

Serre's p -adic Eisenstein Series

近畿大学・理工・長岡昇勇

Serre は p 進 modular 形式の例として p 進 Eisenstein 級数を構成し、その Fourier 係数（とくにその定数項）に p 進 L -関数が現われることを指摘し、さらに Hilbert modular 群に対する Eisenstein 級数を考察することにより、総実体上の p 進 ζ -関数を構成した。この小文では p 進 Eisenstein 級数に関する Serre のある公式が一般の Siegel modular 群の場合に拡張されることを示す。興味深い点は、ある場合にそれが“現実の” modular 形式となる場合があることである。

1 p 進 Eisenstein 級数

$\Gamma^{(n)} := \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$ を n 次の Siegel modular 群とし、 $E_k^{(n)}$ で次数 n weight k の正規化された Eisenstein 級数を表すものとする（ただし $k > n+1$ ）。さらにここではこれを定数倍したもの

$$G_k^{(n)} := -\frac{B_k}{2k} E_k^{(n)}$$

を考える。ここで B_k は k 番目の Bernoulli 数。

ここで次の様な自然数列 $\{k_m\}$ を考える。まず $k \geq 1$ を自然数とし、この k に対して次の様な素数 p をとる。

$$p > 2k, \quad \begin{cases} p \equiv 1 \pmod{4} & \text{if } k : \text{even} \\ p \equiv 3 \pmod{4} & \text{if } k : \text{odd.} \end{cases}$$

この様な条件を満たす整数の組 (k, p) に対して

$$k_m := k + \frac{p-1}{2} p^{m-1}$$

で定義される数列 $\{k_m\}$ を考える。この数列 $\{k_m\}$ は Serre の p 進 weight の空間

$$X := \varprojlim_m \mathbb{Z}/p^{m-1}(p-1)\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$$

(ただし $\mathbb{Z}_p$ は p 進整数環) 内に極限をもつ:

$$k_m \longrightarrow \mathbf{k} = \left(k, \frac{p+2k-1}{2}\right) \in X.$$

主定理. 数列 $\{k_m\}$ を上の様にとる. すると Eisenstein 級数の列 $\{G_{k_m}^{(n)}\}$ は形式的巾級数環 $\mathbb{Q}[[q^T]] = \mathbb{Q}[q_{ij}, q_{ij}^{-1}][[q_1, \dots, q_n]]$ の中に極限

$$\lim_{m \rightarrow \infty} G_{k_m}^{(n)} =: \tilde{G}_{\mathbf{k}}^{(n)} = \tilde{G}_{(k, \frac{p+2k-1}{2})}^{(n)}$$

をもち, 具体的には次の様に表示される:

$$\tilde{G}_{(k, \frac{p+2k-1}{2})}^{(n)} = \frac{1}{2} L_p\left(1-k; \omega^{k+\frac{p-1}{2}}\right) + \sum_{\substack{0 \leq T \in \Lambda_n \\ 1 \leq \text{rank } T \leq 2k}} \tilde{b}(T) q^T,$$

ここで係数 $\tilde{b}(T)$ は $r := \text{rank } T \geq 2$ が even のとき

$$2^{\frac{r-2}{2}} \cdot \frac{L_p\left(1-k+\frac{r}{2}; \eta_{T_1} \omega^{k+\frac{p-1-r}{2}}\right)}{L_p(1-2k+r; \omega^{2k-r})} \cdot \frac{\prod_{\substack{l: \text{prime} \\ l|(d(T_1)/D(T_1))}} g_l^{(r)}\left(T_1; \left(\frac{l}{p}\right) l^{k-r}\right)}{\prod_{i=1}^{\frac{r-2}{2}} L_p(1-2k+2i; \omega^{2k-2i})}$$

$r := \text{rank } T \geq 1$ が odd のとき

$$2^{\frac{r-1}{2}} \cdot \frac{\prod_{\substack{l: \text{prime} \\ l|d(T_1)}} g_l^{(r)}\left(T_1; \left(\frac{l}{p}\right) l^{k-r}\right)}{\prod_{i=1}^{\frac{r-1}{2}} L_p(1-2k+2i; \omega^{2k-2i})}$$

と書ける. 式に現われる記号は以下の通りである.

- $L_p(s; \chi)$: Kubota-Leopoldt p 進 L -関数.
- Λ_n : n 次半整対称行列全体の集合.
- $T_1 \rightarrow 0 \leq T \in \Lambda_n$ が rank r のとき $T[U] = {}^tUTU = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
 $U \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$, $0 < T_1 \in \Lambda_n$ と表したものの.

- $d(T)$ は $0 < T \in \Lambda_n$ に対して

$$d(T) := \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \det(2T) & \text{if } n \text{ is even} \\ \frac{1}{2} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \det(2T) & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}$$

と定義されるもの.

