

A classification of periodic maps on 2-manifolds.

上智大 理工 横山 和夫

§ 0. Introduction

問題 多様体 M に period n の periodic map はいくつあるか？

この基本的な問題を 2次元多様体について考えようというのが目的である。その一つの方法についてこの節では概要を述べておく。その前にいくつかの定義もしておこう。

定義 1 X を位相空間とした時、同相写像 $f : X \rightarrow X$ が period n の periodic map (略して period n map ということにする。) とは $f^n = \text{id}$ かつ $f^k \neq \text{id}$ ($1 \leq k < n$) をみたすときという。

定義 2 X, Y を位相空間, $f : X \rightarrow X$ を period n map $g : Y \rightarrow Y$ を period n map とするとき, 次の条件をみたす同相写像 $h : X \rightarrow Y$ が存在するとき, f と g は同値 (equivalent) という。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow h & \circlearrowleft & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

以下, X を 2次元多様体 (connected compact) とする。また X から X への period n map を X 上の period n map という。

今, f が X 上の period n map のとき $S_k(f) = \{x \in X \mid f^k(x) = x \text{ かつ } f^i(x) \neq x \ (1 \leq i < k)\}$ とおくとき ($1 \leq k < n$) X が 2次元多様体であるから $S_k(f)$ は $\emptyset$, 0次元または 1次元多様体になる。 $S(f) = \bigcup_{k=1}^{n-1} S_k(f)$ とおく (f の特異点と呼ぶ。) とき, ここでは $\dim S(f) \leq 0$ の場合のみを扱う。(実際は k が n の約数でない時は, $S_k(f) = \emptyset$)

問題をまとめておくと

Problem X を connected compact 2次元多様体としたとき, $\dim S(f) \leq 0$ なる X 上の period n の periodic map は (同値を除いて) いくつあるか? (今後ことわらな限り, 2次元多様体は connected compact, n は period を表わすものとする。)

方法の概要 上のような条件をみたす f が与えられた時, X の f による orbit space $X/f = Y$ はまた 2次元多様体であり, canonical map $p: X \longrightarrow Y$ は $p(S(f)) = S$ が branch set である n -fold cyclic branched covering になっ

ていて, $p: (X - \mathcal{S}(f)) \rightarrow (Y - S)$ は n -fold cyclic covering になっている。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & Y \\ \cup & \searrow p & \cup \\ X - \mathcal{S}(f) & \longrightarrow & Y - S \end{array}$$

そこで $\mathcal{P}_n(Y, S) = \{ f: X \rightarrow X \text{ period } n \text{ map} \mid X/f \cong Y \text{ (同相)} \text{ の canonical projection } p: X \rightarrow Y \text{ の branch set } S \text{ をもつ branched covering} \}$ とおき, その同値類の集合 $\mathcal{P}_n(Y, S)/\sim$ を $\mathcal{O}_n(Y, S)$ と書くとき,

Proposition $\mathcal{O}_n(Y, S)$ は $H_1(Y - S)$ から $\mathbb{Z}_n$ への onto homomorphism 全ての集合 $[H_1(Y - S), \mathbb{Z}_n]$ の A -同値類と一対一の対応をする。

• 証明は [5] に branched covering の基本性質を使えば, [5] と同様に行える。この定理には 2次元の媒体という条件はいらない。詳しくは [] を参照)

定義 3 ω_1, ω_2 を $H_1(Y - S)$ から $\mathbb{Z}_n$ への onto homo. とするとき, 同相写像 $h: Y \rightarrow Y$ (st. $h(S) = S$) が存在して, $h_* = h_*|_{H_1(Y - S)}$ とおくとき, 次の図式が可換るとき, ω_1 と ω_2 は A -同値 という。

$$\begin{array}{ccc} H_1(Y - S) & \xrightarrow{h_*} & H_1(Y - S) \\ \omega_1 \searrow & \circlearrowright & \swarrow \omega_2 \\ & \mathbb{Z}_n & \end{array}$$

2次元多環体においては *homotopy group* の *generating system* は求まっているので, 上の Prop. を使って Problem を解こうというのが目的である。すなわち,

定理 $\mathcal{O}_n(\gamma, \delta)$ の数は決定できる。(§2, §3 の定理 1, 2 参照)

§1. 基本的な計算式 (組み合わせ整数論)

この節では $C(n; l, m) = \left\{ (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \mid \right.$
 $\delta_i, \theta_i \in \mathbb{N}, 0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 \leq \dots \leq \delta_l < n, 1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_m < n$
 $\left. \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_l + \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_m \equiv 0 \pmod{n} \right\} (=D)$ の π
 の個数を計算するのが目的である。(後で使うので)

$f_j(x, y) = 1 + yx^j + y^2x^{2j} + \dots + y^i x^{ij} + \dots$ とおき,
 $F^0(x, y) = \prod_{j=0}^{n-1} f_j(x, y), F^*(x, z) = \prod_{j=1}^{n-1} f_j(x, z),$
 $F(x, y, z) = F^0(x, y) F^*(x, z)$ とおくと, 明らかに
 $F(x, y, z)$ を x, y, z の級数とみた時の $y^l z^m x^{in}$ の係数 $\kappa(i)$
 の和 $\sum_{i=0}^{l+m-1} \kappa(i)$ が求める $C(n; l, m)$ である。そこで,
 $\zeta = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ (1 の原始 n 乗根) とし, $\zeta_1 = \zeta,$
 $\zeta_2 = \zeta^2, \dots, \zeta_i = \zeta^i, \dots, \zeta_n = \zeta^n (=1)$ とおくと,
 $F(x, y, z)$ を x の級数とみた時の x^{in} の係数の和 ($i=0, 1, \dots$)
 は $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(\zeta_i, y, z)$ である。したがって求める $C(n; l, m)$
 $\frac{1}{n} \sum F(\zeta_i, y, z)$ を y と z の級数とみた時の $y^l z^m$ の係数

である。実際に計算すると, $f_j(x, y) = (1 - yx^j)^{-1}$ であるから,
 $(F^0(x, y))^{-1} = \prod_{j=0}^{n-1} (1 - yx^j) = 1 + \sum_{j=1}^n \frac{(1-x^n)(1-x^{n-1}) \cdots (1-x^{n-j+1})}{(1-x)(1-x^2) \cdots (1-x^j)} x^{j(j-1)/2} (-y)^j$
 $(F^*(x, z))^{-1} = \prod_{j=1}^{n-1} (1 - zx^j) = (F^0(x, z))^{-1} / (1 - z)$ となる。した

が, $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ のうちの ζ を 1 の原始 d 乗根 ($\varphi(d)$ がある。 $\varphi(d)$ は Euler 関数) としたとき, d は n の約数だから $d' \in \mathbb{N}$ を $dd' = n$ なる自然数とすれば,

$$\begin{aligned} (F^0(\zeta, y))^{-1} &= 1 + \sum_{j=1}^n \frac{(1-\zeta^n)(1-\zeta^{n-1}) \cdots (1-\zeta^{n-j+1})}{(1-\zeta)(1-\zeta^2) \cdots (1-\zeta^j)} \zeta^{j(j-1)/2} (-y)^j \\ &= \left\{ 1 + \binom{d'}{1} \zeta^{d(d-1)/2} (-y)^d + \cdots + \binom{d'}{k} \zeta^{kd(kd-1)/2} (-y)^{kd} + \cdots + \binom{d'}{d'} \zeta^{n(n-1)/2} (-y)^n \right\} \\ &= \left\{ 1 + \binom{d'}{1} (-y^d) + \binom{d'}{2} (-y^d)^2 + \cdots + \binom{d'}{k} (-y^d)^k + \cdots + \binom{d'}{d'} (-y^d)^{d'} \right\} \\ &= (1 - y^d)^{d'}, \text{ 同様に } (F^*(\zeta, z))^{-1} = (1 - z^d)^{d'} / (1 - z) \text{ 故に,} \\ F(\zeta, y, z) &= (1 - y^d)^{-d'} (1 - z) (1 - z^d)^{-d'} \text{ となる。このうち} \\ y^\ell z^m \text{ の係数は,} \end{aligned}$$

