

Invariant Subspaces

東北大 教養 大 野 芳 希

函数解析の函数論への応用として単位円板上の Hardy 族 H^p の議論がなされている。この函数論の一般の compact 空間への抽象化とは別に Hilbert 空間の vector, 或は von Neumann 代数の元、特に有限次元の行列を値として持つ様な函数の Hardy 族の研究が最近あらわれている。前者は Hilbert 空間上の作用素に対する不変部分空間の問題とも関連しており [3, 4]、後者は非可換積分論への函数環の理論の応用と見ることも出来る [1]。ここでは前者について最近の結果を紹介する。今の所函数環の理論が明白にあらわれているわけではないが、問題のとらえ方その他に、その考え方が非常に有効である。以下のいくつかの結果は函数環の立場で拡張されている [5, 12]。

§1 Wiener の定理と Beurling-Lax の定理 X を単位円周、 dx を X 上の (正規化された) Lebesgue 測度、 X を $X(e^{i\theta}) =$

$e^{i\theta}$ で定義された X 上の函数とする. $\mathcal{H}$ を可分 Hilbert 空間とし
 $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ とする.

$L^2_{\mathcal{H}}$ を X 上の 弱可測な $\mathcal{H}$ -値函数で norm

$$\|F\|_2 = \left\{ \int \|F(e^{i\theta})\|_{\mathcal{H}}^2 d\sigma \right\}^{1/2}$$

が有限なもの全体の作る Hilbert 空間とする. Hardy 族 $H^2_{\mathcal{H}}$ を
 $H^2_{\mathcal{H}} = \{ F \in L^2_{\mathcal{H}} \mid F = \sum_{j=1}^{\infty} f_j e_j, f_j \in H^2(\gamma_j) \}$ ($= \{ F \in L^2_{\mathcal{H}} \mid F(e^{i\theta}) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n e^{in\theta}, \varphi_n \in \mathcal{H} \}$) で定義する.

X 上 a.e. で定義された, $\mathcal{H}$ の閉部分空間を値として持つ称
 な函数を値域函数という. a.e. で一致する値域函数は同一の
 ものとする. 値域函数 J が可測であるとは $\mathcal{H}$ から $J(e^{i\theta})$ への
 射影 $P(e^{i\theta})$ が作用素の意味で弱可測なことである. 可測な値域
 函数 J に対して $\mathcal{M}_J = \{ F \in L^2_{\mathcal{H}} \mid F(e^{i\theta}) \in J(e^{i\theta}) \text{ a.e. } \}$ と定義する.

$L^2_{\mathcal{H}}$ の閉部分空間 $\mathcal{M}$ が invariant であるとは $X\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ なるこ
 とである. 特に $X\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{M}$ なるとき $\mathcal{M}$ は simply invariant である
 という. $X\mathcal{M} = \mathcal{M}$ なるとき $\mathcal{M}$ は doubly invariant であるという.

定理 1 (Wiener) $L^2_{\mathcal{H}}$ の doubly invariant subspace $\mathcal{M}$ は

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_J$$

の形である. 此処で J は可測な値域函数で一意的である.

定理 2 (Beurling-Lax) $L^2_{\mathcal{H}}$ の simply invariant subspace $\mathcal{M}$ は

$$\mathcal{M} = u H^2_{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{M}_J$$

の形である. 此処で J は可測値域函数, u は X 上の可測な作

用素函数で値は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}$ への isometry. その値域は a.e. で J と直交する様なものである. (この μ もある意味で一意的である(命題 7 参照).)

L^2_{μ} の simply invariant subspace $\mathcal{M}$ に対して $\bigcap_{n=1}^{\infty} X^n \mathcal{M} = \{0\}$ となるとき $\mathcal{M}$ は pure であるという. このとき定理 2 の表現は $\mathcal{M} = \mathcal{U} H^2_{\mu}$ となる. 又 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ が存在して a.e. で $\{F_n(e^{i\theta})\}$ が $\mathcal{H}$ を span するとき $\mathcal{M}$ は full range を持つという.

定理 3 可測値域函数 J が定数次元である. 即ち $\dim J(e^{i\theta}) = N < \infty$ a.e. 又は $\dim J(e^{i\theta}) = \infty$ a.e. である必要十分条件は pure な simply invariant subspace $\mathcal{M}$ が存在して, $\mathcal{M} \in$ 含む最小の doubly invariant subspace を定理 1 で表現したときの値域函数が J であることである.

§ 2 解析的値域函数

Beurling-Lax の定理に表われる二つの函数に注目する. 可測な値域函数 J が解析的であるとは $\{F_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H^2_{\mu}$ が存在して a.e. で $\{F_n(e^{i\theta})\}$ の closed linear span が $J(e^{i\theta})$ となることである.

定理 4 値域函数 J が解析的なら $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H^2_{\mu}$ を適当にとって a.e. で $\{E_n(e^{i\theta})\}$ が $J(e^{i\theta})$ の正規直交基になる称にできる. 従って J は定数次元である.

解析的値域函数に対して次ぎの称を問題と考えることができる [3].

由題 (1) J が解析的なら $J^\perp$ も解析的か. 又そうなることが出来るか.

(2) 解析的値域函数の和や共通部分は亦解析的か.

(3) $\cap$ 解析的な値域函数を同様に定義したとき, 解析的値域函数 J が亦 $\cap$ 解析的に在り得るか. 又 $J^\perp$ は $\cap$ 解析的か.

