseteq [1, n]^3$$

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{P}^2 \quad (x, y, 1) \in b \Rightarrow (n+1-y, 1, n+1-x) \notin b \}$$

によって plane partition の集合 $\mathcal{E}_n$ を定義する。

(定理 2)

$\mathcal{R}_n$ と $\mathcal{E}_n$ の間に 1 対 1 対応が構成できる。

(証明)

$\gamma: \mathcal{R}_n \longrightarrow \mathcal{E}_n$ を次のように定める。 $a \in \mathcal{R}_n$ が与えられたとき b を

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{P}^3 \quad (x, y, z) \in b \iff (x, y+n, z+n) \in a$$

によって定義する。まず $b \in \mathcal{E}_n$ を示さなければならない。

b が plane partition であることと $b \subseteq [1, n]^3$ は定義より明らかである。よって

$$(x, y, 1) \in b \Rightarrow (n+1-y, 1, n+1-x) \notin b$$

を示せばよい。実際 定義より

$$(x, y, 1) \in b \iff (x, y+n, n+1) \in a \iff (2n+1-x, n+1-y, n) \notin a$$

$$\iff (n+1-y, n, 2n+1-x) \notin a \iff (n+1-y, n+1, 2n+1-x) \notin a$$

$$\iff (n+1-y, 1, n+1-x) \notin b$$

次に逆写像 $\gamma: \mathcal{E}_n \longrightarrow \mathcal{R}_n$ を定めるために

$$D_{\alpha, \beta, \gamma} := [(\alpha-1)n+1, \alpha n] \times [(\beta-1)n+1, \beta n] \times [(\gamma-1)n+1, \gamma n]$$

(ただし $\alpha, \beta, \gamma = 1$ または 2)

とおく。 $b \in E_n$ が与えられたとき $a \in R_n$ を各領域 $D_{\alpha, \beta, \gamma}$ に分けて次のように定義する。

$$D_{122} : (x, y+n, z+n) \in a \quad (x, y, z) \in b$$

$$D_{212} : (x+n, y, z+n) \in a \quad (y, z, x) \in b$$

$$D_{221} : (x+n, y+n, z) \in a \quad (z, x, y) \in b$$

$$D_{211} : (x+n, y, z) \in a \quad (n+1-x, n+1-y, n+1-z) \notin b$$

$$D_{121} : (x, y+n, z) \in a \quad (n+1-y, n+1-z, n+1-x) \notin b$$

$$D_{112} : (x, y, z+n) \in a \quad (n+1-z, n+1-x, n+1-y) \notin b$$

$$D_{111} : (x, y, z) \in a$$

$$D_{222} : (x+n, y+n, z+n) \notin a$$

まず $a \in R_n$ を示そう。そのためには a が plane partition であることを示せば十分である。というのは a が cyclically symmetric であることと $(2n, 2n, 2n)$ -self-complementary であることは定義の仕方から明らかであるからである。

$$P = (x, y, z), \quad P' = (x', y', z') \in [1, 2n]^3$$

$$P' \in a, \quad x \leq x', \quad y \leq y', \quad z \leq z'$$

として、 $P \in a$ を示す。 P と P' が同じ領域に含まれるときはこのことは定義からすぐわかる。また $P \in D_{111}$ または $P' \in D_{222}$ のときも明らかである。したがって残りは

$$P \in D_{\alpha\beta\gamma} \quad \alpha, \beta, \gamma \text{ のうち 2つが 1 で他の 1つが 2}$$

$$P' \in D_{\alpha'\beta'\gamma'} \quad \alpha', \beta', \gamma' \text{ のうち 1つが 1 で他の 2つが 2}$$

α, β, γ のうち 2 である添字は α, β, γ でも 2

という場合を考えればよい。たとえばその 1 つの例として

$P = (x, y, z+n) \in D_{112}$, $P' = (x', y+n, z'+n) \in D_{122}$, $x \leq x'$, $z \leq z'$ の場合を示すことにする。ここで同じ領域に含まれるときはよいことから $x = x'$, $z = z'$ としてよい。

$$\begin{aligned} P' = (x, y+n, z+n) \in a &\Leftrightarrow (x, y, z) \in b \Rightarrow (x, 1, z) \in b \\ &\Rightarrow (n+1-z, n+1-x, 1) \notin b \Rightarrow (n+1-z, n+1-x, n+1-y) \notin b \\ &\Leftrightarrow P = (x, y, z+n) \in a \end{aligned}$$

最後に上で定義した写像が互いに逆写像であることを示せばよい。 $\varphi \circ \gamma = \text{id}$ であることは定義からすぐ見てとれるから φ の単射性を示せばよい。これは $b \in \mathcal{E}_n$ に対して $\varphi(a) = b$ となる $a \in \mathcal{E}_n$ は上で構成したものに限ることを示すことに帰着される。このことは a が cyclically symmetric $(2n, 2n, 2n)$ -self-complementary であることから容易に導かれる。(証明終り)

partition の組の集合 Φ_n を

$$\begin{aligned} \Phi_n := \{ (\lambda, \mu) : \lambda, \mu \text{ は partitions s.t. } l(\lambda) = l(\mu) \text{ かつ} \\ \forall (x, y) \in \mathbb{P}^2 \quad (x, y) \in \lambda \Rightarrow (n+1-y, n+1-x) \notin \mu \} \end{aligned}$$

と定義する。

(系 3)

λ, μ が partition のとき

$$\mathcal{F}_{\lambda, \mu} := \{ a ; \text{plane partition s.t. } bs(a) = \lambda, ss(a) = \mu \}$$

と定義する。このとき

$$\mathcal{E}_n = \bigcup_{(\lambda, \mu) \in \mathcal{Q}_n} \mathcal{F}_{\lambda, \mu} \quad (\text{disjoint union})$$

