

The configuration space $X(2, 5)$ and the family of cyclic pentagonal curves

千葉大学大学院自然科学研究科 (D3) 小池 健二 (Kenji KOIKE)
Graduate School of Science and Technology, CHIBA UNIVERSITY

1 Introduction

Gauss の超幾何級数を 2 変数に拡張した Appell の F_1

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)} x^m y^n \quad (1)$$

は原点の適当な近傍で収束し、偏微分方程式系

$$\begin{aligned} x(1-x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y(1-x) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x\} \frac{\partial u}{\partial x} - \beta y \frac{\partial u}{\partial y} - \alpha \beta u &= 0 \\ y(1-y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x(1-y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \{\gamma - (\alpha + \beta' + 1)y\} \frac{\partial u}{\partial y} - \beta' x \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha \beta' u &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

の解になっています。これは

$$\Lambda = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : xy(x-1)(y-1)(x-y) \neq 0\} \quad (3)$$

の各点で解空間は 3 次元、解 $u(x, y)$ は一般に $\mathbb{P}^2 - \Lambda$ で分岐します。Terada([9]) 及び Deligne-Mostow([1]) は、独立解による射影平面への多価写像

$$\Phi : \Lambda \longrightarrow \mathbb{P}^2, \quad (x, y) \mapsto [u_1(x, y) : u_2(x, y) : u_3(x, y)] \quad (4)$$

を考え、 Φ が open dense な埋め込み $\Lambda \hookrightarrow \mathbb{B}/(\text{monodromy 群})$ を与えるパラメータ $(\alpha, \beta, \beta', \gamma)$ を全て決定しています。ここで、 $\mathbb{B}$ は $\mathbb{P}^2$ 内の 2 次元超球

$$\{[u_1 : u_2 : u_3] \in \mathbb{P}^2 : |u_1/u_3|^2 + |u_2/u_3|^2 < 1\}$$

と同型な領域です。この $(\alpha, \beta, \beta', \gamma)$ に対し、 Φ の逆写像を考える事により $\mathbb{B}$ 上の monodromy 群に対する 2 変数保形関数が得られます。 $(\alpha, \beta, \beta', \gamma) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4})$ に対しては、Theta 関数を用いて具体的に逆写像が記述されています ([6],[4])。ここでは $(\alpha, \beta, \beta', \gamma) = (\frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{6}{5})$ の場合を考えます。これは最も対称性が高いパラメータであり、前述の 2 つの例とは異なり cocompact な離散群に対する保形関数の具体的構成を与えます。

2 Configuration space $X(2, 5)$

この節では $\mathbb{P}^1$ 上の点配置について簡単に復習します。詳しくは [11] 及びその文献等を参照して下さい。 $\mathbb{P}^1$ 上の異なる 5 点の射影変換による同値類

$$\{(\lambda_1, \dots, \lambda_5) \in (\mathbb{P}^1)^5 : \lambda_i \neq \lambda_j (i \neq j)\} / \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$$

を考えます。これを次の様に行列空間の商空間と考え $X(2, 5)$ と呼びます。

$$X(2, 5) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \backslash \{M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{pmatrix} : d_{ij}(M) \neq 0 (i \neq j)\} / (\mathbb{C}^*)^5$$

$$d_{ij}(M) = a_i b_j - a_j b_i$$

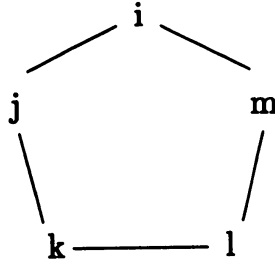
つまり、 $(\mathbb{C}^*)^5$ の各列への作用により $[a_i : b_i]$ を $\lambda_i \in \mathbb{P}^1$ の射影座標と見なしています。写像

$$\Lambda \ni (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & x & y \end{pmatrix} \in X(2, 5)$$