解析的値域函数の可付番和が解析的なことは容易に分る.

これらの問題に関して Camburn [2] がいくつかの回答を与えていふ.

定理 5 解析的値域函数 J が有限次元なら $J^\perp$ は $\cap$ 解析的である ($\dim H = \infty$ でもよい).

系 6 J, K が有限次元の解析的値域函数なら $J \cap K$ も解析的.

(注意) $\dim H = \infty$ とする. (i) 解析的値域函数の共通部分は解析的であるとは限らない. (ii) $J^\perp$ が一次元の解析的値域函数であるか, $\cap$ 解析的でない種な解析的値域函数 J が存在する ([2], [3]).

§ 3 内部函数

U が unitary 函数であるとは U が X 上の可測な作用素函数で a.e. で $U(e^{i\theta})$ が H 上の unitary 作用素であることである.

unitary 函数 U に対して $UH_{\text{fe}}^2 \subset H_{\text{fe}}^2$ なるとき U を内部函数という. full range を持つ H_{fe}^2 の invariant subspace M を UH_{fe}^2 と表現するとき U は内部函数である.

命題 7 u, v は unitary 函数とする.

$$(1) \quad uH_{\mathcal{H}}^2 = H_{\mathcal{H}}^2 \Leftrightarrow u: \text{unitary const.}$$

$$(2) \quad uH_{\mathcal{H}}^2 \subset vH_{\mathcal{H}}^2 \Leftrightarrow v^*u: \text{内部函数}$$

unitary 函数 u, v に対して $uH_{\mathcal{H}}^2, vH_{\mathcal{H}}^2$ を含む最小の simply invariant subspace $uH_{\mathcal{H}}^2 \vee vH_{\mathcal{H}}^2$ が $wH_{\mathcal{H}}^2$ と表わせるとき $w = u \wedge v$ と定義する. 又 $uH_{\mathcal{H}}^2 \cap vH_{\mathcal{H}}^2 = wH_{\mathcal{H}}^2$ が full range であるとき $w = u \wedge v$ と定義する. 更に次ぎの符号記号を用いる.

$$^*N_{\mathcal{H}} = \{u^*v \mid u, v: \text{内部函数}\}, \quad N_{\mathcal{H}}^* = \{uv^* \mid u, v: \text{内部函数}\}$$

命題 8 (1) $u \wedge v$: 存在 $\Leftrightarrow u^*v \in N_{\mathcal{H}}^*$

$$(2) \quad u \vee v: \text{存在} \Leftrightarrow u^*v \in ^*N_{\mathcal{H}}$$

証明. (1) (2) $uH_{\mathcal{H}}^2 \cap vH_{\mathcal{H}}^2 = wH_{\mathcal{H}}^2$ (w : unitary) と $uH_{\mathcal{H}}^2, vH_{\mathcal{H}}^2 \supset wH_{\mathcal{H}}^2$ 故命題 7 から u^*w, v^*w は内部函数. このとき $u^*v = u^*w(v^*w)^* \in N_{\mathcal{H}}^*$

(1) $u^*v = \alpha\beta^*$ (α, β : 内部函数) とすると $u\alpha H_{\mathcal{H}}^2 = v\beta H_{\mathcal{H}}^2 \subset uH_{\mathcal{H}}^2 \cap vH_{\mathcal{H}}^2$. 従, $uH_{\mathcal{H}}^2 \cap vH_{\mathcal{H}}^2$ は full range であるから $u \wedge v$ は存在する. (2) も同様である.

定理 9 $\dim \mathcal{H} < \infty$ のとき $N_{\mathcal{H}}^* = ^*N_{\mathcal{H}}$

証明. $\alpha \in ^*N_{\mathcal{H}}$. 即ち $\alpha = u^*v$ (u, v : 内部函数) とする.

u の余因数行列の転置行列を ${}^t u$ とすれば ${}^t u = (\det u) \cdot u^{-1}$ から

$(\det u)u^{-1}H_{\mathcal{H}}^2 \subset H_{\mathcal{H}}^2$, 即ち $(\det u)H_{\mathcal{H}}^2 \subset uH_{\mathcal{H}}^2$. 従, $(\det u)(\det v)H_{\mathcal{H}}^2$

$\subset uH_{\mathcal{H}}^2 \cap vH_{\mathcal{H}}^2$ 故に $u \wedge v$ は存在する. 命題 8 により $\alpha =$

$u^*v \in N_{\mathcal{H}}^*$. 逆向きの包含関係を示す. $K_{\mathcal{H}}^2 = \{F \in L_{\mathcal{H}}^2 \mid F(e^{i\theta}) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n e^{in\theta}, \varphi_n \in \mathcal{H}\}$ とおく. $K_{\mathcal{H}}^2$ は $H_{\mathcal{H}}^2$ と類似の性質を持つ.

unitary 函数 $\bar{u}$ が共役内部函数であることと $\bar{u}K_{\mathcal{H}}^2 \subset K_{\mathcal{H}}^2$ で定義すれば今までの議論と平行に $\dim \mathcal{H} < \infty$ のとき, 共役内部函数 $\bar{u}$, $\bar{v}$ に対して $\bar{u}^*\bar{v} = \bar{u}\bar{v}^*$ ($\bar{u}, \bar{v}$: 共役内部) と書ける. [u : 内部函数 $\Leftrightarrow u^*$: 共役内部函数] 故, 今の場合

$$uv^* = u^{**}v^* = \bar{u}\bar{v}^* = \bar{u}^{**}\bar{v}^*$$

$\bar{u}^*, \bar{v}^*$: 内部函数故 $uv^* \in {}^*N_{\mathcal{H}}$ 依って $N_{\mathcal{H}}^* = {}^*N_{\mathcal{H}}$.