① $\ell \equiv 0 \pmod{d}$ かつ $m \equiv 0 \pmod{d}$ のとき

$$\binom{\frac{\ell}{d} + d' - 1}{d' - 1} \cdot \binom{\frac{m}{d} + d' - 1}{d' - 1}$$

② $\ell \equiv 0 \pmod{d}$ かつ $m-1 \equiv 0 \pmod{d}$ のとき ($m=0$ のときは必要なし)

$$-\binom{\frac{\ell}{d} + d' - 1}{d' - 1} \cdot \binom{\frac{m-1}{d} + d' - 1}{d' - 1}$$

③ その他の時 0

(ここに $\binom{a}{b}$ は a と b の組合せの数を表わす)

したがって $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(\zeta_i, y, z)$ の $y^\ell z^m$ の係数 (i.e. $C(n; \ell, m)$) は次のようにして求められる。

$d_1, d_2, \dots, d_s, d_{s+1} = n$ を, n の 1 以外の約数とし,

d_i' と $d_i d_i' = n$ なる自然数とする。この時, $d_1, d_2, \dots, d_{s+1}$ のうち

◎ $d_{i_1}, d_{i_2}, \dots, d_{i_u}$ が l と m の約数であり,

◎ $d_{j_1}, d_{j_2}, \dots, d_{j_v}$ が l と $(m-1)$ の約数 とするとき,

$$\frac{1}{m} \left\{ \binom{l+n-1}{n-1} \binom{m+n-2}{n-2} + \sum_{k=1}^u \varphi(d_{i_k}) \binom{\frac{l}{d_{i_k}} + d_{i_k}' - 1}{d_{i_k}' - 1} \binom{\frac{m}{d_{i_k}} + d_{i_k}' - 1}{d_{i_k}' - 1} \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^v \varphi(d_{j_k}) \binom{\frac{l}{d_{j_k}} + d_{j_k}' - 1}{d_{j_k}' - 1} \binom{\frac{m-1}{d_{j_k}} + d_{j_k}' - 1}{d_{j_k}' - 1} \right\}.$$

故に $C(n; l, m)$ は上のようにならめられる。

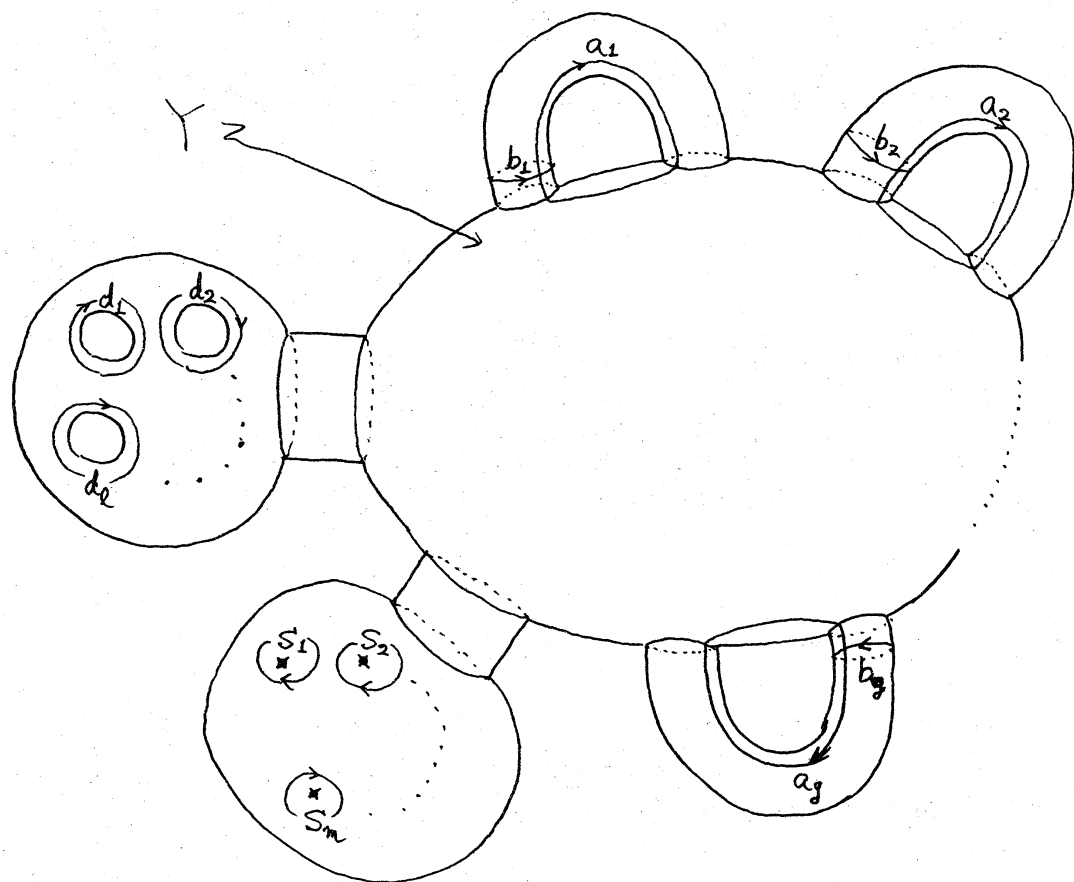
§2. Y が orientable の場合.

§0 のように, $X, f, Y, S(f), S$ を決めたとき, Y が orientable の場合を扱う。

Y を l 個の boundary components $d_1, d_2, \dots, d_l$ をもつ genus g の orientable surface とし, $\dim S \leq 0$ と仮定し, それらの点を $S_1, S_2, \dots, S_m$ とする。 ($l, m, g \geq 0$)

また, Y 上に下の図のように closed curves $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g, d_1, d_2, \dots, d_l, S_1, S_2, \dots, S_m$ (d_i, S_i は境界も, branch points も また Y 上の closed curves も表わす。) をとるに, 上の closed curve を表わす $H_1(Y-S)$ の元も同じ記号を使うことにすれば,

$$H_1(Y-S) = \left\langle \begin{array}{c} a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g \\ d_1, d_2, \dots, d_l, S_1, S_2, \dots, S_m \end{array} \middle| \begin{array}{l} d_1 + d_2 + \dots + d_l \\ + S_1 + S_2 + \dots + S_m = 0 \end{array} \right\rangle$$



さて $\omega : H_1(Y-S) \longrightarrow \mathbb{Z}_n (\subset \mathbb{G}_n)$ (onto homo)
 が与えられた時, $\mathbb{Z}_n$ の生成元 $\tau = (1, 2, \dots, n) (\in \mathbb{G}_n)$
 とするとき $\omega(a_i) = \tau^{\alpha_i}$, $\omega(b_i) = \tau^{\beta_i}$, $\omega(d_j) = \tau^{\delta_j}$,
 $\omega(s_k) = \tau^{\theta_k}$ ($0 \leq \alpha_i, \beta_i, \delta_j < n$, $0 < \theta_k < n$)
 となる時, ω に対して 整数 (mod n) の組