となる。

(定義) $n \in \mathbb{P}$ とする。

$$\mathcal{C}_n := \{ c : \text{row-strict plane partition s.t.} \}$$

$$(x, y, z) \in c \Rightarrow z \leq n - x \quad \}$$

$$\mathcal{D}_n := \{ d : \text{plane partition s.t.} \}$$

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{P}^3 : (x, y, z) \in d \iff (x, z, y) \in d$$

$$(x, y, z) \in d \Rightarrow x + y \leq n \quad \}$$

と定義する。

(命題 4) $\mathcal{C}_n$ と $\mathcal{D}_n$ の間に 1 対 1 対応が構成できる。

(証明) $\mathcal{D}_n \longrightarrow \mathcal{C}_n$ を次のように定める。 $d \in \mathcal{D}_n$ が与えられ
たとき $c \in \mathcal{C}_n$ を次のように定義する。

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{P}^3 \quad (x, y, z) \in c \iff (x, y, y+z-1) \in d$$

これが 1 対 1 対応であることを確かめるのは容易である。

(定理 5)

定理 2 で構成した $\mathcal{R}_n$ と $\mathcal{E}_n$ の間の 1 対 1 対応を $\mathcal{A}_n$ に制限すると
 $\mathcal{A}_n$ と $\mathcal{D}_n$ の間の 1 対 1 対応を与える。

(証明) 証明は簡単な計算なのでここでは省略する。

(系 6) $\mathcal{A}_n$ と $\mathcal{C}_n$ の間に 1 対 1 対応を構成できる。

次に $\mathcal{C}_n$ について調べることにする。

(例)

$$C_1 = \{ \emptyset \}$$

$$C_2 = \{ \emptyset, 1 \}$$

$$C_3 = \{ \emptyset, 1, \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}, 2, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}, 2 \ 1, \begin{smallmatrix} 2 \ 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \}$$

$c = (c_{ij}) \in C_n$ に対して $c_{ij} = n-i$ となる c の成分 c_{ij} を c の ceiling とよぶことにする。実際には c の ceiling は c の第 1 列のみにある。

(定義) $n \in \mathbb{P}$, $k = 1, 2, \dots, n$ とする。

$c \in C_n$ に対して

$$\bar{U}_k(c) := \# \{ (i, j) \in \mathbb{P}^2; c_{ij} = k \} + \# \{ t \in \mathbb{P}; t \leq k-1, c_{n-t, 1} = t \}$$

と定義する。すなわち

$$\begin{aligned} \bar{U}_k(c) = & (c \text{ に現われる } k \text{ と等しい parts の個数}) \\ & + (c \text{ に現われる } 1, 2, \dots, k-1 \text{ と等しい ceiling の個数}) \end{aligned}$$

となる。

(注) U_k を最初に定義したのは [MRR3] の論文である。 $\bar{U}_k$ はそこで定義された U_k と $\bar{U}_k(c) = n-1-U_k(c)$ という関係にある。よって $U_k(c)$ は §3 系 6 の全単射によって上の論文と compatible に定義されている。 U_k は alternating sign matrices の第 1 行の 1 の分布と同じ分布をもっていると予想されている。

§ 4 $\mathbb{C}_n$ の generating functions

可算個の変数 $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ を用意しておく。 $n, m, r \in \mathbb{Z}$ に対して変数 $x_m, x_{m+1}, \dots, x_n$ についての r 次の elementary symmetric function $e_r^{(n/m)}(x)$ を次のように定義する。

$n \geq m$ のとき

$$e_r^{(n/m)}(x) := \begin{cases} \sum_{m \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r} & (0 < r \leq n) \\ 1 & (r = 0) \\ 0 & (r < 0 \text{ または } r > n) \end{cases}$$

$n < m$ のとき

$$e_r^{(n/m)}(x) := \delta_{0,r}$$

ただし δ_{ij} はクロネッカーのデルタ記号で

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

である。したがって

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}} e_r^{(n/m)}(x) t^r = \prod_{i=m}^n (1 + x_i t)$$

となる。また $e_r^{(n/1)}(x)$ を省略して $e_r^{(n)}(x)$ と書く。

a が plane partition のとき $x^a := \prod_{a_{ij} > 0} x_{a_{ij}}$ と書く。これは数字 r に対して r の現われる回数 m_r を r の肩に置いた $x_r^{m_r}$ の積として表される単項式である。例えば

$$a = \begin{array}{cccc} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & \\ 1 & & & \end{array}$$

のときは $x^a = x_1^3 x_2^3 x_3^2$ である。次の定理は 論文 [N]
 P. 26 定理 2 (1) から簡単に導かれるので、ここで引用し、
 証明は行わない。この定理を使って $\mathcal{C}_n$ の generating function
 が求められる。

(定理 1)

λ, n を partitions, r を $r \geq l(\lambda), l(n)$ を満たす整数とする。

$$\hat{\mathcal{G}}_{\lambda, n} := \{ a : a \text{ は row-strict plane partition s.t.} \\ bs(a) = \lambda, \quad ss(a) < n \}$$

とすると $\hat{\mathcal{G}}_{\lambda, n}$ の generating function は

$$\sum_{a \in \hat{\mathcal{G}}_{\lambda, n}} x^a = \det (e_{\lambda_i - i + j}^{(n_j)}(x))_{1 \leq i, j \leq r}$$

によって与えられる。

定理 1 からの帰結として次の系 2 が得られる。

(系 2)

λ, n を partitions, r を $r \geq l(\lambda), l(n)$ を満たす整数とする。

$$\mathcal{G}_{\lambda, n} := \{ a : a \text{ は row-strict plane partition s.t.} \\ bs(a) = \lambda, \quad ss(a) = n \}$$

とすると $\mathcal{G}_{\lambda, n}$ の generating function は

$$\sum_{a \in \mathcal{G}_{\lambda, n}} x^a = \det (f_{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq r}$$

