

回転系上の浅水方程式における乱流現象

九大理 荒井正純 (Masazumi Arai)
東大理 山形俊男 (Toshio Yamagata)

1. はじめに

弱い水平発散のある 2 次元流体の乱流現象は、large-scale の地球流体の乱流現象のモデルとして研究されてきている¹⁻³。しかしながら、mesoscale(内部変形半径程度からその 2~3 倍のスケール)の海洋の渦は鉛直スケールが流体層の厚さと同オーダーである(即ち、発散が弱くない)ため、モデル方程式に準地衡流方程式を用いるのは必ずしも適当ではない。この理由から、回転系上の浅水方程式を取り上げる。

系の回転の角速度を Ω 、重力定数を g 、静止状態の層の厚さを H とし、簡単のためこれらは空間的に一定とする。速度を U 、水平スケールを L 、時間を L/U 、自由表面変位を $2\Omega LU/g$ で無次元化した浅水方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\zeta + \varepsilon^{-1}) \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u} + \nabla \left(\varepsilon^{-1} \eta + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) = -\nu \Delta^2 \mathbf{u}, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + s\varepsilon^{-1} \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\eta \mathbf{u}) = 0, \quad (1b)$$

となる。粘性には hyperviscosity を導入した。 ν は粘性係数、 $\mathbf{u}$ は水平面

内の速度ベクトル、 η は自由表面変位（上向き変位を正にとる）、 $\hat{z}$ は鉛直方向の単位ベクトルで、 $\zeta = \nabla \times \mathbf{u} \cdot \hat{z}$ は渦度（相対渦度）である。

$\varepsilon = U/2\Omega L$ はロスビー数、 $s = (L_R/L)^2$ は成層パラメータと呼ばれる無次元パラメータで、 $L_R = \sqrt{gH}/2\Omega$ は変形半径である。付加的なパラメータとして、鉛直スケールと流体層の厚さとの比を与える $\delta = \varepsilon/s$ を導入する。mesoscale 以上の水平スケールの現象を考えることから $\varepsilon \ll 1$ 、 $s \lesssim 1$ と仮定する。鉛直スケールについては層の厚さと同オーダーである場合も考慮して $\delta \lesssim 1$ とすることに注意する。

$s \sim 1$ 、即ち、 $\delta \ll 1$ の場合には浅水方程式は、準地衡流方程式に帰着する。準地衡流方程式は、 (x, y) を座標、 ψ を流線関数とすると、変換 $y \rightarrow -y$, $\psi \rightarrow -\psi$ に対して不変であることから高気圧性渦 ($\psi > 0$) と低気圧性渦 ($\psi < 0$) が対称に時間発展する。そもそもこのような対称性は浅水方程式には存在せず、準地衡流近似から生まれたものである。非粘性の浅水方程式は準地衡流方程式と同様、全エネルギーとポテンシャルエントロフィー（以下単にエントロフィーと呼ぶ）を保存量として持つ。従って地衡流に近い場合には、エネルギーやエントロフィーのカスケード過程に、準地衡流方程式の場合と類似の性質が現れることが期待できる³。高気圧性渦と低気圧性渦の非対称性がカスケード過程にどのような影響を与えるかを明らかにすることは、現実の地球流体への応用の面からも流体力学的関心からも興味深い。

本研究では、 $\delta \sim 1$ 、即ち、発散が必ずしも弱くない場合の乱流現象の統

計的性質を明らかにするため、浅水方程式を用いて乱流場の自由発展の数値実験を行なった。

2. 計算方法

長さ 2π の正方形の box に 2 重周期境界条件を適用する。(1a)、(1b) 式を複素フーリエモードで表した式を擬スペクトル法で解く³。各方向のグリッド数 N は 256 とし、フーリエ展開は波数 $[N/3]$ で切断して aliasing error を除去した。時間積分は leap-frog/Crank-Nicolson scheme により行なった。

初期値はほとんど地衡流バランスしていることを仮定する。波数 $\mathbf{k}$ の流線関数のフーリエモード $\tilde{\psi}_{\mathbf{k}}$ は

$$\tilde{\psi}_{\mathbf{k}} \propto \exp \left[- \left(\frac{k-4}{0.6} \right)^2 \right] \quad (2)$$