- $\eta_T(*)$ は $(\frac{d(T)}{*})$ を induce する様な原始指標.
- $D(T) = (-1)^{\frac{n}{2}} \times (\eta_T \text{ の conductor}).$
- ω : the Teichmüller character.
- $g_l^{(n)}(T; X) \in \mathbb{Z}[X]$: the modified Katsurada-Kitaoka 多項式.

2 “true” modular 形式

我々の式の興味深い点は、我々の極限

$$\tilde{G}_{\mathbf{k}}^{(n)} = \tilde{G}_{(k, \frac{p+2k-1}{2})}^{(n)}$$

が時々“現実の” modular 形式となることである.

例 1. $n = 1$ のとき

$$\tilde{G}_{(k, \frac{p+2k-1}{2})}^{(1)} = -\frac{B_{k, (\frac{*}{p})}}{2k} + \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{0 < d|t} \left(\frac{d}{p}\right) d^{k-1} q^T$$

($B_{k, (\frac{*}{p})}$ は一般化された Bernoulli 数) となり、良く知られている様に合同部分群 $\Gamma_0^{(1)}(p)$ に関する指標 $(\frac{*}{p})$ を持つ weight k の modular 形式となる:

$$\tilde{G}_{(k, \frac{p+2k-1}{2})}^{(1)} \in M_k\left(\Gamma_0^{(1)}(p), \left(\frac{*}{p}\right)\right).$$

特に $p > 3$, $k = 1$ なる条件を付加すれば、我々の研究のモチーフである Serre の式

$$\tilde{G}_{(1, \frac{p+1}{2})}^{(1)} = \frac{1}{2} h(-p) + \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{0 < d|t} \left(\frac{d}{p}\right) q^T$$

が得られる. ここで $h(-p)$ は虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ の類数を表す.

この Serre の式に少し remark を与えよう.

$\{S_1, \dots, S_{h(-p)}\} \subset \text{Sym}_2(\mathbb{Q})$ を判定式 $= -p$ なる 2 元 2 次形式の代表系を表すものとし, これらに対して $\mathbb{H}_n$ 上の theta 級数 $\Theta_{S_i}^{(n)}$ を対応させる. すると Serre の公式は

$$\tilde{G}_{(1, \frac{p+1}{2})}^{(1)} = \frac{1}{2} h(-p) + \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{0 < d|t} \left(\frac{d}{p}\right) q^T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{h(-p)} \Theta_{S_i}^{(1)}$$

と書ける. 右辺は genus theta 級数である.

例 2. $k=1$ とし, n は任意とする. 主定理は

$$\tilde{G}_{(1, \frac{p+1}{2})}^{(n)} = -\frac{1}{2} B_{1, (\frac{*}{p})} + \sum_{0 \leq T \in \Lambda_n^{(1)}} \sum_{0 < d|\varepsilon(T)} \left(\frac{d}{p}\right) q^T + 2 \sum_{\substack{0 \leq T \in \Lambda_n^{(2)} \\ D(T_1) = -p}} \sum_{0 < d|\varepsilon(T)} \left(\frac{d}{p}\right) q^T$$

を主張する. ここで $\Lambda_n^{(r)}$ は rank r なる Λ_n の元の集合, $\varepsilon(T)$ は T の成分の最大公約数を表す.

さらに, ここで $p > 3$ の条件を付加すれば, Serre の式と同様に上式で

$$\text{定数項} = \frac{1}{2} h(-p)$$

となる. そこで Hirzebruch-Zagier の結果 [1] を使えば

$$\tilde{G}_{(1, \frac{p+1}{2})}^{(n)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{h(-p)} \Theta_{S_i}^{(n)}$$

がわかり, これは

$$\tilde{G}_{(1, \frac{p+1}{2})}^{(n)} \in M_1\left(\Gamma_0^{(n)}(p), \left(\frac{*}{p}\right)\right)$$

をも示し, Serre の式の拡張を与えていることになる.

3 問題

2 節の結果より次の様な問題が考えられる.

問題. $\tilde{G}_{(k, \frac{p+2k-1}{2})}^{(n)}$ が “現実の” modular 形式になるのはどんな場合か？
より厳密には, どんな場合に

$$\tilde{G}_{(k, \frac{p+2k-1}{2})}^{(n)} \in M_k\left(\Gamma_0^{(n)}(p), \left(\frac{*}{p}\right)\right)$$

となるか？

もちろん, 2 節の結果は

$$(k, n) = (k, 1) \quad \text{または} \quad (1, n) \quad \text{のとき}$$

は正しいことを示している.

参考文献

- [1] F. Hirzebruch and D. Zagier: Intersection numbers of Hilbert modular surfaces and modular forms of Nebentypus. *Inventiones Math.* **36**(1976), 57–113
- [2] S. Nagaoka: A remark on Serre’s example of p -adic Eisenstein series. to appear in *Math. Z.*
- [3] J. -P. Serre: Formes modulaires et fonctions zêta p -adiques. *Modular functions of one variables III*, L. N. M., **350**, Springer Verlag, 1973