ただし

$$f_{ij}(x) := \begin{cases} x_{n_j} e_{\lambda_i - i + j - 1}^{(n_j - 1)}(x) & (n_j > 0) \\ \delta_{0, \lambda_i - i + j} & (n_j = 0) \end{cases}$$

によって与えられる。

証明は容易なので省略する。

n 行 m 列の矩形行列 ($n \leq m$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

があるとき

$$d_n(A) := \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_n \leq m} \det \begin{pmatrix} a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nj_1} & \cdots & a_{nj_n} \end{pmatrix}$$

と定義する。

$n \in \mathbb{P}$, $k = 1, 2, \dots, n$ とする。変数 $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$

についての r 次の elementary symmetric function

$$e_r^{(n-1)}(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

を $e_r^{(n), k}$ と書くことにする。

次の定理は $\mathcal{C}_n$ の元の各成分に さらに $\bar{v}_k$ で重みをつけたもの、とも一般的な形での generating function を与えるものである。

(定理 3)

$n \in \mathbb{P}$, $k = 1, 2, \dots, n$ とする。

n 行 $2n-1$ 列の行列 $Q_n^{(k)}(x, t)$ を次のように定義する。

$$Q_n^{(k)}(x, t) = (g_{ij}^{(k)}(x, t))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2n-1}$$

但し

$$g_{ij}^{(k)}(x, t) := \begin{cases} \delta_{i,j} & (i=1) \\ e_{j-i}^{(i-2)}(x) + t x_{i-1} e_{j-i-1}^{(i-2)}(x) & (2 \leq i \leq k) \\ e_{j-i}^{(i-1),k}(x) + t x_k e_{j-i-1}^{(i-1),k}(x) & (k+1 \leq i \leq n) \end{cases}$$

とする。このとき

$$\sum_{c \in \mathbb{C}_n} t^{\bar{v}_k(c)} x^c = d_n(Q_n^{(k)}(x, t))$$

となる。

(例) $n=3, k=2$ のとき上の行列は

$$Q_3^{(2)}(x, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 + t x_2 & t x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

となる。よって

$$d_3(Q_3^{(2)}(x, t)) = 1 + x_1 + t(x_2 + x_1^2 + x_1 x_2) + t^2(x_1 x_2 + x_1^2 x_2)$$

である。一方 $\mathbb{C}_3$ の元は

$$\phi \quad 1 \quad \textcircled{1} \quad 2 \quad \textcircled{2} \quad 21 \quad \textcircled{2} \quad 1$$

$$\bar{U}_2: 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 2$$

となり上の generating function と一致している。ここで ϕ をつけた元は 1 に等しい ceiling で、 $\bar{U}_2$ は この個数と 2 の個数の和である。

定理 3 の証明を述べる前に定理 3 からただちに得られる系を述べ、 $\mathcal{A}_n$ の元の個数に関する公式を求める。

まず $t=1$ とすると 次の系を得る。

(系4)

n 行 $2n-1$ 列の行列 $M_n(x)$ を

$$M_n(x) := (e^{\binom{i-1}{j-i}}(x))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2n-1}$$

とする。このとき $\mathcal{C}_n$ の generating function は

$$\sum_{c \in \mathcal{C}_n} x^c = d_n(M_n(x))$$

によつて与えられる。

さらに $x_i = q^i$ ($1 \leq i \leq n$) とおくと次の系を得る。

(系5)

n 行 $2n-1$ 列の行列 $N_n(q)$ を

$$N_n(q) := (q^{\frac{(i-1)(j-i+1)}{2}} \begin{bmatrix} i-1 \\ j-i \end{bmatrix})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2n-1}$$

とする。このとき

$$\sum_{c \in \mathcal{C}_n} q^{|c|} = d_n(N_n(q))$$

となる。

さらに $q=1$ とすると §3 系6 より次の系を得る。

(系6)

$n \in \mathbb{P}$ に対して n 行 $2n-1$ 列の行列 P_n を

$$P_n := (\begin{bmatrix} i-1 \\ j-i \end{bmatrix})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2n-1}$$

によつて定義する。このとき

$$\# \mathcal{S}_n = \# \mathcal{C}_n = d_n(P_n)$$

となる。

系6により δ_n に関する conjecture は $d_n(P_n)$ を評価してこれが A_n に等しいことを示すことに帰着したことになる。

また定理3において $x_i=1$ ($i \geq 1$) を代入すると次の系を得る。

(系7)

$n \in \mathbb{P}$ に対して n 行 $2n-1$ 列の行列 $R_n(t)$ を

$$R_n(t) = (r_{ij}(t))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2n-1}$$

$$r_{ij}(t) := \begin{cases} \delta_{ij} & (i=1) \\ \binom{i-2}{j-i} + \binom{i-2}{j-i-1} t & (i \geq 2) \end{cases}$$

によって定義する。このとき $k=1, 2, \dots, n$ に対して

$$\sum_{c \in C_n} t^{\bar{u}_k(c)} = d_n(R_n(t))$$

である。

この式は $\bar{u}_k$ の分布を与えるものである。特に上の式から $\bar{u}_k$ の分布は k によらないことがわかり、これは [MRR] で証明されたことの別証になっている。

(定理3の証明)

まず $n \in \mathbb{P}$, $r \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\sum_{k=1}^n x_k e_{r-1}^{(k-1)}(x) = \begin{cases} e_r^{(n)}(x) & (r \neq 0) \\ 0 & (r=0) \end{cases}$$

であることを注意しておく。最初に次の主張を証明する。

(主張)

$1 \leq k \leq n$, $0 \leq r \leq n-1$, $n-k+1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n-1$

とする。このとき

$$C := \{ c \in C_n : c \text{ の shape は } \lambda \}$$

C は $i = i_1, i_2, \dots, i_r$ 行に ceiling を持つが、

$n-k+1 \leq i \leq n-1$ の範囲で他の行に ceiling を持

たない。($1 \leq i \leq n-k$ の範囲には ceiling はあっても無くてもよい。) }

の generating function は

$$\sum_{c \in C} x^c = \det (g_{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq n}$$

