粗面上の粒子の浮遊機構と浮遊限界に関する研究

芦田和男・藤田正治

MECHANISM OF PARTICLE SUSPENSION ON THE ROUGH BED

By *Kazuo* ASHIDA and *Masaharu* FUJITA

Synopsis

Mechanism of suspension of silt and sands on the rough bed in open channel flow is investigated by experimental and theoretical approaches. The trajectories of particle motion which implies the states of saltation and suspension are photographed in three dimension. The forces acting on the particle and the mechanism of its behaviers are investigated with both equation of particle motion and experimental results. Then dynamic and stochastic properties of particle motion are discussed, and the criterion of particle suspension is formulated.

1. 緒　　言

山地河川では，一般に河床上の礫と礫の間にシルトや細砂などの粒子が存在している場合が多く，そのような場からの粒子の流出機構を明らかにして，移動限界摩擦速度や流砂量の推算式を確立することが重要な課題の一つとなっている。とくに，シルトや細砂などの粒子は主として浮遊形態で流送されるものと思われるので，粒子の浮遊機構を解明し，浮遊条件式や浮遊砂量式を確立する必要がある。

粗面上の粒子の浮遊機構を解明するためには，粗面での乱流構造を明らかにし，その中に置かれた粒子が乱れの作用でいかなる運動をするのかと言うことがわかればよいが，粗面上の流れの乱流構造は実験の難しさもあってあまり明らかにされておらず，乱流構造から浮遊機構を解析することは難しい。しかし，浮遊現象を定性的に把握し，粒子が河床から浮遊する過程でそれに作用する外力を明らかにすれば，粒子の浮遊機構の定式化は可能である。

また，乱流構造をモデル化し，それを使って粒子の運動をシミュレートするということは前述したように難しいが，将来このようなことを試みるときの知見とするために，浮遊現象に及ぼす乱流現象の影響を検討することは有意義である。Grass[1] や中川・禰津ら[2] は可視化観測によって，粗面乱流でもバースディング現象が存在することを指摘しているが，このバースディング現象や並列らせん流が浮遊機構にどのように関与しているのかを考察することは非常に興味深い。

以上の観点から，本研究では以下のような事について検討する。第2章では，ビデオ撮影されたポリスチレン粒子の運動軌跡から，河床を離脱して浮遊する粒子に作用する外力について検討し，浮遊機構を定性的に明らかにするとともに，バースディング現象や並列らせん流と浮遊現象との関連について検討する。第3章では，乱流中の粒子の鉛直方向の運動方程式と粒子の運動軌跡から，粒子に作用する揚圧力や流体力を推定し，その成果を用いて浮遊機構をモデル化する。第4章では浮遊機構のモデルに従って，粗面上の粒子の浮遊限界を確率的に議論する。

2. 粒子の浮遊機構に関する実験的検討

次に述べるような実験を行って粒子の浮遊軌跡を撮影し，粗面上の粒子の浮遊機構を明らかにした。以下の解析では，流下方向，横断方向および鉛直方向を x, y, z 軸の正方向とする。

2.1 実験の概要

(1) 実験装置および撮影方法

実験に用いた水路は長さ 8 m, 幅 30 cm, 勾配1/1000であり，上流端から 4 m～6 m の区間の路床には粒径 0.483 cm の礫が一粒径の厚みで貼付されている。

Fig. 1 は粒子の運動軌跡を撮影するための装置であり，3次元的な運動が撮影できるように，鏡 (15 cm ×150 cm) を路床と 45° の角度をつけて水面付近に設置している。撮影にはビデオカメラを用いて，アクリル板を通して粒子の x, y, z 方向の運動を同時に撮影した。ビデオカメラは水平方向と若干の角度をつけて固定されており，軌跡が録画される流下方向の範囲は約 20 cm である。なお，ビデオ録画の1フレームの間隔は1/30秒であり，軌跡は最小1/30秒の時間間隔で解析できる。

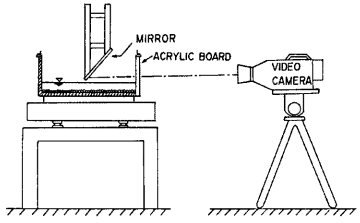


Fig. 1 Photo-method in three dimension.

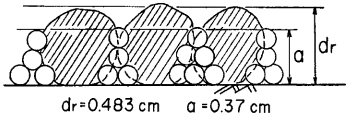


Fig. 2 Rough bed profile.