内部函数 u に対して次ぎの称を scalar の内部函数 g が存在するとき, この g を u の特性内部函数という. (i) $uH_{\mathcal{H}}^2 \subset gH_{\mathcal{H}}^2$
(ii) $uH_{\mathcal{H}}^2 \subset tH_{\mathcal{H}}^2$ (t : scalar の内部函数) $\Rightarrow gH_{\mathcal{H}}^2 \subset tH_{\mathcal{H}}^2$.

$f, g \in L^2$, $f = g h$, $g = g' h'$ (g, g' : unitary, h, h' : 外部函数) に対して $f \vee g = g \vee g'$, $f \wedge g = g \wedge g'$ と定義する.

定理 10 $\dim \mathcal{H} < \infty$ とする. 内部函数 $u = (u_{ij})$ の特性内部函数 g は

$$g = \frac{\det u}{(a_{11} \vee a_{12} \vee \cdots \vee a_{1n}) \vee \cdots \vee (a_{n1} \vee \cdots \vee a_{nn})}$$

ここで (a_{ij}) は u の余因数行列の転置行列.

証明. 簡単のために $\dim \mathcal{H} = 2$ とする. $uH_{\mathcal{H}}^2 \subset tH_{\mathcal{H}}^2$ (t : scalar 内部函数) とすると $\forall f, g \in H^2$ に対して $h_1, h_2 \in H^2$ が存在して.

$$u_{11}h_1 + u_{12}h_2 = tf, \quad u_{21}h_1 + u_{22}h_2 = tg$$

$$\text{従って } (h_1 =) \frac{t(u_{22}f - u_{12}g)}{\det u}, \quad (h_2 =) \frac{t(u_{11}g - u_{21}f)}{\det u} \in H^2$$

($\forall f, g \in H^2$)

$$\text{故に } (u_{22}H^2 + u_{12}H^2) \subset \frac{\det u}{t} H^2, \quad \text{従って } u_{22} \vee u_{12} \text{ は存在して}$$

$$(u_{22} \vee u_{12}) H^2 \subset (\det u / t) H^2. \quad \text{同様に } (u_{11} \vee u_{21}) H^2 \subset (\det u / t) H^2.$$

$$\text{従って } \{ (u_{22} \vee u_{12}) \vee (u_{11} \vee u_{21}) \} H^2 \subset (\det u / t) H^2. \quad \text{故に}$$

$$t H^2 \subset \{ \det u / (u_{22} \vee u_{12}) \vee (u_{11} \vee u_{21}) \} H^2$$

依って t が u の特性内部函数である必要十分条件は

$$\det u = t \{ (u_{22} \vee u_{12}) \vee (u_{11} \vee u_{21}) \}.$$

特性内部函数が存在するとは限らないので“次ぎ”の称の問題を考える。 H_{ge}^2 の invariant subspace M が all (analytic) directions を含むとは $[F \in H_{ge}^2 \Rightarrow \exists f: \text{scalar ft. } fF \in M]$ なることである。

問題 H_{ge}^2 の invariant subspace $M = uH_{ge}^2$ が all directions を含めば、 $M \supset gH_{ge}^2$ なる scalar 内部函数 g が、従って内部函数 u の特性内部函数が存在するか。

現在の所まだ満足できる答は与えられていない。得られている結果は次ぎの称なものである。

定理 11 任意の $e \in H_e$ に対して $g_e \cdot e \in M$ なる有限 Blaschke 積 g_e が存在するならば $M \supset gH_{ge}^2$ なる有限 Blaschke 積 g が存在する。

$F \in H_{ge}^2$ に対して J を F のはる値域函数とする。このとき

$H^2_{\mathcal{H}} \cap M_f = E \cdot H^2$ ($E \in H^2_{\mathcal{H}}$, $\|E(u^0)\| = 1$ a.e.) と書ける. この E を F に対する unitary 外部函数という. 定数函数 $c \in \mathcal{H}$ に対する unitary 外部函数 E に対して $g(c) \in g(c) \cdot E \in M$, 且 $\{g(E) \in M \mid g(H^2 \subset g(c)H^2)\}$ なる内部函数とする.

補題 12 一次独立な $y_1, y_2 \in \mathcal{H}$ に対して $g[y_1], g[y_2]$ は有限 Blaschke 積であるとする. $g[f] = g[y_1] \wedge g[y_2]$ なる一次結合 $f = ay_1 + by_2$ が存在する.

証明. y_1, y_2 のはる空間を $\mathcal{H}$ とし $M \cap H^2_{\mathcal{H}} = U H^2_{\mathcal{H}}$ とすると $U = (f_{ij})$ ($\mathcal{H}$ 上 unitary) $\mathcal{H}^\perp$ 上 0 である. $f = ay_1 + by_2$ に対して $\{g f \in M \Leftrightarrow \exists g_1, g_2 \in H^2\}$

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a g \\ b g \end{pmatrix} \quad \Bigg]$$

従って $g f \in M$ なら $g(a f_{22} - b f_{12}) / \det U, g(-a f_{21} + b f_{11}) / \det U \in H^2$.