但し

$$g_{ij}(x) := \begin{cases} e_{\lambda_j - j + i}^{(n-i)}(x) & 1 \leq i \leq n-k \text{ または } i = n \\ e_{\lambda_j - j + i}^{(n-i-1)}(x) & n-k+1 \leq i \leq n-1, i \neq i_1, \dots, i_r \\ x_{n-i} e_{\lambda_j - j + i - 1}^{(n-i-1)}(x) & i = i_1, i_2, \dots, i_r \end{cases}$$

によつて与えられる。

$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$, $a_i \leq n-i$ とする。系 2 の gen.

func. を転置して $(n_1, \dots, n_r)$ を $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ でおきかえ
ると

$$\{ c \in C_n : c \text{ の shape は } \lambda \}$$

$$c_{i1} = a_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \}$$

の gen. func. は

$$\det (f_{ij}(\alpha))$$

但し

$$f_{ij}(\alpha) = \begin{cases} \lambda_{a_i} e_{\lambda_j - j + i - 1}^{(a_i - 1)}(x) & (a_i > 0) \\ \delta_{0, \lambda_j - j + i} & (a_i = 0) \end{cases}$$

となる。仮定より

$$a_i \leq n - i \quad 1 \leq i \leq n - k \text{ または } i = n$$

$$a_i \leq n - i - 1 \quad n - k + 1 \leq i \leq n - 1 \text{ かつ } i \neq i_1, \dots, i_r$$

$$a_i = n - i \quad i = i_1, \dots, i_r$$

であるから上の gen. func. を

$$a_i : n - i \geq a_i \geq a_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n - k)$$

$$n - i - 1 \geq a_i \geq a_{i+1} \quad (n - k + 1 \leq i \leq n - 1, i \neq i_1, \dots, i_r)$$

の範囲で a_i を動かして和を取れば求める gen. func. を得る。

$\det(f_{ij}(\alpha))$ の和を次のように取る。まず $i = 1, \dots, n - k$ の順に和 $\sum_{a_i = a_{i+1}}^{n-i}$ を取り、次に $i = i_1, \dots, i_r$ に対して $a_i = n - i$

と置いたのちに $i = n - k + 1, \dots, n - 1$ の順に $i \neq i_1, \dots, i_r$ に対して和 $\sum_{a_i = a_{i+1}}^{n-i-1}$ を取る。すると求める C の gen. func. が得られる。

ここで最初の注意より

$$\sum_{a_i=0}^b f_{ij}(x) = \delta_{0, \lambda_j - j + i} + \sum_{a_i=1}^b f_{ij}(x) = e_{\lambda_j - j + i}^{(b)}$$

である。よって

$$\sum_{a_i=a_{i+1}}^b f_{ij}(x) = \begin{cases} e_{\lambda_j - j + i}^{(b)}(x) - e_{\lambda_j - j + i}^{(a_{i+1} - 1)}(x) & (a_{i+1} > 0) \\ e_{\lambda_j - j + i}^{(b)}(x) & (a_{i+1} = 0) \end{cases}$$

となる。ここで $b=n-i$ または $b=n-i-1$ の場合を次に使う。

まず $\det(f_{ij}(x))$ に $i=1, 2, \dots, n-k$ の順に次の操作をする。

和 $\sum_{a_i=a_{i+1}}^{n-i}$ を行列式の第 i 行に入れて和を計算すると第 i 行は

$$\sum_{a_i=a_{i+1}}^{n-i} f_{ij}(x) = \begin{cases} e_{\lambda_j-j+i}^{(n-i)}(x) - e_{\lambda_j-j+i}^{(a_{i+1}-1)}(x) & (a_{i+1} > 0) \\ e_{\lambda_j-j+i}^{(n-i)}(x) & (a_{i+1} = 0) \end{cases}$$

となる。ここで上の場合には 第 $i+1$ 行の $x_{a_{i+1}}^{-1}$ 倍を第 i 行に加えることによって後の項は消えて第 i 行は

$$e_{\lambda_j-j+i}^{(n-i)}(x)$$

になる。

次に $i = i_1, \dots, i_r$ に対して $a_i = n-i$ とおくと第 i 行は

$$x_{n-i} e_{\lambda_j-j+i-1}^{(n-i-1)}(x)$$

となる。

最後に $i = n-k+1, \dots, n-1$ の順に $i \neq i_1, \dots, i_r$ に対して上と

同様に 和 $\sum_{a_i=a_{i+1}}^{n-i-1}$ を行列式の第 i 行に入れて計算し $a_{i+1} > 0$

の場合には 第 $i+1$ 行の $x_{a_{i+1}}^{-1}$ 倍を第 i 行に加えることにより、第 i 行は

$$e_{\lambda_j-j+i}^{(n-i-1)}(x)$$

となる。また第 n 行は

$$\delta_{0, \lambda_j-j+i} = e_{\lambda_j-j+i}^{(0)}(x)$$

のみである。したがって主張の形を得る。

次に 次の主張を証明する。

(主張)

$k, r, i_1, \dots, i_r$ は前の主張と同じとする。

$C := \{ c \in C_n : c \text{ は } i=i_1, \dots, i_r \text{ 行に ceiling を持ち} \\ n-k+1 \leq i \leq n-1 \text{ の範囲に他に ceiling を持たない} \}$

の generating function は

$$\sum_{c \in C} x^c = d_n(H(x))$$

ここで

$$H(x) = (h_{ij}(x))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2n-1}$$

$$h_{ij}(x) := \begin{cases} e_{j-i}^{(i-1)}(x) & i=1 \text{ または } k+1 \leq i \leq n \\ e_{j-i}^{(i-2)}(x) & 2 \leq i \leq k \text{ かつ } i \neq n+1-i_\nu \\ x_{i-1} e_{j-i-1}^{(i-2)}(x) & i = n+1-i_\nu \quad (1 \leq \nu \leq r) \end{cases}$$