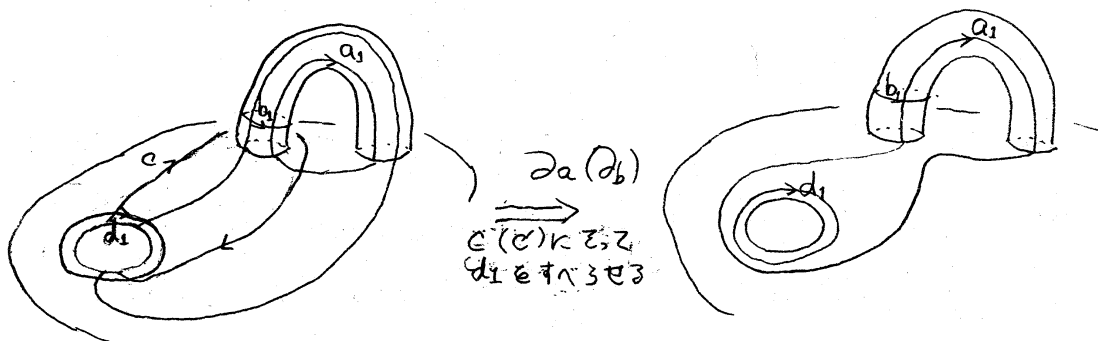
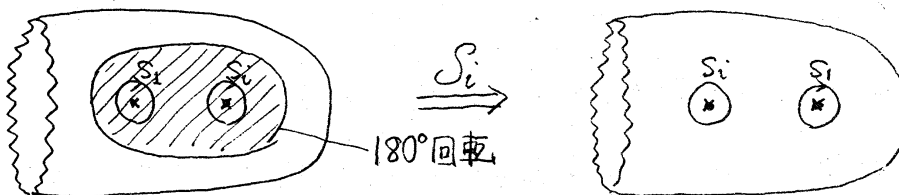
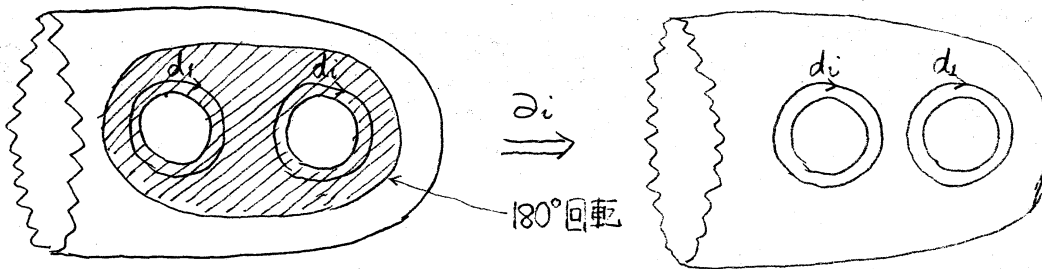
$(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_g, \beta_g, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_e, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$
 で表わすことにする。(逆にこの整数の組が決まれば, ω も一意に決まる。) 明らかに ω が representation である
 必要十分条件は, 整数の組で表わすと

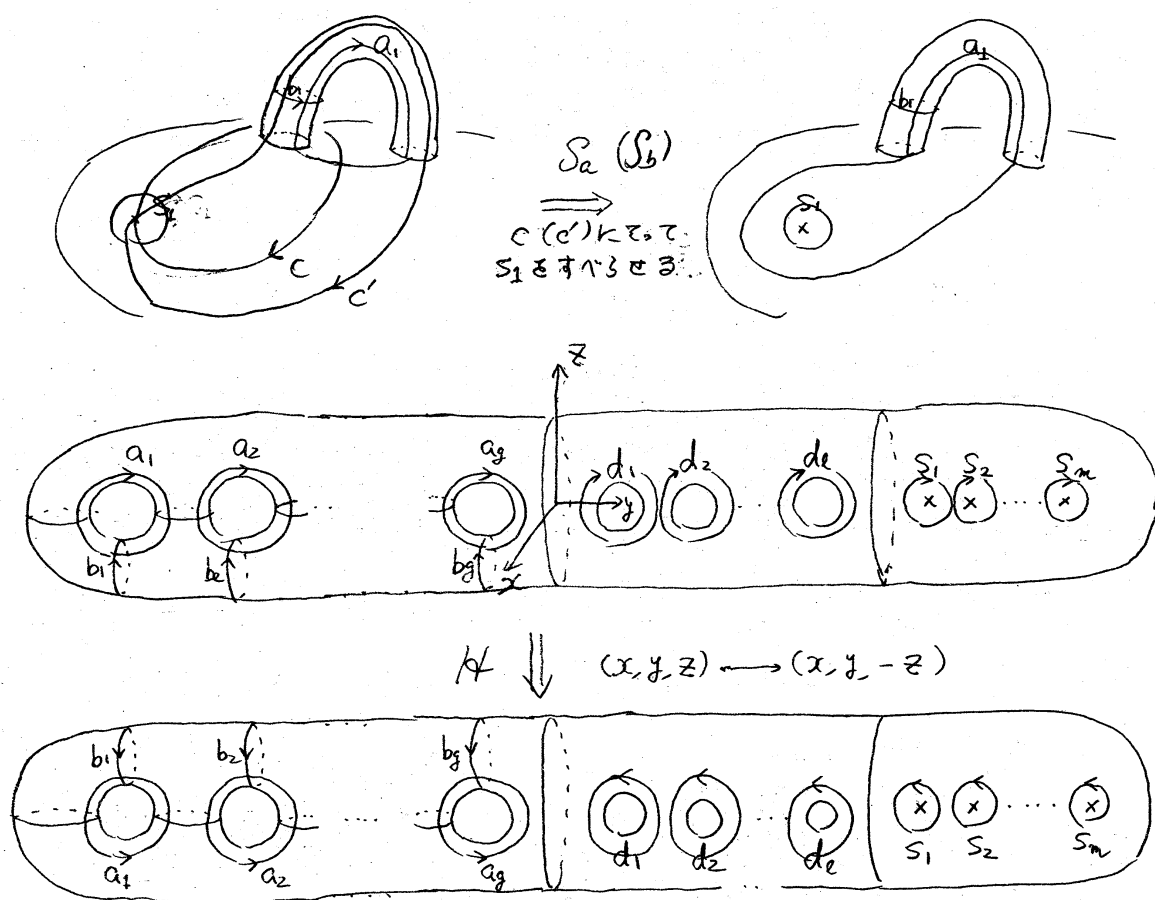
$$\textcircled{*} \dots \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_g + \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_m \equiv 0 \pmod{n}$$

$\textcircled{*} \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_g, \beta_g, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_g, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ の最大公約数が $1 \pmod{n}$ である。 (ω の onto に対応している)

次に $\omega \in [H_1(Y-S), \mathbb{Z}_n]$ の A -同値類を決定しよう。

$Y-S$ の homeotopy group (autohomeomorphism) の generator は求まっている [3][6] が、ここでは Suzuki [6] の記号を使うと、 $\rho, \tau_1, \mu_1, \theta_{12}$ に下の図で表わされる同相写像 $\partial_i, S_i, \partial_a, \partial_b, S_a, S_b, A$ を加えたものがある。 ($\rho, \tau_1, \mu_1, \theta_{12}$, etc. については [6] 参照)





これらに対応して, $\omega \in [H_1(Y-S), \mathbb{Z}_n]$ に対応する整数の組は次のように変化する。

$$S : (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_g, \beta_g, \underline{\delta}, \underline{\theta}) \rightarrow (\alpha_g, \beta_g, \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_{g-1}, \beta_{g-1}, \underline{\delta}, \underline{\theta})$$

$$\tau_1 : (\quad) \rightarrow (\alpha_1 + \beta_1, \beta_2, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_g, \beta_g, \underline{\delta}, \underline{\theta})$$

$$\mu_1 : (\quad) \rightarrow (-\beta_1, \alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_g, \beta_g, \underline{\delta}, \underline{\theta})$$

$$\theta_{12} : (\quad) \rightarrow (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 - \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g, \underline{\delta}, \underline{\theta})$$

$$\partial_i : (\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\delta}, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_i, \dots, \delta_e, \underline{\theta}) \rightarrow (\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\delta}, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_i, \dots, \delta_e, \underline{\theta})$$

$$S_i : (\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\delta}, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, \dots, \theta_m) \rightarrow (\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\delta}, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, \dots, \theta_m)$$

$$\partial_a : (\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_e, \underline{\theta}) \rightarrow (\alpha_1 - \delta_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_e, \underline{\theta})$$

$$\mathcal{J}_a : (\underline{\delta}, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \rightarrow (\alpha_1 - \theta_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g, \underline{\delta}, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$$

$$\mathcal{A} : (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_g, \beta_g, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_e, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$$

$$\rightarrow (-\alpha_1, \beta_1, -\alpha_2, \beta_2, \dots, -\alpha_g, \beta_g, -\delta_1, -\delta_2, \dots, -\delta_e, -\theta_1, -\theta_2, \dots, -\theta_m)$$