で与え、変位、速度ポテンシャルはバランス方程式を用いて求めた。

パラメータは、ケース I: $\delta = 3.7$, $s = 0.0625$, $\varepsilon = 0.23$ 、ケース II: $\delta = 4.5$, $s = 0.007$, $\varepsilon = 0.032$ 、ケース III: $\delta = 0.37$, $s = 0.0625$, $\varepsilon = 0.023$ の 3 ケースについて行なった。ケース I、II は変位が有限振幅であるが、ケース III は微小振幅で準地衡流方程式が成立するパラメータ領域に当たる。ケース I、III は渦の水平スケールが L_R 程度、ケース II は $3L_R$ 程度である。ケース I はロスビー数がそれほど小さくない。すべてのケースについて $\nu = 3.8 \times 10^{-8}$ とした。これらの初期値から、外力を加えず、エンストロフィー散逸率が最大に達する以降まで時間積分を行なった。

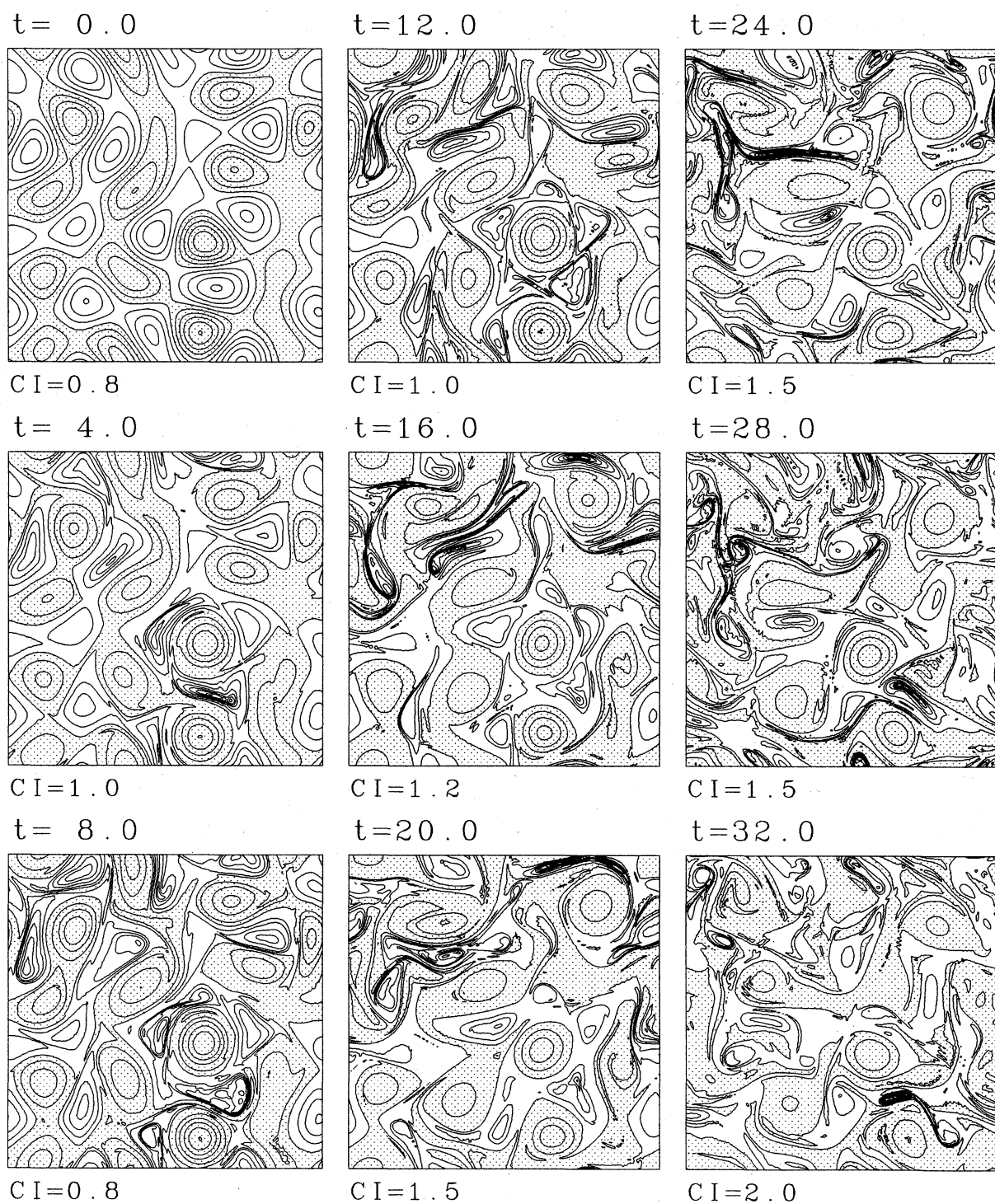


図 1: ケース I の渦度場の時間発展。影の領域は負値に対応する。CI は等値線の間隔である。

3. 渦度場の時間発展