によって与えられる。

求める gen. func. は

$$\sum_{\lambda} \det(g_{ij}(x))$$

である。ここで和は

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$$

にわたって取る。ここで

$$\mu_{n+1-j} = n+1-j + \lambda_j \quad (1 \leq j \leq n)$$

というおきかえを行う。 μ の動く範囲は

$$1 \leq \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n \leq 2n-1$$

となる。また

$$\lambda_j - j + i = \mu_{n+1-j} + i - n - 1$$

を代入すると $g_{ij}(x)$ は

$$g_{ij}(x) = \begin{cases} e^{\binom{n-i}{\mu_{n+1-j} + i - n - 1}} & 1 \leq i \leq n-k \text{ または } i = n \\ e^{\binom{n-i-1}{\mu_{n+1-j} + i - n - 1}} & n-k+1 \leq i \leq n-1, i \neq i_1, \dots, i_r \\ x_{n-i} e^{\binom{n-i-1}{\mu_{n+1-j} + i - n - 2}} & i = i_1, \dots, i_r \end{cases}$$

となる。ここで

$$\det(g_{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq n} = \det(g_{n+1-i, n+1-j}(x))$$

という入れかえを行うと求める gen. func. は

$$\sum_{\mu} \det(\tilde{g}_{ij}(x))$$

但し

$$\tilde{g}_{ij}(x) := \begin{cases} e^{\binom{i-1}{\mu_j - i}}(x) & i=1 \text{ または } k+1 \leq i \leq n \\ e^{\binom{i-2}{\mu_j - i}}(x) & 2 \leq i \leq k \text{ かつ } i \neq n+1-i_v \\ x_{i-1} e^{\binom{i-2}{\mu_j - i - 1}}(x) & i = n+1-i_v \end{cases}$$

ここで和は

$$1 \leq \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n \leq 2n-1$$

にわたって取る。すなわち主張を得る。

最後に定理を証明する。定義より

$$\begin{aligned} \bar{U}_k(c) = & \# \{ (i, j) \in \mathbb{P}^2 : c_{ij} = k \} \\ & + \# \{ i \in \mathbb{P} : n-k+1 \leq i \leq n-1, c_{i1} = n-i \} \end{aligned}$$

である。

まず後の $n-k+1 \leq i \leq n-1$ 行にある ceiling の個数を次のようにして数える。 $n-k+1 \leq i \leq n-1$ 行に r 個の ceiling を持つ $c \in C_n$ 全体の gen. func. は上の主張より

$$\sum_{2 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq k} d_n(\tilde{H}_{i_1 \dots i_r}(x))$$

ここで

$$\tilde{H}_{i_1 \dots i_r}(x) = (\tilde{h}_{ij}(x))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2n-1}$$

但し

$$\tilde{h}_{ij}(x) := \begin{cases} e_{j-i}^{(i-1)}(x) & i=1 \text{ または } k+1 \leq i \leq n \\ e_{j-i}^{(i-2)}(x) & 2 \leq i \leq k \text{ かつ } i \neq i_v \\ x_{i-1} e_{j-i-1}^{(i-2)}(x) & i = i_v \end{cases}$$

である。すなわちこれは、 n 行 $2n-1$ 列の行列 $\Phi(x, t)$ を

$$\Phi(x, t) = (y_{ij}(x, t))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2n-1}$$

但し

$$y_{ij}(x, t) := \begin{cases} e_{j-i}^{(i-1)}(x) & (i=1 \text{ または } k+1 \leq i \leq n) \\ e_{j-i}^{(i-2)}(x) + t x_{i-1} e_{j-i-1}^{(i-2)}(x) & (2 \leq i \leq k) \end{cases}$$

と定義するとき、 $d_n(\Phi(x, t))$ における t^r の係数が r 個の ceiling を持つ $c \in C_n$ の gen. func. になることを意味する。

さらにこの上に c に現れる数字 k の個数を数えるには 変数 x_k に tx_k を代入すればよい。ここで変数 x_k が $\Phi(x, t)$ に現れるのは、 $k+1 \leq i \leq n$ の範囲の 第 i 行のみであることを注意する。

$$e_{j-i}^{(i-1)}(x) = e_{j-i}^{(i-1),k}(x) + x_k e_{j-i-1}^{(i-1),k}(x) \quad (k+1 \leq i \leq n)$$

と分解してこの x_k に tx_k を代入すれば定理の $Q(x, t)$ を得る。

(証明終)

§5 E_n の generating function

E_n についてもまだ複雑な形だが数え上げる式を与えることができる。

(定理1)

λ, μ を partition とする。 $l(\lambda) = l(\mu)$ と仮定する。

$$\mathcal{F}_{\lambda, \mu} := \{ a : \text{plane partitions s.t.} \\ bs(a) = \lambda \quad ss(a) = \mu \}$$

の generating function は

$$q^{|\lambda|+|\mu|} \det \left(q^{\frac{(i-j)(i-j-1)}{2}} \begin{bmatrix} \lambda_i + \mu_j - 2 \\ \lambda_i + j - i - 1 \end{bmatrix} \right)_{1 \leq i, j \leq l(\lambda)}$$

によって与えられる。

(証明) は帰納法でも簡単に得られるが 論文 [N] P. 26

定理2 から導かれることが知られている。

この定理1と §3 系3 より E_n の generating function が得られる。

(定理2) $n \in \mathbb{P}$ とする。

E_n の generating function は

$$\sum_{a \in E_n} q^{|a|} = \sum_{(\lambda, \mu) \in \Phi_n} q^{|\lambda|+|\mu|} \det \left(q^{\frac{(i-j)(i-j-1)}{2}} \begin{bmatrix} \lambda_i + \mu_j - 2 \\ \lambda_i + j - i - 1 \end{bmatrix} \right)_{1 \leq i, j \leq l(\lambda)}$$