依って $(\det U) H^2 \supset g(a f_{22} - b f_{12}) H^2, (\det U) H^2 \supset g(-a f_{21} + b f_{11}) H^2$

従って $(\det U) H^2 \supset g\{(a f_{22} - b f_{12}) \vee (-a f_{21} + b f_{11})\} H^2$

故に $g[f] = \det U / \{(a f_{22} - b f_{12}) \vee (-a f_{21} + b f_{11})\}$

特に $g[y_1] = \det U / f_{22} \vee f_{21}, g[y_2] = \det U / f_{12} \vee f_{11}$

定理 10 から U の特性内部函数 g は

$$g = \det U / (f_{11} \vee f_{12} \vee f_{21} \vee f_{22}) = g[y_1] \wedge g[y_2]$$

$g[y_1], g[y_2]$ は有限 Blaschke 積故 g も有限 Blaschke 積で, 従って

$g^2 H^2 \subset (\det U) H^2 \subset g H^2$ から $\det U$ も亦有限 Blaschke 積である.

今 $f = g_1 + b g_2$ に對して $g[f] \neq g$ とすると、或る有限 Blaschke 積 p が存在して $(f_{22} - b f_{12}) \vee (-f_{21} + b f_{11}) \in \text{divide}$ するが、一方 $f_{11} \vee f_{12} \vee f_{21} \vee f_{22}$ は divide しない。 p を各因子に分けて考えれば或る $|\lambda| < 1$ と整数 k が存在して $(z - \lambda / (1 - \bar{\lambda} z))^k$ は $f_{22} - b f_{12}$, $-f_{21} + b f_{11}$ を divide するが $f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$ の何れも divide しない。従て例え $f_{12}^{(k)}(w) \neq 0$ とすればこのとき $b = f_{22}^{(k)}(w) / f_{12}^{(k)}(w)$ 。この値は有限値しかない。従て $g[f] \neq g$ なる $f = g_1 + b g_2$ は有限値。

定理 11 の証明。仮定から各 $e \in \mathcal{H}$ に対して $g[e]$ は有限 Blaschke 積になる。 $m_n = \{e \in \mathcal{H} \mid g[e] \text{ の零点の個数 (重複度を数える) が } n \text{ 以下}\}$ とおくと m_n は閉集合である。實際 $m_n \ni g_m \rightarrow e$ とし、

$$g[g_m](e^{i\theta}) = \left(\frac{e^{i\theta} - \lambda_{m_1}}{1 - \bar{\lambda}_{m_1} e^{i\theta}} \right) \cdots \left(\frac{e^{i\theta} - \lambda_{m_n}}{1 - \bar{\lambda}_{m_n} e^{i\theta}} \right)$$

とおく。 $|\lambda| < 1$ に対して $1 / (1 - \bar{\lambda} e^{i\theta})$ は外部函数だから

$$(e^{i\theta} - \lambda_{m_1}) \cdots (e^{i\theta} - \lambda_{m_n}) g_m \in m$$

必要なら部分列を抜いて $\lambda_{m_1} \rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_{m_n} \rightarrow \lambda_n$ とする。このとき

$$(e^{i\theta} - \lambda_1) \cdots (e^{i\theta} - \lambda_n) e \in m$$

故て j に対して $|\lambda_j| < 1$ なら有限 Blaschke 積 g :

$$g(e^{i\theta}) = \left(\frac{e^{i\theta} - \lambda_1}{1 - \bar{\lambda}_1 e^{i\theta}} \right) \cdots \left(\frac{e^{i\theta} - \lambda_n}{1 - \bar{\lambda}_n e^{i\theta}} \right)$$

に対して $g e \in m$, 従て $g[e]$ の零点の個数は n 以下。故に $e \in m_n$ 。

$|\lambda_j| = 1$ なる j があるときは $e^{i\theta} - \lambda_j$ は外部函数故その数 k に応

$\tilde{y} \in m_{n-k} \subset m_n$. Baire の定理によりある m_k 上球 $\{x: \|x_0 - x_0\| < \varepsilon\}$ を含む. $y \in \mathcal{H}$ に対して $x_0 + \frac{\varepsilon}{\sum \|y_j\|} y \in m_k$ だから $y \in m_{2k}$. 従って補題 12 により任意の n に対して $g[x_n] = g[e_1] \wedge \cdots \wedge g[e_n]$ なる x_n が存在する. このとき $g[x_1]H^2 \supset g[x_2]H^2 \supset \cdots$ だから $\mathcal{H} = m_{2k}$ より或る x_0 に対して $g[x_0] = g[x_{n+1}] = \cdots$. 故に $\bigcap_{j=1}^{\infty} g[e_j]H^2 = g[x_0]H^2$. 従って $m \supset g[x_0]H_{\mathcal{H}}^2$.

定理 13 $\dim \mathcal{H} < \infty$, U : 内部函数なら $UH_{\mathcal{H}}^2 = VH_{\mathcal{H}}^2 \cap WH_{\mathcal{H}}^2$

且 $\det U = (\det V)(\det W)$, $\det V$: Blaschke, $\det W$: singular なる内部函数 V, W が存在する.