これらを使，て作れる $Y-S$ の *autohomeomorphism* で使うもの
の表の 整数 の組も書いておくと，

$$\rho_{12} : (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_g, \beta_g, \underline{\delta}, \underline{\theta}) \rightarrow (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_g, \beta_g, \underline{\delta}, \underline{\theta})$$

$$\rho^{-1} : \rightarrow (\alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_g, \beta_g, \alpha_1, \beta_1, \underline{\delta}, \underline{\theta})$$

$$\tau_1^{-1} : \rightarrow (\alpha_1 - \beta_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_g, \beta_g, \underline{\delta}, \underline{\theta})$$

$$\mu_1^{-1} : \rightarrow (\beta_1, -\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_g, \beta_g, \underline{\delta}, \underline{\theta})$$

$$\theta_{12}^{-1} : \rightarrow (\alpha_1 - \alpha_2, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 + \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g, \underline{\delta}, \underline{\theta})$$

$$\partial_a^{-1} : \rightarrow (\alpha_1 + \delta_1, \beta_1, \dots)$$

$$\mathcal{J}_a^{-1} : \rightarrow (\alpha_1 + \theta_1, \beta_1, \dots)$$

$$\partial_b \doteq \rightarrow (\alpha_1, \beta_1 + \delta_1, \dots)$$

$$\mathcal{J}_b \doteq \rightarrow (\alpha_1, \beta_1 + \theta_1, \dots)$$

したがって $[H_1(Y-S, \mathbb{Z}_n)]$ の A -同値は，これらの有限回の
操作によ，てえられるものとなるが，その代表系は 整数 の
組で書くと次のようになる。

Proposition

$g \geq 1$ のとき

$$\{ (1, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_e, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \mid 0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 \leq \dots \leq \delta_e < n \}$$

$g \equiv 0$ のとき

$$\left\{ (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_e, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \mid \begin{array}{l} \text{① ② ③, } \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_e, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m \text{ の最大公約数が } 1 \pmod{n} \text{ --- ④} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_m < n \text{ --- ②} \\ \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_e \\ + \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_m \equiv 0 \pmod{n} \text{ --- ③} \end{array} \right\}$$

但し $\sim$ は A による同値類を表わす。

(略証) $g \geq 1$ のとき

Step 1 α_1, β_1 について必要な μ_1 を使えば β_1 の絶対値が α_1 の絶対値より小さくしてよい。このとき $\alpha_1 = p_1 \beta_1 + \alpha'_1$ ($0 \leq |\alpha'_1| < |\beta_1|$)

$$(\alpha_1, \beta_1) \xrightarrow[\text{異符号のとき } (-1)^{g-1}]{\alpha_1 \text{ と } \beta_1 \text{ が同符号のとき } 1} (\tilde{\alpha}_1, \beta_1) \xrightarrow{\mu_1} (-\beta_1, \alpha'_1) = (\alpha'_1, \beta_1)$$

とおくと $|\alpha'_1| < |\beta_1|$ である。再び同じ操作をくり返して、これを (α'_2, β'_2) とおく。……すると最後には $(0, \gamma_1)$ となる。

次に α_2, β_2 についても S^{-1} を行ない上と同じ操作をすれば $(0, \gamma_2)$ となる。……すると (g 回行ない最後に S^{-1} とおれば

$$(0, \gamma_1, 0, \gamma_2, \dots, 0, \gamma_g, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_e, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$$

となる。

Step 2 S を使えば $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_g$ のうち絶対値の一番小さいものを γ_1 としてよい。そして $\gamma_i = \delta_i \gamma_1 + \gamma'_i$ ($0 \leq |\gamma'_i| < \gamma_1$)

のとき, $\theta_{12}^{\delta_2} (S_{12} S_{13} S_{12} \theta_{12}^{\delta_3} S_{12} S_{13} S_{12}), \dots, (S_{12} S_{13} S_{12} \theta_{12}^{\delta_g} S_{12} S_{13} S_{12})$ を行なえば

$$(0, \gamma_1, 0, \gamma_2, \dots, 0, \gamma_g) \longrightarrow (0, \gamma_1, 0, \gamma'_2, \dots, 0, \gamma'_g) \text{ となる}$$

り再び, $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_g$ のうち絶対値の一番小さいものを γ'_1 (必ず $\gamma'_1 \neq 0$ であるもの)

要なるは δ と θ (2) にもってきて、上と同じ操作をくり返して $(1) < \dots (0, \bar{\delta}, 0, 0, \dots, 0, 0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ となる。

Step. 3 $\bar{\delta}, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ の最大公約数は 1

だから $\exists z_0, z_1, z_2, \dots, z_l, z'_1, z'_2, \dots, z'_m \in \mathbb{Z}$ st.

$$z_0 \bar{\delta} + z_1 \delta_1 + z_2 \delta_2 + \dots + z_l \delta_l + z'_1 \theta_1 + z'_2 \theta_2 + \dots + z'_m \theta_m \equiv 1$$

$$\bar{\delta} = \tau_1^{-z_0} \tau_a^{-z_1} (\tau_2^{-z_2} \tau_2) (\tau_3^{-z_3} \tau_3) \dots (\tau_l^{-z_l} \tau_l) \tau_a^{-z'_1} (\tau_2^{-z'_2} \tau_2) \dots$$

$\dots (\tau_m^{-z'_m} \tau_m)$ を行なえば

$$(1, \bar{\delta}, 0, 0, \dots, 0, 0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$$

$$\downarrow \mu_1 \tau_1 \mu_2$$

$(\text{mod } n)$ で全て正または 0 にしておく。

$$(1, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, \delta'_1, \delta'_2, \dots, \delta'_l, \theta'_1, \theta'_2, \dots, \theta'_m)$$

$\downarrow \partial_i, \rho_i$ を使って δ_i, θ_i を小さい順に並べる。

$$(1, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, \delta''_1, \delta''_2, \dots, \delta''_l, \theta''_1, \theta''_2, \dots, \theta''_m)$$

したがってあとは $\mathbb{Z}_n$ による同値類だけで、それらが同値類の代表系になる。

この結果を使って $[H_1(Y-S, \mathbb{Z}_n)]$ の同値類の個数、すなわち $\mathcal{P}_n(Y, S)$ の個数は次のようになる。

定理 1 Y が compact connected ^{orientable} surface of genus g with l boundary components のとき $\mathcal{P}_n(Y, S)$ の個数は、 S が m 個の点からなるとき、次の式で求められる。

$$g \geq 1 \text{ のとき } \frac{1}{2} C(n; l, m) + \frac{1}{2} Q(n; l, m) \left(= C^*(n; l, m) \right)$$

とおく

但し $Q(n; l, m)$ は $Q_i(t) = \binom{t+i-1}{i}$ としとき

$$m: \text{even のとき} \quad Q_{\frac{m}{2}}\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right) \times \sum_{i=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]} Q_i\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

$m: \text{odd のとき} \quad n: \text{even} \quad l \geq 1 \text{ のとき}$

$$\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} Q_i\left(\frac{n}{2}-1\right) \times \sum_{i=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]} \left(\left[\frac{l}{2}\right]-i+1\right) Q_i\left(\frac{n}{2}-1\right)$$