によつて与えられる。そこで Φ_n は §3 で定義した

$$\Phi_n := \{ (\lambda, \mu) : \lambda, \mu \text{ は partitions s.t. } \ell(\lambda) = \ell(\mu) \\ \forall (x, y) \in \mathbb{P}^2 \quad (x, y) \in \lambda \Rightarrow (n+1-y, n+1-x) \notin \mu \}$$

である。

$\delta = 1$ を代入することにより次の系を得る

(系 3)

$n \in \mathbb{P}$ とする。cyclically symmetric $(2n, 2n, 2n)$ -self-complementary plane partition の個数は

$$\# \mathcal{R}_n = \sum_{(\lambda, \mu) \in \Phi_n} \det \left(\begin{pmatrix} \lambda_i + \mu_j - 2 \\ \lambda_i + j - i - 1 \end{pmatrix} \right)_{1 \leq i, j \leq \ell(\lambda)}$$

によつて与えられる。

§6 Pfaffian の公式によつて、小行列式の和を 1 つの行列式にする。

論文 [C] P.53 系 3.1 に一般に $d_n(P_n)$ の形の小行列式の和を 1 つの Pfaffian で表す公式がある。ここではその公式を引用し、それを使つて系 10 の $d_n(P_n)$ を 1 つの Pfaffian で表す。

変数 z_{ij} を (i, j) 成分とする n 行 m 列の行列

$$Z = (z_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$$

を固定する。

(定義)

正整数の列 $(a_1, a_2, \dots, a_r), (b_1, b_2, \dots, b_r)$

($1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_r \leq n$, $1 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_r \leq n$) に対して

$$d(a_1, \dots, a_r; b_1, \dots, b_r) = \det (z_{a_i b_j})_{1 \leq i, j \leq r}$$

とおき

$$d(a_1, \dots, a_r) := \sum_{1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_r \leq m} d(a_1, \dots, a_r; b_1, \dots, b_r)$$

と定義する。例えば、

$$d(a_1) = z_{a_1 1} + z_{a_1 2} + \dots + z_{a_1 m}$$

$$d(a_1, a_2) = \sum_{1 \leq b_1 < b_2 \leq m} \begin{vmatrix} z_{a_1 b_1} & z_{a_1 b_2} \\ z_{a_2 b_1} & z_{a_2 b_2} \end{vmatrix}$$

である。

次の定理は 論文 [C] p. 53 系 3.1 の引用である。

(定理 1)

$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_r \leq n$ とする。

(1) r が偶数のとき

$$d(a_1, a_2, \dots, a_r) = \text{Pfr} (d(a_i, a_j))_{1 \leq i, j \leq r}$$

(2) r が奇数のとき

$$d(a_1, a_2, \dots, a_r) = \text{Pfr}_{r+1} (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq r+1}$$

ここで

$$x_{ij} := \begin{cases} 0 & (i=j=1) \\ d(a_{j-1}) & (i=1, 2 \leq j \leq r+1) \\ -d(a_{i-1}) & (j=1, 2 \leq i \leq r+1) \\ d(a_{i-1}, a_{j-1}) & (2 \leq i, j \leq r+1) \end{cases}$$

この定理を $d_n(P_n)$ の評価に適用すると 次のようになる。

(定義)

$i, j \in \mathbb{N}$ に対して

$$g(i) := \sum_{k \geq 0} \binom{i}{k-i}$$

$$g(i, j) := \sum_{0 \leq k < l} \begin{vmatrix} \binom{i}{k-i} & \binom{i}{l-i} \\ \binom{j}{k-j} & \binom{j}{l-j} \end{vmatrix}$$

と定義する。このとき

(系 2) $n \in \mathbb{P}$ とする。

(1) n が偶数のとき

$$\text{card } \mathcal{S}_n = \text{Pf}_n (g(i-1, j-1))_{1 \leq i, j \leq n}$$

(2) n が奇数のとき

$$\text{card } \mathcal{S}_n = \text{Pf}_n (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq n+1}$$

但し

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 & i=j=1 \\ g(j-2) & i=1, 2 \leq j \leq n+1 \\ -g(i-2) & j=1, 2 \leq i \leq n+1 \\ g(i-2, j-2) & 2 \leq i, j \leq n+1 \end{cases}$$

次に $g(i, j)$ の漸化式をつくり上の Pfaffian を簡単化する。

(補題 3) $i, j \in \mathbb{N}$

$$(1) \quad g(i) = 2^i$$

$$(2) \quad g(i, j) = \sum_{k \geq 0} \binom{i+j}{2i-j+k} - \sum_{k \geq 0} \binom{i+j}{2i-j-k}$$

(証明)

(2) を証明する。Laurent 級数に対してその定数項を取る作用素を T と表す。 T は線型作用素で、多項式 $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ に対して $T\left(\frac{z^{-m}}{1-z^{-1}} f(z)\right) = \sum_{n \geq m} a_n$ となる。

$$\sum_{l \geq 0} \binom{i}{l-i} z^l = z^i (1+z)^i$$

であるから

$$\begin{aligned} g(i, j) &= \sum_{k \geq 0} \sum_{l \geq k} \begin{vmatrix} \binom{i}{k-i} & \binom{l}{l-i} \\ \binom{j}{k-j} & \binom{l}{l-j} \end{vmatrix} = \sum_{k \geq 0} \begin{vmatrix} \binom{i}{k-i} & \sum_{l \geq k} \binom{l}{l-i} \\ \binom{j}{k-j} & \sum_{l \geq k} \binom{l}{l-j} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{k \geq 0} \begin{vmatrix} \binom{i}{k-i} & T\left\{ \frac{z^{-k}}{1-z^{-1}} z^i (1+z)^i \right\} \\ \binom{j}{k-j} & T\left\{ \frac{z^{-k}}{1-z^{-1}} z^j (1+z)^j \right\} \end{vmatrix} \\ &= T\left\{ \frac{1}{1-z^{-1}} \begin{vmatrix} \sum_{k \geq 0} \binom{i}{k-i} z^{-k} & z^i (1+z)^i \\ \sum_{k \geq 0} \binom{j}{k-j} z^{-k} & z^j (1+z)^j \end{vmatrix} \right\} \\ &= T\left\{ \frac{1}{1-z^{-1}} \begin{vmatrix} z^i (1+z^{-1})^i & z^i (1+z)^i \\ z^{-j} (1+z^{-1})^j & z^j (1+z)^j \end{vmatrix} \right\} \\ &= T\left\{ \frac{z^{j-2i} - z^{i-2j}}{1-z^{-1}} (1+z)^{i+j} \right\} \\ &= \sum_{k \geq 2i-j} \binom{i+j}{k} - \sum_{k \geq 2j-i} \binom{i+j}{k} \end{aligned}$$