§ 4 Invariant subspaces

問題 $\mathcal{H}$ ($\dim \mathcal{H} > 1$) 上定義された有界線型作用素 T は $T\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$. 且 $\{0\} \subsetneq \mathcal{H}_0 \subsetneq \mathcal{H}$ なる閉部分空間 $\mathcal{H}_0$ を持つか.

これが T の invariant subspace の問題である. (i) $\dim \mathcal{H} < \infty$ のとき答は肯定的. 実際 T は固有 vector を持つが, これは一次元の invariant subspace を与える. (ii) $\dim \mathcal{H} > \infty$ のときも肯定的. このときは $0 \neq \varphi \in \mathcal{H}$ なる φ に対して $\{T^n \varphi\}_{n=0}^{\infty}$ の closed linear span を考えればよい.

推移作用素 S は $S: H_{\mathcal{H}}^2 \ni \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \chi^n \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \chi^{n+1} = \chi \left(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \chi^n \right)$ で定義し, $H_{\mathcal{H}}^2$ に於ける S の共役作用素を S^* とする:

$$S^*: H_{\mathcal{H}}^2 \ni \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \chi^n \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{n+1} \chi^n.$$

$H_{\mathcal{H}}^2$ の閉部分空間 $\mathcal{K}$ と $\mathcal{M} = H_{\mathcal{H}}^2 \ominus \mathcal{K}$ に対して $S^* \mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ と

$\beta m \subset \beta$ とは同値. 従って $\{0\} \subset m \subset \mathcal{H}$ なる β^* -invariant subspace m が見つかること $\Leftrightarrow m \subset m_0 \subset H_{\mathcal{H}}^2$ なる (β, γ) -invariant subspace m_0 が見つかること $\Leftrightarrow$ は同値である.

以下に於いて $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ なる $\mathcal{H}$ 上の有界線型作用素とし、対応 $A: \mathcal{H} \rightarrow H_{\mathcal{H}}^2$ と

$$A: \mathcal{H} \ni \varphi \rightarrow F_\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} (T^n \varphi) \chi^n = (I - \chi T)^{-1} \varphi \in H_{\mathcal{H}}^2$$

で定義する. $\mathcal{K}_T = A\mathcal{H}$ とおくと A は $\mathcal{H}$ から $H_{\mathcal{H}}^2$ の閉部分空間 $\mathcal{K}_T$ の上への位相同型対応で $A^*T = S^*A$, 即ち S^* と T は unitary 同値. $\mathcal{M}_T = H_{\mathcal{H}}^2 \ominus \mathcal{K}_T \in \mathcal{T}$ の Rota 空間という [7].

T の invariant subspace の存在性の問題が positive である必要十分条件は T の Rota 空間 $\mathcal{M}_T$ が極大でない, 即ち $H_{\mathcal{H}}^2 \supsetneq \mathcal{M}_0 \supsetneq \mathcal{M}_T$ なる invariant subspace m_0 が存在することである.

定理 14 $H_{\mathcal{H}}^2$ の invariant subspace m が余次元 1 を持つ必要十分条件は或る $|\lambda| < 1$ と $\varphi_0 \in \mathcal{H}$ ($\varphi_0 \neq 0$) に対して $m = \{F \in H_{\mathcal{H}}^2 \mid F(\bar{\lambda}) \perp \varphi_0 \text{ in } \mathcal{H}\}$ と表わせることである.

証明. $\mathcal{K} = H_{\mathcal{H}}^2 \ominus m$ とおく. $\dim \mathcal{K} = 1$ とするときは $0 \neq \psi \in \mathcal{K}$, $\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \chi^n$ とすれば, $S^*\psi \in \mathcal{K}$ 故 $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在して

$$S^*\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{n+1} \chi^n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \chi^n$$

故に $\varphi_{n+1} = \lambda \varphi_n$ ($\forall n \geq 0$) 従って $\varphi_n = \lambda^n \varphi_0$ ($\forall n \geq 0, \varphi_0 \neq 0$). $\psi = (\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \chi^n) \varphi_0 \in H_{\mathcal{H}}^2$ だから $|\lambda| < 1$. 従って $\psi = \varphi_0 / (1 - \lambda \chi)$.

逆に $|\lambda| < 1$, $\varphi_0 \in \mathcal{H}$ なる組に対して $\varphi = \varphi_0 / (1 - \lambda X)$ とおき $\mathcal{K} = \{a\varphi \mid a \in \mathbb{C}\}$ とおくと $\mathcal{K}$ は S^* -invariant な 1 次元空間である。
 すると $F \in \mathcal{M} \Leftrightarrow$

$$0 = \int (\varphi, F) d\sigma = \int (\varphi_0, (1 + \bar{\lambda}X + \bar{\lambda}^2X^2 + \dots)F) d\sigma$$

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\lambda}^n \psi_n \text{ 故}$$

$$0 = \int (\varphi, F) d\sigma = (\varphi_0, \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\lambda}^n \psi_n) = (\varphi_0, F\bar{\omega})$$

換言すれば $F \in \mathcal{M} \Leftrightarrow F(\bar{\lambda}) \perp \varphi_0$ in $\mathcal{H}$.