$n: \text{odd} \quad \neq \text{すは} \quad l=0 \text{ のとき} \quad 0$

$g=0$ のときは $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_t^{e_t} \quad (e_i > 0)$ 素因数分解と
するとき,

$$\begin{aligned} C^*(n; l, m) &= \sum_{i=1}^t C^*\left(\frac{n}{p_i}; l, m\right) + \sum_{1 \leq i < j \leq t} C^*\left(\frac{n}{p_i p_j}; l, m\right) \\ &\dots + (-1)^v \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_v \leq t} C^*\left(\frac{n}{p_{j_1} p_{j_2} \dots p_{j_v}}; l, m\right) + \dots + (-1)^t C^*\left(\frac{n}{p_1 p_2 \dots p_t}; l, m\right) \end{aligned}$$

(略証) Prop. と §1 を使い, および A による変化しないうち

$$\text{の および} \quad (0, 0, \dots, 0, \hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2, \dots, \hat{\delta}_l, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$$

$$\xrightarrow{A} (0, 0, \dots, 0, -\hat{\delta}_1, -\hat{\delta}_2, \dots, -\hat{\delta}_l, -\theta_1, -\theta_2, \dots, -\theta_m) \equiv (0, 0, \dots, 0, n-\hat{\delta}_1, n-\hat{\delta}_2, \dots, n-\hat{\delta}_l, n-\theta_1, n-\theta_2, \dots, n-\theta_m)$$

$\xrightarrow{\text{ } \delta_i \text{ } \delta_i \text{ と } \theta_i \text{ と } \theta_i \text{ の順に並べると}}$

$$(0, 0, \dots, 0, n-\hat{\delta}_l, \dots, n-\hat{\delta}_2, n-\hat{\delta}_1, n-\theta_m, \dots, n-\theta_2, n-\theta_1) \quad \text{これが}$$

$$(0, 0, \dots, 0, \hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2, \dots, \hat{\delta}_l, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \quad (\text{但し } 1 \leq \hat{\delta}_i) \text{ となる個数}$$

を数えれば, これが $Q(n; l, m)$ となるので, $g \geq 1$ の

ときは ~~すは~~ 成り立つ。 $g=0$ のときはさきに $\delta_1 \delta_2 \dots \delta_l, \theta_1, \theta_2$

$\dots, \theta_m$ の最大公約数が 1 を求めると上の式になる。(Prop.

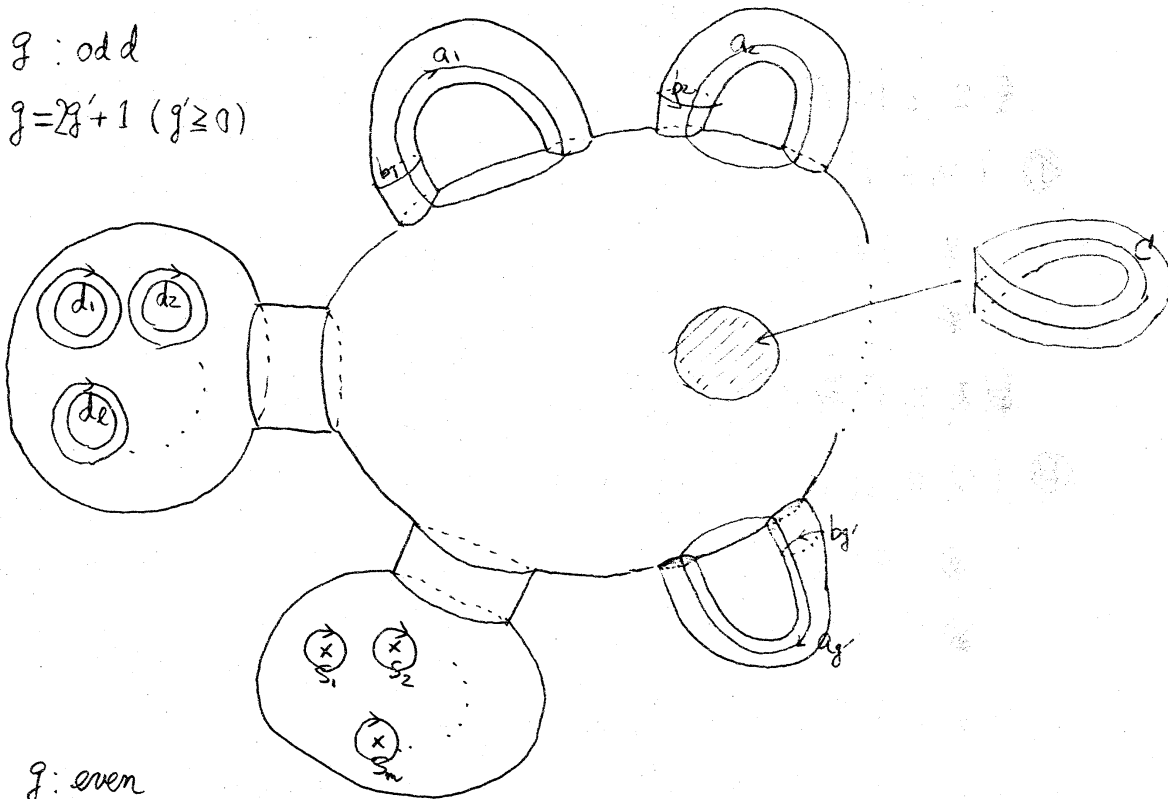
の代表系に対して $\omega \in [H_1(Y-S), \mathbb{Z}_n]$ が存在し, $\mathcal{P}_n(Y, S)$ の
元が存在するのは明らか.)

§ 3. Y が non-orientable の場合

Y を l 個の boundary components $d_1, d_2, \dots, d_l$ をもつ genus g の non-orientable surface, $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\} \subset L$, Y の標準形と下の図のようにとり, § 2 と同様 $a_i, b_i, c_i, c_2, d_i, s_i$ を closed curves にも $H_1(Y-S)$ の元にも記号として使う。

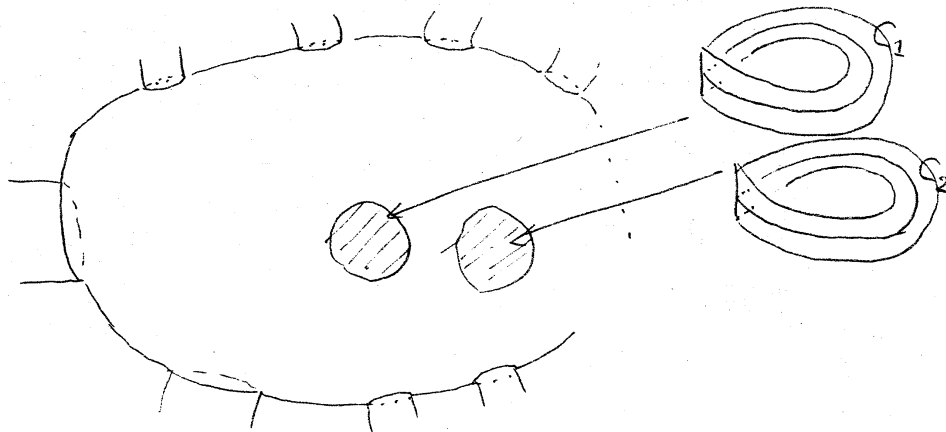
$g: \text{odd}$

$$g = 2g' + 1 \quad (g' \geq 0)$$



$g: \text{even}$

$$g = 2g' + 2 \quad (g' \geq 0)$$



g : odd のとき

$$H_1(Y-S) = \left\langle \begin{array}{c} a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g, C \\ d_1, d_2, \dots, d_\ell, S_1, S_2, \dots, S_m \end{array} \middle| \begin{array}{l} 2C + d_1 + d_2 + \dots + d_\ell \\ + S_1 + S_2 + \dots + S_m = 0 \end{array} \right\rangle$$

g : even のとき

$$H_1(Y-S) = \left\langle \begin{array}{c} a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g, C_1, C_2 \\ d_1, d_2, \dots, d_\ell, S_1, S_2, \dots, S_m \end{array} \middle| \begin{array}{l} 2C_1 + 2C_2 + d_1 + d_2 + \dots \\ + d_\ell + S_1 + S_2 + \dots + S_m = 0 \end{array} \right\rangle$$