図1は、ケースIの渦度場の時間発展を示す。初期 ($t \lesssim 10$) には低気圧性渦（正の渦度を持つ渦）は stretching を受けて、小スケールの強渦度の構造をとる。高気圧性渦には渦強度の増大は見られない。いずれにしろこの時期は複雑なパターンを示さない。その後 ($t \gtrsim 13$)、渦強度の増大した低気圧性渦は更に強い stretching を受けて、非常に細長く等渦度線が伸ばされる ($t = 20$ における box の右上や、 $t = 24$ における box の左中央)。細く引き伸ばされた低気圧性渦は分裂することもあるが、すみやかに rolling-up を起こして large-scale の構造に戻る (box 左中央における $t = 24$ から $t = 28$)。この過程はしばしば繰り返されるが、大きなエンストロフィー散逸を伴うので、渦強度の減少した後期には stretching を受けにくくなる。高気圧性渦にはこの乱流活動の active な時期においても、stretching による渦強度の増大は顕著に見られない。

ケースIIでもケースIに良く似た特徴が現れる。それに対してケースIIIでは高気圧性渦と低気圧性渦の発展に顕著な差異は見られない。

4. 統計的諸量

図2は、空間平均した運動エネルギー K 、ポテンシャルエネルギー P 、全エネルギー E の時間依存性を示す。(a) はケースI、(b) はケースIIの結果である。ケースIでは、初期 ($t \lesssim 10$) には低気圧性渦が強い stretching を受ける結果、全体としては P から K へのエネルギー変換が起こり、 K は P を