定理 15 $H_{\mathcal{H}}^2$ の invariant subspace $\mathcal{M}$ が極大で且、 $\mathcal{M} \supset g H_{\mathcal{H}}^2$
 (g : 内部函数) なる $\text{codim } \mathcal{M} = 1$ で更に g は single Blaschke
 factor にとれる。

証明. $g H_{\mathcal{H}}^2$ が $\mathcal{M}$ で極大になる称に scalar-内部函数 g とおす。
 g が single factor でないなら $g = pr$ (p, r は定数でない内部函数) と書ける。
 $\mathcal{M}' = \{F \in H_{\mathcal{H}}^2 \mid pF \in \mathcal{M}\}$ とおくと $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}' \subset H_{\mathcal{H}}^2$. $\mathcal{M}' = H_{\mathcal{H}}^2$ なら $p H_{\mathcal{H}}^2 \subset \mathcal{M}$ となり g の極大性に反する。
 $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$ なら $F \in r H_{\mathcal{H}}^2$ なる $F \notin \mathcal{M}$ を選べば、 $pF = pr(\bar{r}F) = g(\bar{r}F) \in g H_{\mathcal{H}}^2 \subset \mathcal{M}$ 故に $F \in \mathcal{M}' = \mathcal{M}$ となり矛盾である。
 故に g は single factor で勿論特異でないから Blaschke factor である。依て $g(z) = (z - \lambda)/(1 - \bar{\lambda}z)$ と書ける。
 さて $\tau: F \in H_{\mathcal{H}}^2 \rightarrow F(\lambda) \in \mathcal{H}$ なる対応を考えると $\tau(\mathcal{M}) = \mathcal{H}_0$ は内部分空間で、 $\tau(g H_{\mathcal{H}}^2) = \{0\}$. $\mathcal{H}'$ が $\mathcal{H}$ の内部分空間なら $\tau^{-1}(\mathcal{H}')$ は invariant で、故に $\tau^{-1}(\mathcal{H}') \longleftrightarrow \mathcal{H}'$ は $H_{\mathcal{H}}^2$ の $g H_{\mathcal{H}}^2$ を含む invariant subspace と $\mathcal{H}$ の内部分空間との間の 1-1

対応を与える。従って、極大な M に対応する $\mathcal{H}_0$ は $\mathcal{H}$ の部分空間として極大でなければならず、このとき $\text{codim } \mathcal{H}_0 = 1$ 故 $\text{codim } M = 1$.

系 16 M が極大で $\text{codim } M \neq 1$ なら各 $F \in M$ に対する unitary 外部函数 E は M に属する。

証明. $F \in E \cdot H^2$ 故 $F = g \cdot E$ (g : 内部, E : 外部函数) と書ける。 E が外部函数だから $gE \in M$. 今 $N = \overline{g}M \cap H_{\mathcal{H}_0}^2$ とおくと $M \subset N \subset H_{\mathcal{H}_0}^2$. $N = H_{\mathcal{H}_0}^2$ なら $\overline{g}M \supset H_{\mathcal{H}_0}^2$ で $M \supset gH_{\mathcal{H}_0}^2$ となり、定理 15 から $\text{codim } M = 1$. これは矛盾で、従って $M = N$ で、結局 $E = \overline{g}gE \in M$.

定理 17 M が極大なら $E \in H_{\mathcal{H}_0}^2$, $\|E(e^{it})\| = 1$ a.e. が存在して

$$M = \{ F \in H_{\mathcal{H}_0}^2 \mid (F, E) \in H^2 \}$$

証明. $M = UH_{\mathcal{H}_0}^2$ とする。凡ての $e \in \mathcal{H}$ に対して Ue が定数なら $M = H_{\mathcal{H}_0}^2$ となる。従って $Ue = E$ が定数でない称な $e \in \mathcal{H}$, $\|e\| = 1$ が存在する。今 $\mathcal{H}$ の base $\{e_j\}$ を $e = e_1$ となる称にとれば

$$U = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}$$

とおくと $E = Ue = \sum_{j=1}^{\infty} k_j e_j$. 所て明らかに $M \subset M_{(E)} \subset H_{\mathcal{H}_0}^2$. 此

故て $M_{(E)} = \{ F \in H_{\mathcal{H}_0}^2 \mid (F, E) \in H^2 \}$. $M_{(E)} = H_{\mathcal{H}_0}^2$ なら $\forall F \in H_{\mathcal{H}_0}^2$, $F = \sum_{j=1}^{\infty} f_j e_j$ に対して $(F, E) = \sum f_j \overline{k_j} \in H^2$. 従って $\overline{k_j} \in H^2$ ($\forall j \geq 1$)

故に k_j は定数となり、これは E が定数でないというのに反する。故に $M = M_{(E)}$.

あとで見える称に $\mathcal{H}$ の Rota 空間 $M_{\mathcal{H}}$ は full range である。故に

$M_\pi = U_\pi H_{ge}^2$ (U_π : 内部函数) と表現できる. 従って $M_\pi \subset M_0 \subset H_{ge}^2$ なる invariant subspace M_0 が存在する必要十分条件は $U_\pi = V \cdot W$ (V, W : 定数でない内部函数 - 但し $\text{codim } M_\pi = 1$ のときは (定数で))

よい) の factorization が出来ることである. 従って π の invariant subspace の存在性の問題は内部函数, 特に Rota 空間 M_π を表現する内部函数 U_π (これを π の Rota 内部函数という) の factorization の問題に帰着される. この問題に就いては [3, 4] に詳しい.

定理 18 $\dim \mathcal{H} < \infty$ とする. $\text{codim } M > 1$ なら M は極大でない. 或は同値だが, 自明な場合を除いて内部函数は factorization できる.