は同型を与えます。5 次対称群 S_5 が正則に作用する $X(2, 5)$ の最小 compact 化 $\overline{X(2, 5)}$ は $\mathbb{P}^2$ の 4 点 blow-up $\widehat{\mathbb{P}^2}$ と同型になりますが、この射影 model は次の様にして得られます。 $\{i, j, k, l, m\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ に対し、

$$(ijklm)(M) = d_{ij}(M)d_{jk}(M)d_{kl}(M)d_{lm}(M)d_{mi}(M) \quad (5)$$

と置きます。 $(mijkl)(M) = (ijklm)(M) = -(mlkji)(M)$ に注意して、 $(ijklm)$ を (裏表を無視した) 円順列と考えると 12 種類ある事が分かります。



12 個の多項式 $(ijklm)$ を用いて写像

$$Cross : X(2, 5) \longrightarrow \mathbb{P}^{11}, \quad M \mapsto [\dots : (ijklm)(M) : \dots] \quad (6)$$

を考えると、これは embedding を与え像の閉包は $\overline{X(2, 5)}$ と同型になります。写像 $Cross$ は $\widehat{\mathbb{P}^2}$ の anti-canonical 写像を制限したものと同一視できます。

3 Period mapping

$(x, y) \in \Lambda$ に対し、Riemann 面

$$C_{x,y} : w^5 = z(z-1)(z-x)(z-y) \quad (7)$$

を考えます。これは、 $0, 1, \infty, x, y$ で分岐する $\mathbb{P}^1$ の 5 重被覆で、種数 6 の Riemann 面となっています。 $\zeta = \exp(2\pi\sqrt{-1}/5)$ として被覆変換

$$\rho : C_{x,y} \longrightarrow C_{x,y}, \quad (x, y) \mapsto (x, \zeta y)$$

を考えると、 ρ の作用により $H_1(C_{x,y}, \mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}[\rho])^3 \cong (\mathbb{Z}[\zeta])^3$ となり unitary 構造が入ります。 $H^0(C_{x,y}, \Omega^1)$ の基底は

$$\varphi_1 = \frac{dz}{w^2}, \quad \varphi_2 = \frac{dz}{w^3}, \quad \varphi_3 = \frac{zdz}{w^3}, \quad \varphi_4 = \frac{dz}{w^4}, \quad \varphi_5 = \frac{zdz}{w^4}, \quad \varphi_6 = \frac{z^2dz}{w^4}$$

で与えられ、 $H_1(C_{x,y}, \mathbb{Z})$ の ρ -基底 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ を取ると積分 $\int_{\gamma_i} \varphi_1$ は $(\alpha, \beta, \beta', \gamma)$ $(\frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{6}{5})$ に対する (2) の独立解を与えます。この場合の多価写像 (4) に対する monodromy 群に関して次が知られています。

Theorem ([10])

適当な γ_i に対し写像 $\Phi : \Lambda \ni (x, y) \mapsto [\int_{\gamma_1} \varphi_1 : \int_{\gamma_2} \varphi_1 : \int_{\gamma_3} \varphi_1] \in \mathbb{P}^2$ の像は

$$\mathbb{B}_A = \{[\eta_1 : \eta_2 : \eta_3] \in \mathbb{P}^2 : |\eta_1|^2 + |\eta_2|^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}|\eta_3| < 0\}$$

に含まれ、この時 monodromy 群は

$$\Gamma = \{g \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}[\zeta]) : {}^t \bar{g} A g = A\}, \quad A = \mathrm{diag}(1, 1, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$$

の合同部分群

$$\Gamma(1-\zeta) = \{g \in \Gamma : g \equiv I_3 \bmod 1-\zeta\}$$

と一致する。又、 $\Gamma/\Gamma(1-\zeta) \cong S_5$ であり Φ は S_5 -同型 $\overline{X(2,5)} \cong \mathbb{B}_A/\Gamma(1-\zeta)$ を与える。