よ、ち式を得る。

この式より $g(i, j)$ について次の漸化式を得る。

(補題4) $i, j \in \mathbb{N}$ とする。

$$(1) \quad g(j, i) = -g(i, j)$$

$$(2) \quad g(i) = 2g(i-1) \quad (i \geq 1)$$

$$(3) \quad g(i, j) = 2g(i, j-1) + \binom{i+j}{2i-j+1} + \binom{i+j+1}{2i-j+1} \\ (i \geq 0, j \geq 1)$$

(証明) (1)(2)は明らかである。(3)は二項係数に関する漸化式 $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$ を使、て補題3(2)式から計算によって得られる。

この漸化式を使、て前述の Pfaffian を簡単化すると次の定理を得る。

(定理5) $n \in \mathbb{N}$ とする。

(1) n が偶数のとき

$$\text{card } S_n = \text{Pf}_n \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & \binom{i+j-2}{2i-j} + \binom{i+j-1}{2i-j} & & & \\ 0 & -2 \left\{ \binom{i+j-3}{2i-j-2} + \binom{i+j-2}{2i-j-2} \right\} & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right]$$

(2) n が奇数のとき

$$\text{card } S_n = \text{Pf}_n \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & -2 & \binom{i+j-4}{2i-j-1} + \binom{i+j-3}{2i-j-1} & & & \\ \vdots & 0 & -2 \left\{ \binom{i+j-5}{2i-j-3} + \binom{i+j-4}{2i-j-3} \right\} & & & \\ 0 & 0 & & & & \end{array} \right]$$

(証明) n が偶数のとき 系 2 の行列 $(g(i-1, j-1))_{1 \leq i, j \leq n}$ に次のような基本変形を行う。 n 列目から $n-1$ 列目の 2 倍を引き、 $n-1$ 列目から $n-2$ 列目の 2 倍を引き、 $\dots$ 2 列目から 1 列目の 2 倍を引く。このめち行についても同じ基本変形を行うと定理の行列を得る。 n が奇数の場合も同様である。

上の行列の成分を計算することにより次の系を得る。

(系 6) $n \in \mathbb{P}$ とする。 ($n \geq 2$)

(1) n が偶数のとき

$$\text{card } \mathcal{S}_n = \text{Pf}_n \left(\frac{3(j-i)(3i-2)(3j-2)}{(i+j)(i+j-1)(i+j-2)} \begin{pmatrix} i+j \\ 2i-j \end{pmatrix} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

(2) n が奇数のとき

$$\text{card } \mathcal{S}_n = \text{Pf}_{n-1} \left(\frac{3(j-i)(3i+1)(3j+1)}{(i+j)(2i-j+1)(2j-i+1)} \begin{pmatrix} i+j \\ 2i-j \end{pmatrix} \right)_{1 \leq i, j \leq n-1}$$

参考文献

- [An] G.E. Andrews, Plane partition (II): The Weak Macdonald Conjecture
Inventiones math 53, 193-225 (1979)
- [Ca] L. Carlitz, Rectangular arrays and plane partitions
Acta Arithmetica XII (1967), 29-47
- [Mac] I.G. Macdonald, Symmetric Functions and Hall Polynomials
Clarendon Press, Oxford 1979
- [MRR1] W.H. Mills, D.P. Robbins, H. Rumsey, Jr.

Proof of the Macdonald Conjecture

Invent. math. 66, 73-87 (1982)

[MRR2] —, Alternating Sign Matrices and Descending Plane Partitions

J. Combin. Theory Ser. A 34, 340-359 (1983)

[MRR3] —, Self-complementary Totally Symmetric Plane Partitions

J. Combin. Theory Ser. A 42, 277-292 (1986)

[N] 中邨博之, ある型の Young tableaux のなす poset における

ある種の区間を表示する多項式 ("generating function")

について — Jacobi-Trudi の等式の一般化とその応用 —

東大理学部昭和61年度修士論文

[O] 岡田聡一, ある種の平面分割の個数について

東大理学部昭和61年度修士論文

[St1] R. P. Stanley, Theory and Application of Plane

Partitions, I, II, Studies in Applied Mathematics

Vol. L No. 2, 3 (1971)

[St2] —, Symmetries of Plane Partitions

J. Combin. Theory (A) 43, 103-113 (1986)

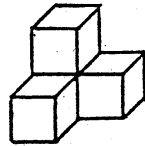
[St3] —, A Baker's Dozen of Conjectures Concerning

Plane Partitions, Lecture Notes in Math. vol. 1234

Springer-Verlag

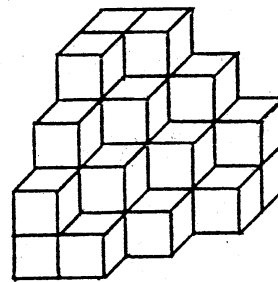
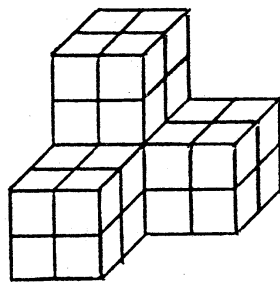
$n = 1$ [1 個]