§5 Rota 空間と Potapov 空間.

命題 19 $M_\pi = \{ F \in H_{ge}^2 \mid F = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \chi^n, \sum_{n=0}^{\infty} (\pi^*)^n \varphi_n = 0 \}$

定理 20 $M_\pi = (\chi - \pi^*) H_{ge}^2$

証明. 定義から $M_\pi = \{ F \in H_{ge}^2 \mid \int (F, (1 - \chi\pi)^{-1} e) d\sigma = 0 \ \forall e \in \mathcal{H} \}$. $F \in M_\pi$ に対して $G \equiv (1 - \chi^{-1}\pi^*)^{-1} F \in H_{ge}^2$ なら $\chi^{-1}G \in H_{ge}^2$ 故に $F = (\chi - \pi^*) \chi^{-1}G \in (\chi - \pi^*) H_{ge}^2$. $G \in H_{ge}^2$ を示す. $G = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \chi^n$ とすると $F = (1 - \chi^{-1}\pi^*) G = \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi_n - \pi^* \varphi_{n+1}) \chi^n$, $F \in H_{ge}^2$ 故 $\varphi_n = \pi^* \varphi_{n+1}$ ($n = -1, -2, \dots$). 一方 $F \in M_\pi$ 故に $(\varphi_0, e) = \int (G, e) d\sigma = \int ((1 - \chi^{-1}\pi^*)^{-1} F, e) d\sigma = 0 \ (\forall e \in \mathcal{H})$ 故に $\varphi_0 = 0$. 従って $\varphi_{-1} = \pi^* \varphi_0 = 0$, $\varphi_{-2} = \pi^* \varphi_{-1} = 0, \dots$. 故に $G \in H_{ge}^2$. 逆向きの包含関係は容易である.

系 21 M_T は full range である。

系 22 T が正規作用素なら $U_T = (X - T^*)(1 - XT)^{-1}$

証明. T が正規であるから $(X - T^*)(1 - XT)^{-1}$ は unitary である。

勿論内部函数となる。 $(1 - XT)^{-1} H_{ge}^2 = H_{ge}^2$ となるから定理 20 から

$$M_T = (X - T^*) H_{ge}^2 = (X - T^*)(1 - XT)^{-1} H_{ge}^2.$$

命題 23 $U_T = U_0 + X(1 - XT)^{-1} U_1$ 此処で U_0, U_1 は定数作用素。

定理 24 $\dim \mathcal{H} = N < \infty$ とする。 T^* の特性多項式を $\prod_{j=1}^N (z - \lambda_j)$

とすると

$$\det U_T(e^{i\theta}) = \prod_{j=1}^N \frac{e^{i\theta} - \lambda_j}{1 - \bar{\lambda}_j e^{i\theta}}$$

証明. 定理 20 から $U_T H_{ge}^2 = (e^{i\theta} - T^*) H_{ge}^2$. 従って $\{\det(e^{i\theta} - T^*) / \det U_T\}$ は H^∞ の invertible element、故に外部函数。 $\det(e^{i\theta} - T^*)$ は T^* の特性多項式である。外部函数は零点又は極を円板内に持たないから $\det U_T$ と $\det(e^{i\theta} - T^*)$ は同じ重複度の零点を持つ。この相対性値を持つ内部函数は $\prod_{j=1}^N \frac{e^{i\theta} - \lambda_j}{1 - \bar{\lambda}_j e^{i\theta}}$ の絶対値 1 の定数倍だけである。

定理 25 $\dim \mathcal{H} < \infty$ とし、 T^* の最小多項式を $\prod_{j=1}^r (z - \lambda_j)$ とする。

U_T の特性内部函数は

$$q(e^{i\theta}) = \prod_{j=1}^r \frac{e^{i\theta} - \lambda_j}{1 - \bar{\lambda}_j e^{i\theta}}$$

証明. $\prod_{j=1}^r (1 - \bar{\lambda}_j e^{i\theta})^{-1}$ は外部函数だから $q H_{ge}^2 = \prod_{j=1}^r (e^{i\theta} - \lambda_j) H_{ge}^2$.

まず $M_T \supset \prod_{j=1}^r H_{ge}^2$ を示す。 $\sum_0^\infty q_n z^n$, $\sum \|q_n\|^2 < \infty$ に対して

$\prod_{j=1}^r (e^{i\theta} - \lambda_j) \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta} \in M_T$ を示せばよい. M_T は invariant 故この
 ためには $\forall \varphi$ に対して $\prod_{j=1}^r (e^{i\theta} - \lambda_j) \varphi \in M_T$ を示せばよい. 命題 19
 によりこのことは $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (T^*)^n \varphi = 0$ と同値である (但し $\prod_{j=1}^r (e^{i\theta} - \lambda_j)$
 $= \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}$ とおいた). 所で $\sum a_n e^{in\theta}$ は T^* の最小多項式故これは
 成立する. 従って $M_T \supset \mathcal{H}_{ge}^2$. 今 $M_T \not\supset p \mathcal{H}_{ge}^2 \supset \mathcal{H}_{ge}^2$ (p : scalar
 内部函数) とすると p は有限 Blaschke 積でなければならない.
 $p(e^{i\theta}) = \prod_{j=1}^r \frac{e^{i\theta} - \beta_j}{1 - \bar{\beta}_j e^{i\theta}}$ ($r \leq r$) とおく. このとき $\prod_{j=1}^r (1 - \bar{\beta}_j e^{i\theta})^{-1}$ は外
 部函数故 $M_T \not\supset p \mathcal{H}_{ge}^2 = \prod_{j=1}^r (e^{i\theta} - \beta_j) \mathcal{H}_{ge}^2$. 特に $\forall e \in \mathcal{H}_{ge}$ に対して
 $\prod_{j=1}^r (e^{i\theta} - \beta_j) e \in M_T$. 命題 19 により $\prod_{j=1}^r (T^* - \beta_j) = 0$. 所で $\prod_{j=1}^r (e^{i\theta} - \lambda_j)$
 が T^* の最小多項式故 $r = r$ となり結局 $p = q$.