次に Riemann 面 $C_{x,y}$ の周期行列を $\mathbb{B}_A$ の言葉で具体的に記述します。 A_i, B_i を $H_1(C_{x,y}, \mathbb{Z})$ の symplectic 基底 (i.e. 交点数 $A_i \cdot A_j = B_i \cdot B_j = 0, A_i \cdot B_j = \delta_{ij}$) とし行列

$$(Z_1, Z_2) = \begin{pmatrix} \int_{A_1} \varphi_1 & \cdots & \int_{A_6} \varphi_1 & \int_{B_1} \varphi_1 & \cdots & \int_{B_6} \varphi_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \int_{A_1} \varphi_6 & \cdots & \int_{A_6} \varphi_6 & \int_{B_1} \varphi_6 & \cdots & \int_{B_6} \varphi_6 \end{pmatrix}$$

を考えると、 $\tau = Z_1^{-1}Z_2$ は 6 次の Siegel 上半空間

$$\mathfrak{S}_6 = \{\tau \in \mathrm{GL}_6(\mathbb{C}) : {}^t\tau = \tau, \mathrm{Im}\tau > 0\}$$

に属します ([5] 参照)。 A_i, B_i を適当に定め、 ρ の作用を利用して τ を具体的に計算する事により次が得られます。

Lemma 3.1. 写像 $\Omega : \mathbb{B}_A \rightarrow \mathfrak{S}_6$, $\Omega(\eta) = (\Omega_{ij})$ を次により定める事ができ、これは modular embedding を与える。

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= (\zeta^3 - 1)(\eta_1^2 + (1 + \zeta^3)\eta_2^2 + \eta_3^2)/\Delta, & \Omega_{44} &= -\zeta^2(\eta_1^2 + \zeta^2\eta_2^2 - (1 + \zeta)\eta_3^2)/\Delta, \\ \Omega_{22} &= (\zeta^3 - 1)((1 + \zeta^3)\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2)/\Delta, & \Omega_{55} &= -\zeta^2(\zeta^2\eta_1^2 + \eta_2^2 - (1 + \zeta)\eta_3^2)/\Delta, \\ \Omega_{33} &= (\zeta^2 - 1)(\eta_1^2 + \eta_2^2 - \zeta^3\eta_3^2)/\Delta, & \Omega_{66} &= -\zeta^3(\eta_1^2 + \eta_2^2 - (1 + \zeta^4)\eta_3^2)/\Delta, \\ \Omega_{12} &= (\zeta^3 - \zeta)\eta_1\eta_2/\Delta, & \Omega_{45} &= (\zeta^4 - \zeta^2)\eta_1\eta_2/\Delta, \\ \Omega_{15} &= (\zeta^4 - \zeta)\eta_1\eta_2/\Delta, & \Omega_{24} &= (\zeta^4 - \zeta)\eta_1\eta_2/\Delta, \\ \Omega_{13} &= (1 - \zeta^2)\eta_1\eta_3/\Delta, & \Omega_{23} &= (1 - \zeta^2)\eta_2\eta_3/\Delta, \\ \Omega_{46} &= (\zeta^4 - \zeta)\eta_1\eta_3/\Delta, & \Omega_{56} &= (\zeta^4 - \zeta)\eta_2\eta_3/\Delta, \\ \Omega_{16} &= (\zeta^3 - \zeta)\eta_1\eta_3/\Delta, & \Omega_{26} &= (\zeta^3 - \zeta)\eta_2\eta_3/\Delta, \\ \Omega_{34} &= (1 - \zeta^3)\eta_1\eta_3/\Delta, & \Omega_{35} &= (1 - \zeta^3)\eta_2\eta_3/\Delta, \\ \Omega_{14} &= \zeta^3((1 + \zeta)\eta_1^2 + (1 + \zeta^3)\eta_2^2 + \eta_3^2)/\Delta, \\ \Omega_{25} &= \zeta^3((1 + \zeta^3)\eta_1^2 + (1 + \zeta)\eta_2^2 + \eta_3^2)/\Delta, \\ \Omega_{36} &= (\zeta + \zeta^2)(\eta_1^2 + \eta_2^2 - \zeta^3(1 + \zeta^2)\eta_3^2)/\Delta. \end{aligned}$$