§ 2 と同様 $\omega: H_1(Y-S) \longrightarrow \mathbb{Z}_m$ を整数の組

① $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_g, \beta_g, \gamma, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \quad (g: \text{odd})$

⊗ $2\gamma + \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_\ell + \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_m \equiv 0 \pmod{m}$

⊗ $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_g, \beta_g, \gamma, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ の最大公約数は $1 \pmod{m}$ である。

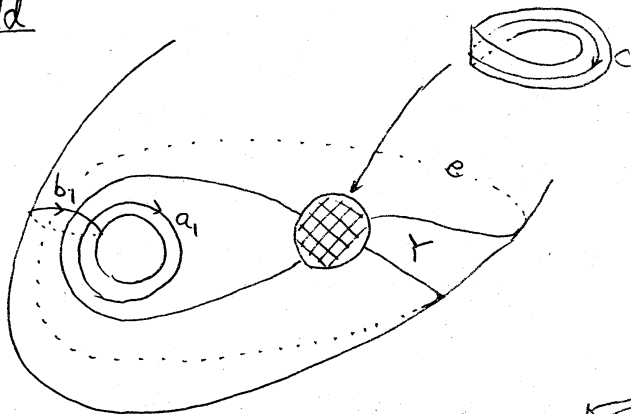
② $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_g, \beta_g, \gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \quad (g: \text{even})$

⊗ $2\gamma_1 + 2\gamma_2 + \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_\ell + \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_m \equiv 0 \pmod{m}$

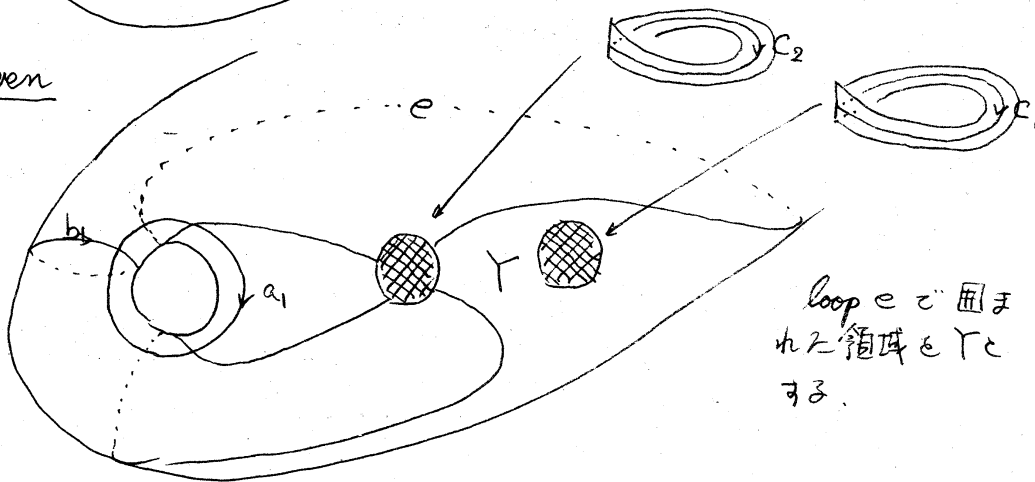
⊗ $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_g, \beta_g, \gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ の最大公約数は $1 \pmod{m}$ である。

をまねすことにしておく。

この時の $Y-S$ の homeotopy group (autohomeomorphism) の generator は § 2 のものにさらに次の写像 γ (g : even のときはさらに ∂_1, ∂_2) を加えたものになる。[2][4] 参照。

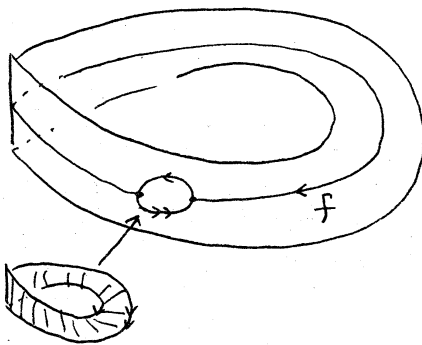
$g: \text{odd}$ 

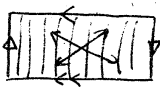
loop e で囲まれた
領域を Y とする.

 $g: \text{even}$ 

loop e で囲ま
れた領域を Y と
する.

このとき Y は 次の図に同相。そこで f に π を一回転



して  対応に

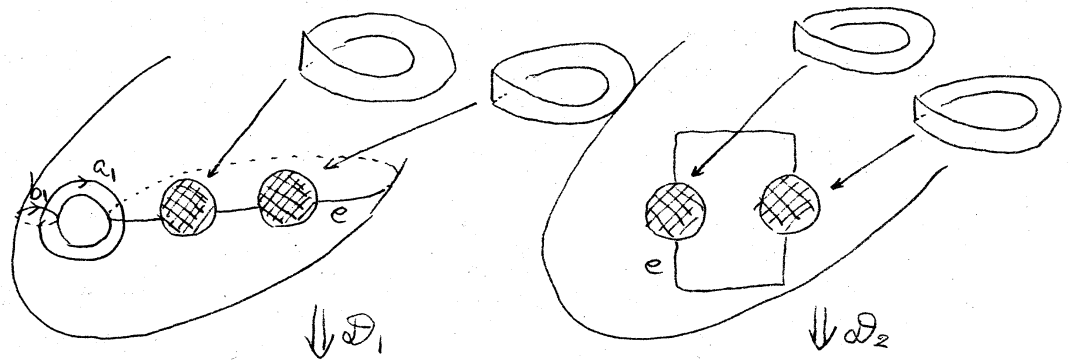
してはりかえたものを

Y -homeomorphism [4]