Rota 空間の応用の一つとして次ぎの命題を挙げておく.

命題 26 $\dim \mathcal{H} = \infty$ なら full range を持つ $\mathcal{H}_{ge}^2$ の disjoint な
 invariant subspaces の uncountably family $\{M_\alpha\}$ が存在する.

証明. T^* の Rota 空間 M_{T^*} は $\mathcal{H}_{ge}^2$ の full range を持つ invariant
 subspace である. 更に T, U が disjoint な値域を持つ 称な 1-1 有界線型
 作用素なら $M_{T^*} \cap M_{U^*} = \{0\}$. 従って ∞ 作用素の uncountably
 family を示せばよいが, これは容易である.

Potapov [6] によれば T に関連するもう一つの内部函数が
 ある

$$v_T(e^{i\theta}) = (1 - T^*T)^{-\frac{1}{2}} (e^{i\theta} - T^*) (1 - \chi T)^{-1} (1 - T T^*)^{\frac{1}{2}}$$

は内部函数である. この v_T を Potapov 内部函数とて, $v_T \mathcal{H}_{ge}^2$ は

Potapov 空間という。これは $B; g_e \ni e \rightarrow G_e =$

$(1-T^*T)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (T^n e) \chi^n \in H_{ge}^2$ なる対応を惹くとき

$V_T H_{ge}^2 = H_{ge}^2 \oplus B H_e$ なる空間で、 T についての

invariant subspace の存在性の問題は T の Potapov

空間が H_{ge}^2 の invariant subspace として極大でない

ということと同値になる。系 22 から T が正規作用素なら

その Rota 空間と Potapov 空間は一致する。更に

定理 27 $\dim H_e = N < \infty$ なら $\det U_T = \det V_T$ であり、 U_T と

V_T の特性内部函数は同一である。

証明. $\det V_T = \det (1-T^*T)^{-\frac{1}{2}} \det (X-T^*) \det (1-X T)^{-1} \det (1-T T^*)^{\frac{1}{2}}$

最初と最後の因子は定数で、第 2 の因子は T^* の特性多項式、

第 3 の因子は

$$\det (X(X^{-1}-T)^{-1}) = X^{-N} \left[\prod_{j=1}^N (X^{-1} - \bar{\lambda}_j) \right]^{-1} = \prod_{j=1}^N (1 - X \bar{\lambda}_j)^{-1}$$

最初の主張が定理 24 から従う。 $V_T H_{ge}^2 = (1-T^*T)^{-\frac{1}{2}} U_T H_{ge}^2$ だから

$[V_T H_{ge}^2 \supset \mathfrak{g} H_{ge}^2 \Leftrightarrow U_T H_{ge}^2 \supset \mathfrak{g} H_{ge}^2]$ これから後半の主張が出る。

定理 28 Rota 空間 $\mathcal{M}_T$ (或は Potapov 空間) が all directions

を含む必要十分条件は T が polynomial equation $P(T)=0$ を満

足すことである。

定理 3 は [12], 定理 28 は [11] に証明がある。その他の証明を

省略した定理の証明は [3] で与えられている。此処で与えた証

明は [4, 8, 9, 11] 等による. 作用素函数の factorization の問題は [3], 内部函数に就いての他の結果は [10] 等に見られる.

文 献

- [1] W. B. Arveson; Analyticity in operator algebras, Amer. Journ. Math., 89 (1967) 578-642.
- [2] M. Cambern; Analytic Range Functions, Journ. Math. Anal. & Apply., 12 (1965) 413-424.
- [3] H. Helson; Lectures on Invariant Subspaces, Academic Press, N.Y., 1964
- [4] _____; Sous-Espaces Invariants, Publications Mathématiques d'Orsay, Année 1966-67.
- [5] Y. Ohno; Simply invariant subspaces, Tohoku Math. Journ., 19 (1967), 368-378.
- [6] V. P. Potapov; The multiplicative structure of J -contractive matrix functions, Amer. Math. Soc. Transl. 15 (1960), 131-245.
- [7] G.-C. Rota; Note on the invariant subspaces of linear operators, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (2) 8 (1959), 182-184.
- [8] M. J. Sherman; Operators and Inner Functions, Pacific. Journ. Math., 22 (1967) 159-170.

- [9] _____; Disjoint Invariant Subspaces, to appear.
- [10] _____; A spectral theory for inner functions, to appear.
- [11] _____; Invariant subspaces containing all analytic directions, to appear.
- [12] T.P. Srinivasan; Doubly invariant subspaces, Pacific Journ. Math., 14 (1964) 701-707.