ただし $\Delta = \eta_1^2 + \eta_2^2 - \zeta^3(1 + \zeta)\eta_3^2$ 。

4 Theta map

Theta 関数に関しては [2], [5] を参照して下さい。characteristic $(a, b) \in (\mathbb{Q}^6)^2$ に対し、 $\mathfrak{S}_6$ 上の正則関数 $\theta_{(a,b)}$ を Fourier 級数

$$\theta_{(a,b)}(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^6} \exp[\pi\sqrt{-1}^t(n+a)\tau(n+a) + 2\pi\sqrt{-1}^t(n+a)b].$$

により定めます。 (a, b) は Jacobi 多様体の torsion 点 $\tau a + b \in \mathbb{C}^6/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$ と対応しています。曲線 $C_{x,y}$ の分岐点を $P_1, \dots, P_5$ とすると

$$Z_1^{-1t} \left(\int_{P_i}^{P_j} \varphi_1, \dots, \int_{P_i}^{P_j} \varphi_6 \right)$$

達は $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$ と同型な部分群 $H \subset \mathbb{C}^6/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$ を生成します。 H の元を Riemann 定数と呼ばれる元 $\Xi \in \mathbb{C}^6/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$ で平行移動したものの達

$\Xi + H$ を考えます。 $\Xi + H$ に対応する characteristics 125 個を考えると、殆ど全ての (a, b) に対し $\theta_{(a,b)}(\Omega(\eta))$ は $\mathbb{B}_A$ 上恒等的にゼロとなってしまう意味がないのですが、非自明な関数を与える (a, b) を 12 個見つけることができます。この 12 個を利用して $\mathbb{B}_A/\Gamma(1-\zeta)$ を $\mathbb{P}^{11}$ に埋め込みます。

Theorem 1. 12 個の *theta* を利用して次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccc}
 \overline{X(2,5)} & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{B}/\Gamma(1-\zeta) \\
 \downarrow \text{Cross} & \searrow \Theta & \\
 \mathbb{P}^{11} & &
 \end{array}$$

ただし、写像 *Cross* と Θ は

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta_{[[1,1,1]]}(\Omega(\eta))^5 \\ -\theta_{[[1,1,9]]}(\Omega(\eta))^5 \\ \theta_{[[1,9,1]]}(\Omega(\eta))^5 \\ \theta_{[[9,1,1]]}(\Omega(\eta))^5 \\ \zeta^2 \theta_{[[1,3,5]]}(\Omega(\eta))^5 \\ \zeta^2 \theta_{[[1,7,5]]}(\Omega(\eta))^5 \\ -\zeta^4 \theta_{[[3,3,3]]}(\Omega(\eta))^5 \\ \zeta^4 \theta_{[[3,3,7]]}(\Omega(\eta))^5 \\ \zeta^4 \theta_{[[3,7,3]]}(\Omega(\eta))^5 \\ -\zeta^4 \theta_{[[7,3,3]]}(\Omega(\eta))^5 \\ -\theta_{[[7,1,5]]}(\Omega(\eta))^5 \\ -\theta_{[[3,1,5]]}(\Omega(\eta))^5 \end{bmatrix}, \quad \text{Cross} = \begin{bmatrix} J(13245)(\lambda) \\ J(13524)(\lambda) \\ J(15324)(\lambda) \\ J(13254)(\lambda) \\ J(15234)(\lambda) \\ J(13425)(\lambda) \\ J(12534)(\lambda) \\ J(12345)(\lambda) \\ J(13452)(\lambda) \\ J(15342)(\lambda) \\ J(12453)(\lambda) \\ J(12354)(\lambda) \end{bmatrix} \quad (8)$$