という。 $Y_0 (g: \text{odd})$

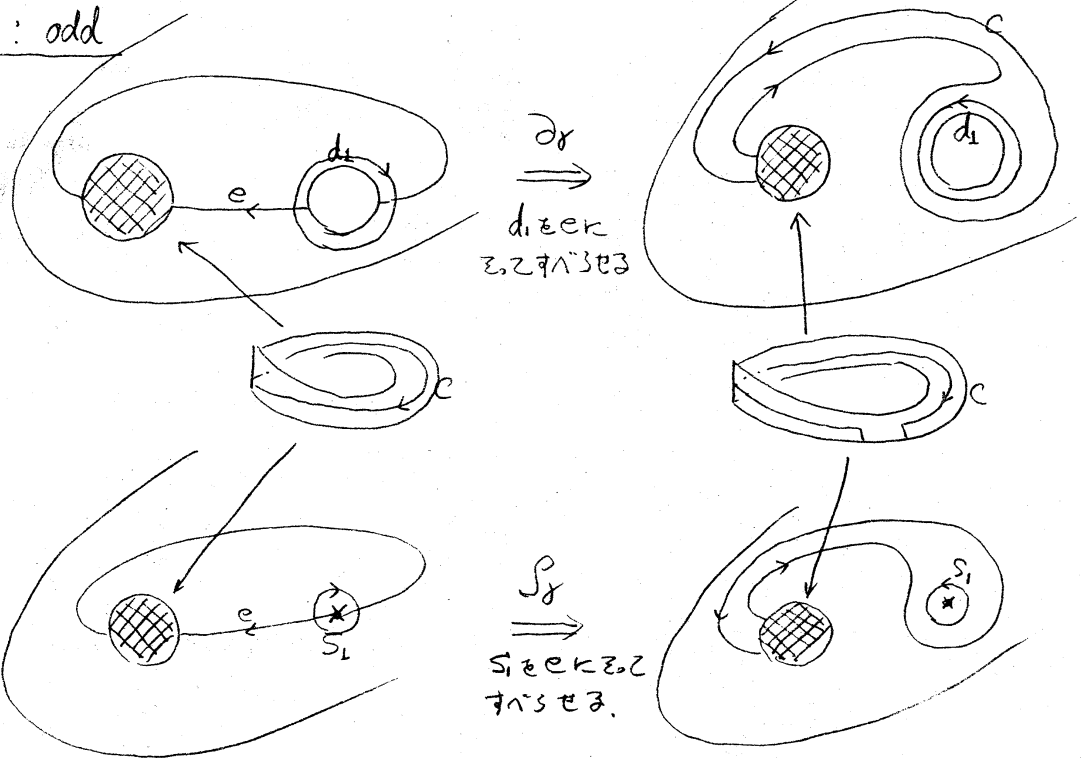
$Y_e (g: \text{even})$ とかく。

さらに $g: \text{even}$ のときは



上の図の e による Dehn's twist を ∂_1, ∂_2 とおく。さらに d_i, s_i に関して §2 のものに

g : odd



g : even のとき

$\partial_1, \partial_2, S_1, S_2$ (上と同様)

これらについて整数の組は次のように変化する。

$$Q_0 : (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_g, \beta_g, \gamma, \underline{\delta}, \underline{\theta}) \rightarrow (\underbrace{-\alpha_1, -\beta_1 - 2\gamma}, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_g, \beta_g, \gamma, \underline{\delta}, \underline{\theta})$$

$$\partial_\gamma : (\alpha, \beta, \gamma, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \underline{\theta}) \rightarrow (\alpha, \beta, \gamma + \delta_1, \underbrace{-\delta_1}, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \underline{\theta})$$

$$\partial_\theta : (\alpha, \beta, \gamma, \underline{\delta}, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \rightarrow (\alpha, \beta, \gamma + \theta_1, \underline{\delta}, \underbrace{-\theta_1}, \theta_2, \dots, \theta_m)$$

$$Q_e : (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_g, \beta_g, \gamma_1, \gamma_2, \underline{\delta}, \underline{\theta}) \rightarrow (\alpha_1 + 2\gamma_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_g, \beta_g, \underbrace{-\gamma_1, 2\gamma_1 + \gamma_2}, \underline{\delta}, \underline{\theta})$$

$$\partial_1 : \rightarrow (\alpha_1 + \beta_1 - \gamma_1 - \gamma_2, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_g, \beta_g, \underbrace{-\beta_1 + 2\gamma_1 + \gamma_2}, \beta_1 - \gamma_1, \underline{\delta}, \underline{\theta})$$

$$\partial_2 : (\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \underline{\delta}, \underline{\theta}) \rightarrow (\alpha, \beta, \underbrace{-\gamma_2}, \gamma_1 + 2\gamma_2, \underline{\delta}, \underline{\theta})$$

$$\partial_{\gamma_1} : (\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \underline{\theta}) \rightarrow (\alpha, \beta, \gamma_1 + \delta_1, \gamma_2, \underbrace{-\delta_1}, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \underline{\theta})$$

$$\partial_{\gamma_2} : (\quad \quad \quad) \rightarrow (\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2 + \delta_1, \underbrace{-\delta_1}, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \underline{\theta})$$

$$\partial_{\theta_1} : (\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \underline{\delta}, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \rightarrow (\alpha, \beta, \gamma_1 + \theta_1, \gamma_2, \underline{\delta}, \underbrace{-\theta_1}, \theta_2, \dots, \theta_m)$$

$$\partial_{\theta_2} : (\quad \quad \quad) \rightarrow (\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2 + \theta_1, \underline{\delta}, \underbrace{-\theta_1}, \theta_2, \dots, \theta_m)$$

これらを使うとき 2 と同様に $[H_1(Y-S), \mathbb{Z}_n]$ の A -同値類
の代表系は次のようになる。

Proposition (g : odd)

① n : odd のとき $g \geq 3$

$$\left\{ (1, 0, 0, \dots, 0, \gamma, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \mid \begin{array}{l} 0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 \leq \dots \leq \delta_\ell \leq \frac{n-1}{2} \quad \text{--- ①} \\ 1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_m \leq \frac{n-1}{2} \quad \text{--- ②} \\ 2\gamma + \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_\ell \\ + \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_m \equiv 0 \pmod{n} \quad \text{--- ③} \end{array} \right.$$

$g=1$

$$\left\{ (\gamma, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \mid \begin{array}{l} \text{① ② ③ と} \\ \gamma, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m, \text{ の} \\ \text{最大公約数} \equiv 1 \pmod{n} \end{array} \right.$$

⑦ n : even のとき $g \geq 3$

$$\left\{ (1, 0, 0, \dots, 0, \gamma, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_e, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \mid \begin{array}{l} 0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 \leq \dots \leq \delta_e < \frac{n}{2} \text{ --- ①} \\ 1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_m < \frac{n}{2} \text{ --- ②} \\ 2\gamma + \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_e + \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_m \equiv 0 \pmod{n} \text{ --- ③} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ (2, 0, 0, \dots, 0, \gamma, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_e, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \mid \begin{array}{l} \text{① ② ③} \\ \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_e, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m \text{ の最大公約数} \\ \gamma: \text{even} \text{ --- ④} \\ \gamma: \text{odd} \text{ --- ⑤} \end{array} \right\}$$

さうして $\exists \delta_i = \frac{n}{2}$ または $\exists \theta_i = \frac{n}{2}$ のときは,

$$\left\{ (1, 0, 0, \dots, 0, \gamma, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_e, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \mid \begin{array}{l} 0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 \leq \dots \leq \delta_e \leq \frac{n}{2} \text{ --- ⑥} \\ 1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_m \leq \frac{n}{2} \text{ --- ⑦} \\ \text{③} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ (2, 0, 0, \dots, 0, \gamma, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_e, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \mid \begin{array}{l} 0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 \leq \dots \leq \delta_e \leq \frac{n}{2} \\ 1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_m \leq \frac{n}{2} \\ \text{③ ④ ⑤} \\ 0 \leq \gamma < \frac{n}{2} \end{array} \right\}$$

$g=1$ のときは

$$\left\{ (\gamma, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_e, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \mid \begin{array}{l} \text{① ② ③} \\ \gamma, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_e, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m \text{ の最大公約数} = 1 \end{array} \right\}$$

$\exists \delta_i = \frac{n}{2}$ または $\exists \theta_i = \frac{n}{2}$ のとき

$$\left\{ (\gamma, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_e, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \mid \begin{array}{l} \text{⑥ ⑦ ③}, 0 \leq \gamma < \frac{n}{2} \\ \gamma, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_e, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m \text{ の最大公約数} = 1 \end{array} \right\}$$

(略証) $g \geq 3$ のとき

まず § 2 と同様にして $(\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g, \gamma, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_e, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \longrightarrow (\alpha, 0, 0, \dots, 0, \gamma, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_e, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ とする。

但し $\alpha = \text{g.c.d.} \{ \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_e, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m \}$ である。

その時 $\exists x, y \in \mathbb{Z} \quad x\alpha + y\gamma \equiv 1 \pmod{n}$ をとておく。

n : odd のときは $\exists k \in \mathbb{N}; 2k \equiv 1 \pmod{n}$ また $\exists k \in \mathbb{N};$

$2k \equiv -1 \pmod{n}$ である。 $(\alpha, 0, \gamma)$ について, $(\tau^2 g_0)^k$ を

行なうと $(\alpha, 2\delta\gamma, \gamma) \equiv (\alpha, \pm\gamma, \gamma)$ になるので, この
操作を $|y|$ 回行なうと $(\alpha, 0, \gamma) \rightarrow (\alpha, y\gamma, \gamma)$ さうに

$(u^3 \tau_i^{-x} u_i)$ と行なうと $(\alpha, y\gamma + x\beta, \gamma) \equiv (\alpha, 1, \gamma)$ に
なるので $\xrightarrow{\tau_i^{-\alpha}} (0, 1, \gamma)$ になる. しなかつてもかく
 $(1, 0, 0, \dots, 0, \gamma, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ になる.