Totally symmetric $(2,2,2)$ -self-complementary plane partition



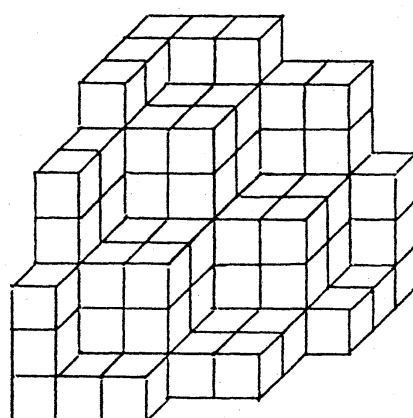
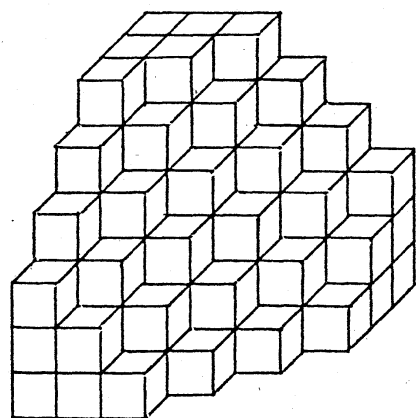
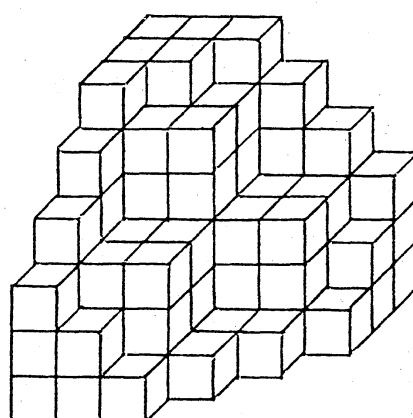
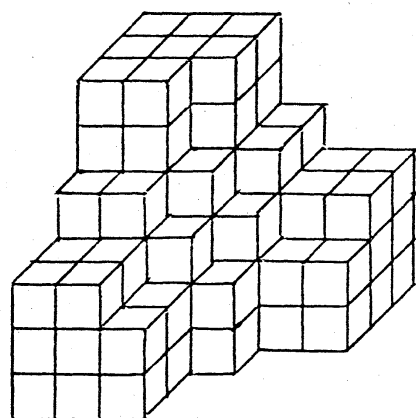
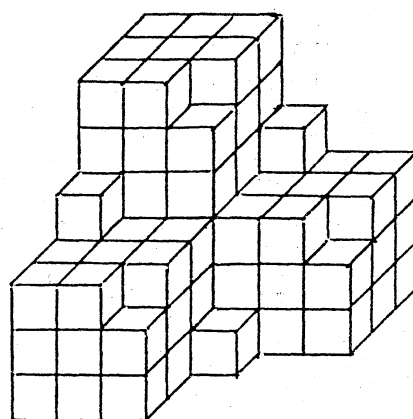
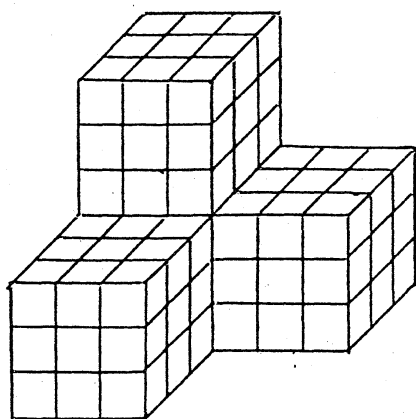
$n = 2$ [2 個]

Totally symmetric $(4,4,4)$ -self-complementary plane partitions

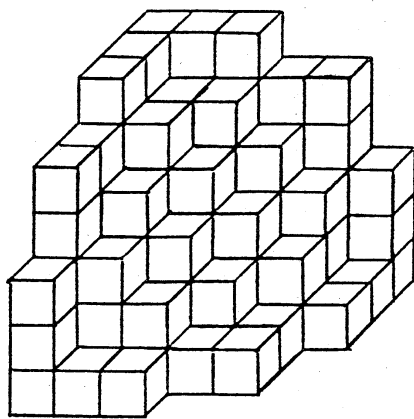


$n = 3$ [7 個]

Totally symmetric (6,6,6)-self-complementary plane partitions

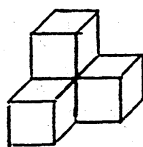


Totally symmetric $(6,6,6)$ -self-complementary plane partitions



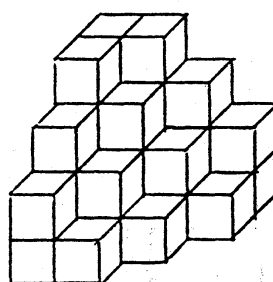
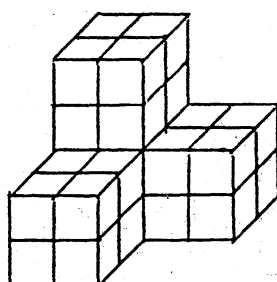
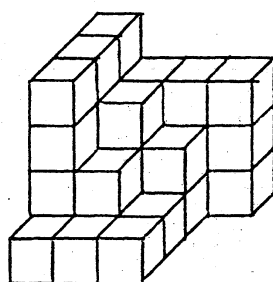
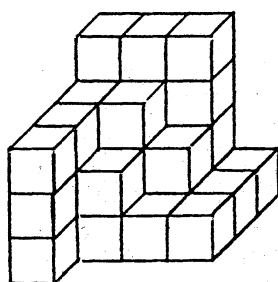
$n = 1$ [1 個]

Cyclically symmetric $(2,2,2)$ -self-complementary plane partition



$n = 2$ [4 個]

Cyclically symmetric $(4,4,4)$ -self-complementary plane partitions



$n = 3$ 【 49 個 】

Cyclically symmetric $(6,6,6)$ -self-complementary plane partitions