で定め、characteristics $[[l, m, n]]$ は

$$a = \frac{1}{10} {}^t(l, m, n, l, m, n), \quad b = \frac{1}{10} {}^t(-2l, -2m, -2n, -l, -m, -n)$$

を意味する。

Φ は同型であり *Cross* は埋め込みなので Θ も埋め込みになる事が分かります。証明は省略しますが ([3] 参照), 基本的には hyperelliptic curve の Thomae の公式を導くのと同一考え方です。 $J(ijklm)$ 達は 1 次関係式と 2 次関係式を満たします。具体的な式は省略しますが, *Cross* の像は (従って Θ の像は) $\mathbb{P}^5 \subset \mathbb{P}^{11}$ の中で 5 個の 2 次方程式によって定まります。

次に定理の $\theta_{[[l,m,n]]}(\Omega(\eta))^5$ が満たす保型性について述べます。 Q を対角行列 $\text{diag}(1, 1, -\zeta^3(1+\zeta))$ として

$$F_g(\eta) = \frac{(g\eta)Q^t(g\eta)}{\eta Q^t\eta}, \quad g \in \Gamma, \eta \in \mathbb{B}_A$$

と置きます。 $\mathbb{B}_A$ 上の正則関数 $f(\eta)$ で関数等式

$$f(g\eta) = F_g(\eta)^k f(\eta), \quad g \in \Gamma(1-\zeta), \eta \in \mathbb{B}_A$$

を満たすものが成すベクトル空間を $A_k(F_g; \Gamma(1-\zeta))$ で表します。12個の $\theta_{[[l,m,n]]}(\Omega(\eta))^5$ に対しその積は $A_5(F_g; \Gamma(1-\zeta))$ の元を定める事が分かり次が得られます。

Corollary 4.1. (1). 次の $\mathbb{C}$ -algebras の同型が成り立つ。

$$\begin{aligned} \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_{5n}(F_g; \Gamma(1-\zeta)) &= \mathbb{C}[\theta_{[[l,m,n]]}(\Omega(\eta))^5 \theta_{[[l',m',n']] }(\Omega(\eta))^5] \\ &\cong \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^0(X, \mathcal{O}_X(-2nK_X)) \end{aligned}$$

ただし, $X = \overline{X(2,5)}$ 。

(2). $A_n(F_g; \Gamma(1-\zeta)) = \{0\}$ for $n \in \mathbb{N}$, $n \notin 5\mathbb{Z}$.

参考文献

- [1] P. Deligne and G. D. Mostow, Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy, Publ. Math I.H.E.S. 63(1986), 5-88.
- [2] J. Igusa, Theta functions, Springer, Heidelberg, New-York(1972).
- [3] K. Koike, On the family of pentagonal curves of genus 6 and associated modular forms on the ball, preprint.
- [4] K. Matsumoto, On Modular Functions in 2 Variables Attached to a Family of Hyperelliptic Curves of Genus 3, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 16 (1989), no. 4, 557-578.
- [5] D. Mumford, Tata Lectures on Theta, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart(1983).
- [6] H. Shiga, On the representation of the Picard modular function by θ constants I-II, Pub. R.I.M.S. Kyoto Univ. 24(1988), 311-360.

- [7] G. Shimura, On purely transcendental fields of automorphic functions of several complex variables. Osaka J. Math. 1(1964), 1-14.
- [8] K. Takeuchi, Arithmetic triangle group, J. Math. Soc. Japan, Vol. 29-No. 1(1977), 91-106.
- [9] T. Terada, Fonctions hypergéométriques F_1 et fonctions automorphes I-II, J. Math. Soc. Japan 35(1983), 451-475, 37(1985), 173-185
- [10] T. Yamazaki and M. Yoshida, On Hirzebruch's Examples of Surfaces with $c_1^2 = 3c_2$, Math. Ann. 266(1984), 421-431.
- [11] M. Yoshida, Hypergeometric functions, my love, Aspects of Mathematics, E32. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig(1997).