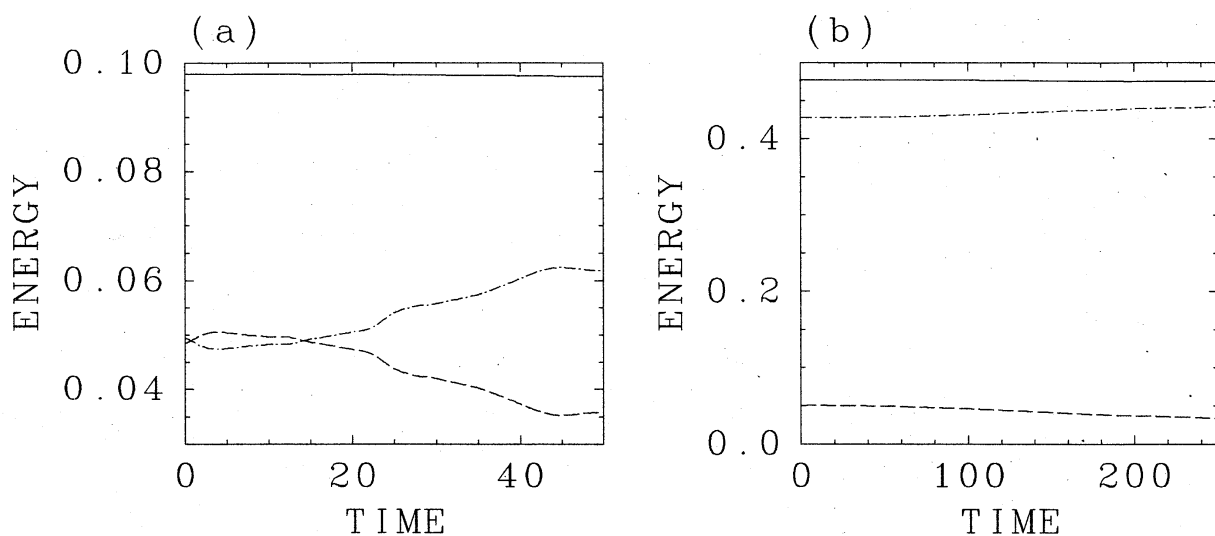


図 2: 運動エネルギー (破線)、ポテンシャルエネルギー (一点鎖線)、全エネルギー (実線) の時間依存性。(a) はケース I、(b) はケース II。

やや上回る。その後の active な時期には、エネルギーの逆カスケードに伴い $K \rightarrow P$ のエネルギー移行が起きるため、 P は増加、 K は減少する。ただし、低気圧性渦については stretching のためこのエネルギー移行は起きず、逆カスケードは抑制される。一方、ケース III では、初期の $P \rightarrow K$ の変換は起きず、単調に P は増加 (K は減少) する。ケース I、III に比べてケース II では時間発展が大きく slowdown している。時間積分の終了時 $t = 250$ においても stretching は活発に起こっている (図 4(b))。 K から P へのエネルギー移行はケース I に比べて非常に少ないが、それでも K の散逸に比べたらはるかに多い (K の全減少率に占める $K \rightarrow P$ の変換率は 86.5%)。このカスケードの slowdown は $L > L_R$ の場合の特徴で、準地衡流方程式においても見られる¹⁻³。全エネルギーは $t = 50$ においても、ケース I で初期値の 0.4%、ケース III で 0.3% しか減少していない。このことは非粘性の極限で

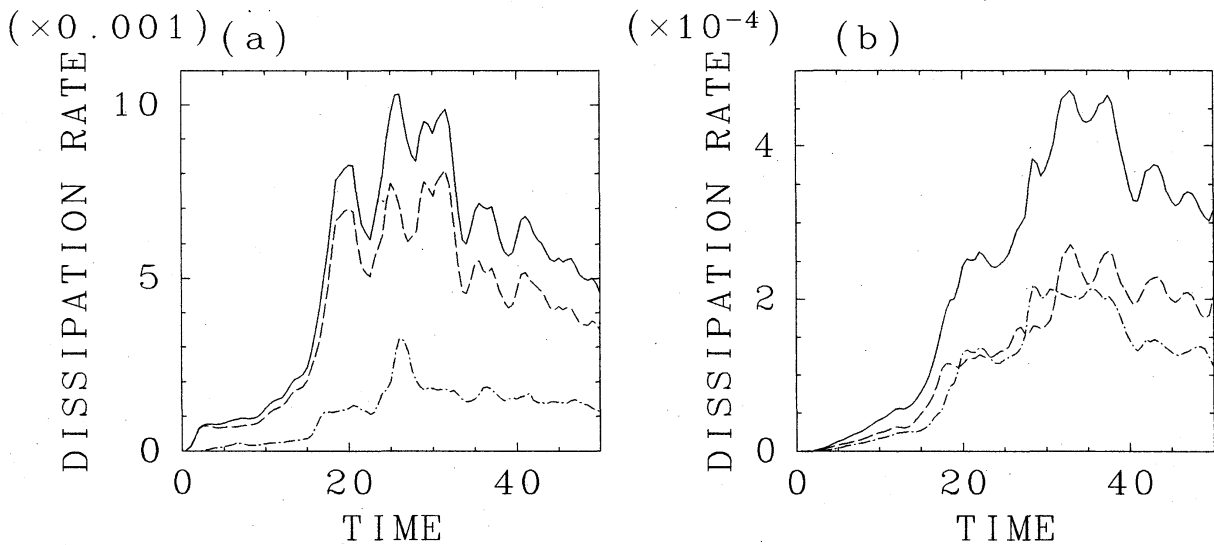


図 3: 高気圧性渦の領域上 (一点鎖線)、低気圧性渦の領域上 (破線) で積分したエントロフィー散逸率の時間依存性。実線は全散逸率を示す。(a) はケース I、(b) はケース III。