$n: \text{even}$ のとき $\alpha: \text{even}, \gamma: \text{odd}$ のときは $y \equiv 0 \pmod{2}$
だから $y' = \frac{y}{2}$ とおいて同様に $(1, 0, 0, \dots, 0, \gamma, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$
になる. $\alpha: \text{even}, \gamma: \text{odd}$ のときは $2x\alpha + 2y\gamma \equiv 2 \pmod{2}$ を
使えば同様にして $(2, 0, 0, \dots, 0, \gamma, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$
になる. あとは $\partial_r, \beta_r, \partial_i, \beta_i$ を使えば求められる.

$g=1$ のときも同様である.

Proposition ($g: \text{even}$)

① $g \geq 4, n: \text{odd}$ のとき

$$\left\{ (1, 0, 0, \dots, 0, \underline{0}, \underline{\gamma_2}, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \left| \begin{array}{l} 0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 \leq \dots \leq \delta_\ell \leq \frac{n-1}{2} \text{ --- ①} \\ 1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_m \leq \frac{n-1}{2} \text{ --- ②} \\ 2\gamma_2 + \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_\ell + \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_m \equiv 0 \pmod{n} \text{ --- ③'} \end{array} \right. \right\}$$

② $g \geq 4, n: \text{even}$ のとき

$$\left\{ (1, 0, 0, \dots, 0, \underline{0}, \underline{\gamma_2}, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \left| \begin{array}{l} 0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 \leq \dots \leq \delta_\ell < \frac{n}{2} \text{ --- ④} \\ 1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_m < \frac{n}{2} \text{ --- ⑤} \end{array} \right. \right\}$$

$$\left\{ (2, 0, 0, \dots, 0, 1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \left| \begin{array}{l} \text{④ ⑤} \\ \text{g.c.d.}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m): \text{even} \text{ --- ⑥} \\ \gamma_2: \text{odd} \\ 2 + 2\gamma_2 + \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_\ell + \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_m \equiv 0 \pmod{n} \text{ --- ⑦} \end{array} \right. \right\}$$

さらに $\exists \delta_i = \frac{n}{2}$ または $\exists \theta_i = \frac{n}{2}$ のときは

$$\left\{ (1, 0, \dots, 0, 1, \delta_2, \delta_2, \dots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \mid \begin{array}{l} 0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 \leq \dots \leq \delta_l \leq \frac{n}{2} \text{ --- ⑧} \\ 1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_m \leq \frac{n}{2} \text{ --- ⑨} \\ 0 \leq \delta_2 < \frac{n}{2} \end{array} \right\} \quad \text{③'}$$

$$\left\{ (2, 0, \dots, 0, 1, \delta_2, \delta_2, \dots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \mid \begin{array}{l} \text{⑧} \text{ ⑨} \\ 0 \leq \delta_2 < \frac{n}{2} \end{array} \right\} \quad \text{⑦}$$

① $g=2$ の時は長くなるのでここでは省略する。 n が素数

の時のみ書いておくと、

$$\begin{aligned} & m=0 \text{ のとき } \left\{ (\delta_1, \delta_2, 0, 0, \dots, 0) \mid \delta_1 + \delta_2 \equiv 0 \pmod{n} \quad 0 \leq \delta_1 \leq \left[\frac{n}{2}\right] \right\} \text{ と} \\ & m>0 \text{ または } \delta_l \neq 0 \text{ のとき } \left\{ (0, \delta_2, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_l, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \mid \begin{array}{l} 0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 < n \quad \delta_2 \neq 0 \\ 2\delta_2 + \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_l + \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_m \equiv 0 \end{array} \right\} \\ & (n \neq 2 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

($n=2$ のときは上の場合にさらに $\{(0, 1, 0, 0, \dots, 0)\}$ も含まれる。

[証明は $g: \text{odd}$ のときとほとんど同様で、 $g_e, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ と使うとできる]

この結果を使えば $n: \text{odd}$ のときのみ $P_n(Y, S)$ の個数とまとめて書いておくと ($g=2$ のときは $n: \text{prime}$ だけ)

定理 2 Y が compact connected non-orientable surface of genus g with l boundary components のとき $P_n(Y, S)$ は S が m 個の点からなるとき、次の式で求められる。 ($n: \text{odd}$)

$$g \geq 3 \text{ のとき } \binom{\frac{n-1}{2} + l}{l} \binom{\frac{n-1}{2} + m - 1}{m}$$

$g=1$ のとき §2 と同様に n を素因数分解して求めら
れる。すなわち $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_t^{e_t} (e_i > 0)$ とするとき、

$$\begin{aligned} & \binom{\frac{n-1}{2} + \ell}{\ell} \binom{\frac{n-1}{2} + m - 1}{m} - \sum_{i=1}^t \binom{\frac{p_i-1}{2} + \ell}{\ell} \binom{\frac{p_i-1}{2} + m - 1}{m} + \\ & \cdots + (-1)^v \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_v \leq t} \binom{\frac{\frac{n}{p_{j_1} p_{j_2} \cdots p_{j_v}} - 1}{2} + \ell}{\ell} \binom{\frac{\frac{n}{p_{j_1} p_{j_2} \cdots p_{j_v}} - 1}{2} + m - 1}{m} \\ & + \cdots + (-1)^t \binom{\frac{\frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_t} - 1}{2} + \ell}{\ell} \binom{\frac{\frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_t} - 1}{2} + m - 1}{m} \end{aligned}$$

但し $\binom{a-1}{a} = 0$ とす。

$g=2$ のとき (n : prime)

$$m=0 \text{ のとき } \frac{n-1}{2} + \binom{\frac{n-1}{2} + \ell}{\ell}$$

$$m \neq 0 \text{ のとき } \binom{\frac{n-1}{2} + \ell}{\ell} \binom{\frac{n-1}{2} + m - 1}{m}$$

系 ($n=2$) ① m : even の時 $\mathcal{P}_2(Y, S)$ は

$$\min\{g, 3\} + \left\lfloor \frac{\ell}{2} \right\rfloor \quad \text{② } m \text{: odd の時は } 0$$

§2, §3 を使えば §0 の問題の解が色々と得られる
が (特に n : prime について) まとまらな形として述べられる
ないので、今後の機会に述べることにする。 $n=2$ については
[] でできている。

参考文献

- [1] Tohl Asoh "Classification of free involutions on surfaces" *Hiroshima Math. Jour.*, 6 (1976) 171-181
- [2] D.R.J. Chillingworth "A finite set of generators for the homeotopy group of a non-orientable surface" *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 65 (1969) 409-430
- [3] W.B.R. Lickorish "A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold" *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 60 (1964) 769-778, Corrigendum, 62 (1966) 679-681
- [4] ——— "Homeomorphisms of non-orientable two-manifolds" *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 59 (1963) 307-317
- [5] P.A. Smith "Abelian Actions on 2-manifolds" *Michigan Math. Jour.*, 14 (1967) 257-275
- [6] S. Suzuki "On homeomorphisms of a 3-dimensional handlebody" *Can. Jour. Math.*, 29 (1977) 111-124