全エネルギーが保存することを示唆する。

図 3 は、高気圧性渦 ($\eta > 0$) の領域上、低気圧性渦 ($\eta < 0$) の領域上で別々に積分したエントロフィー散逸率の時間依存性を示す。(a) はケース I、(b) はケース III の結果である。ケース I では低気圧性渦の方がはるかに散逸率が高い。低気圧性渦の散逸率が全散逸率に占める割合は、ケース I では 78%、ケース II では 91% である。それに対して、ケース III では 55% で高気圧性渦の散逸率にほぼ等しい。ケース I の全散逸率はケース III の 22 倍もある。ケース I、II で起こる低気圧性渦の stretching は高波数方向のエントロフィー移送をかなり増大させることがわかる。ケース I では $t = 50$ において初期値の 7.5% までエントロフィーは減少しており、エントロフィーの selective decay が起こっている。

以上見てきたように、 $\delta \sim 1$ の場合 (ケース I、II)、高気圧性渦と低気圧

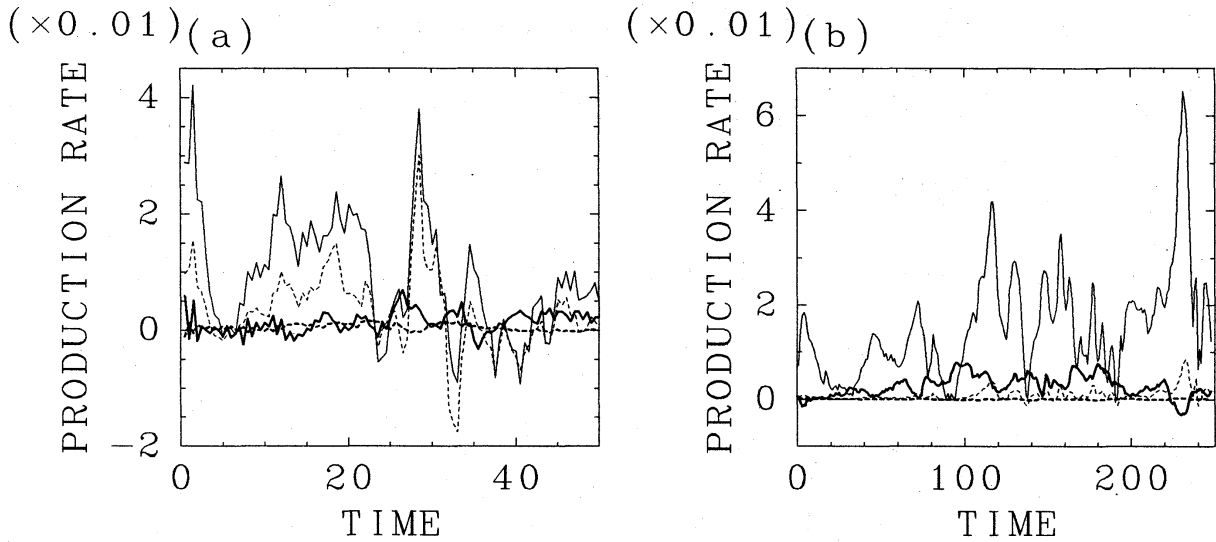


図 4: 高気圧性渦の領域上 (太線)、低気圧性渦の領域上 (細線) で積分した 2 乗渦度生成率の時間依存性。実線は惑星渦度、点線は相対渦度の stretching による寄与。(a) はケース I、(b) はケース II。

性渦では渦度の stretching を受ける程度が大きく異なる。この点をもう少し定量的に見てみる。stretching による 2 乗渦度の生成率は、惑星渦度の stretching による寄与 S_p と相対渦度の stretching による寄与 S_r からなる。

$$S_p = -\varepsilon^{-1} \int \zeta \nabla \cdot \mathbf{u} dx dy, \quad (3a)$$

$$S_r = - \int \frac{1}{2} \zeta^2 \nabla \cdot \mathbf{u} dx dy. \quad (3b)$$

発散 $\nabla \cdot \mathbf{u}$ は (1b) 式より

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{\delta}{1 + \delta\eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \eta \right) \quad (4)$$

と書ける。高気圧性渦 ($\eta > 0$) では $1 + \delta\eta \sim O(1)$ 、低気圧性渦 ($\eta < 0$) では $1 + \delta\eta \ll 1$ であるから低気圧性渦の方が渦度の stretching をはるかに強く受けるはずである。このことを確かめるため、高気圧性渦の領域上で積分したものと低気圧性渦の領域上で積分したものを比較してみた。ケー

ス I、II について、その時間依存性を図 4 に示す。ケース I では、低気圧性渦については、初期 $t \lesssim 4$ と active な時期（特に $7 \lesssim t \lesssim 31$ ）に $S_p, S_r > 0$ であり、2 乗渦度の生成が強く起こっていることがわかる。 $23 \lesssim t \lesssim 25$ には $S_p, S_r < 0$ となるが、これは、図 1 で見たように、伸長した低気圧性渦が rolling-up を起こす時期に当たる。高気圧性渦についても active な時期には $S_p, S_r > 0$ であるがその強度は低気圧性渦よりはるかに小さい。total の $S_p + S_r$ に占める高気圧性渦の $S_p + S_r$ の割合は 12.5% である。ケース II では一貫して $S_p > 0$ であり、 $L > L_R$ であるため高気圧性渦の S_p もやや大きく、total の S_p に占める高気圧性渦の S_p の割合は 15% である。ケース I との大きな違いは S_r の寄与で、ケース II では ε が十分小さいことを反映して S_r はかなり小さく、全生成率 $S_p + S_r$ の 4.7% にすぎない（ケース I では 24%）。

5. まとめと議論

浅水方程式を用いて、ほとんど地衡流からなる乱流場の自由発展の数値実験を行い、エンストロフィー散逸率が最大に達するまでの間の統計的性質を調べた。自由表面変位が有限振幅の場合、低気圧性渦は選択的に渦度の強い stretching を受けて、等渦度線が非常に細長く引き延ばされる。stretching は、 L_R に比べて十分小さいスケールでは効かないので、3 次元乱流の場合のようなエネルギーの順カスケードは起きないが、運動エネルギーからポテンシャルエネルギーへのエネルギー変換を妨げるため、エネルギーの逆カスケードを抑制する。高気圧性渦には強い stretching が起きないので、自

由表面変位が微小振幅の場合と同様の発展をたどる。これは、有限振幅の低気圧性渦の流体層の厚さが高気圧性渦に比べて非常に薄いことによるもので、低気圧性渦の場合、わずかな変位の減少が大きな負の水平発散をもたらす（(4) 式）ことが原因である。

2乗渦度の伝達関数と2乗渦度の生成率スペクトルを調べると、 $k \gg \sqrt{s}^{-1}$ の高波数領域では生成率はほぼ0であることがわかる。この領域では2乗渦度の高波数方向の伝達と散逸がバランスすることから、2乗渦度のスペクトルは、非発散の2次元流体と同様の構造を持つことが期待できる¹。ただし、低気圧性渦からの2乗渦度の移送の方が高気圧性渦よりはるかに多いから、高気圧性渦のスペクトルと低気圧性渦のスペクトルを分離して見た場合には、その強度は低気圧性渦の方がはるかに強いはずである。

以上のような高気圧性渦と低気圧性渦の非対称性は、準地衡流方程式における乱流現象では見られない大きな特徴である。

参考文献

- ¹ S. Yanase and M. Yamada, J. Phys. Soc. Jpn. **53**, 2513 (1984).
- ² V. Larichev and J. McWilliams, Phys. Fluids **A3**, 938 (1991).
- ³ M. Farge and R. Sadourny, J. Fluid Mech. **206**, 433 (1989).