(2) 実験方法と実験条件

実験に用いた粒子は粒径 0.142 cm のポリスチレン粒子で比重 $\sigma/\rho=1.05$, 沈降速度 $w_0=1.88$ cm/s である。これを **Fig. 2** に示すように $a/d_r=0.77$ (d_r: 粗度の粒径，a: 粒子の堆積厚) となるように粗度の間に一様に敷き，単位幅流量 $q=39.7\,\mathrm{cm^2/s}$, 水深 $h=2.57$ cm, 摩擦速度 $u_*=1.40$ cm/s の水理条件で実験を行った。水深は流速分布の実測値が対数則によく適合するように理論河床を求め (理論河床の位置は粗度頂部から $d_r/4$ だけ下であった。)，その位置から水面までの高さで計算された。また，摩擦速度はエネルギー勾配 I_e から $\sqrt{gRI_e}$ (R: 径深) で求められた。このような条件では，砂粒レイノルズ数は $R_*=u_*d_r/\nu=68$ であり，河床条件は粗面である。

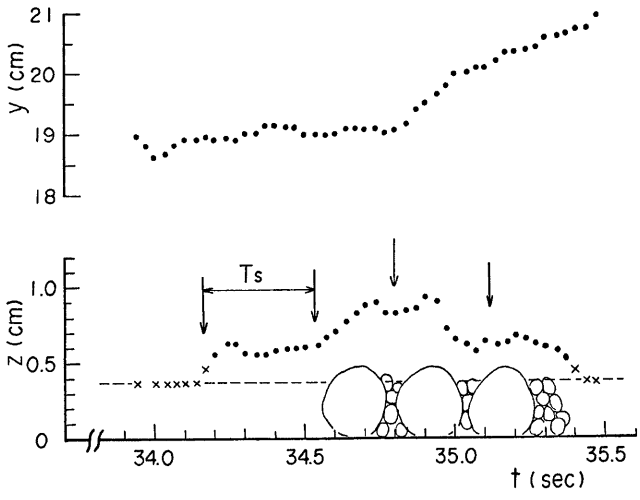
(3) ビデオ録画の解析方法

録画された軌跡の真の座標は，1/30秒毎に以下のようにして求められた。実験に先だって，通水中の水路内に 5 mm きざみの目盛の付いたスケールを x, y および z 方向に置き，それを撮影して画面上での座標を真の座標に変換するキャリブレーション式を求めた。画面の左右での歪を補正するために，y, z 方向のキャリブレーションは，画面をそれぞれ5および3等分する位置に関して行われた。画面上で粒子の座標を 1 mm の精度で読みとり，その座標値に応じた適当なキャリブレーション式から，比例配分によって画面の左右での歪を補正して真の座標を算出した。本実験は **Fig. 2** のような河床を対象としており，粒子が礫にかくれてその位置が読みとれない場合があったが，そのときは，軌跡の傾向からそれ (注; y 座標は読みとれる。) を推定した。

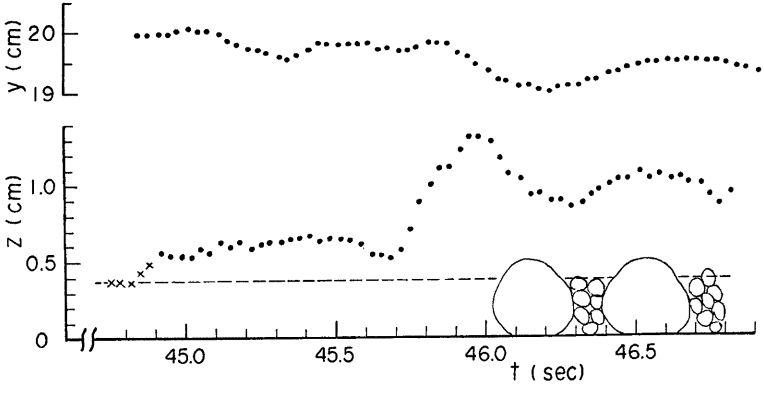
2.2 粒子の浮遊機構

(1) 粒子の離脱過程と浮遊過程

粒子が河床から離脱する場合について，撮影ビデオから1分間に解析可能なすべての軌跡 (30ケース) を読みとった。**Fig. 3 (a), (b)** はその例を示したもので，図中の×印は軌跡の傾向から推定された粒子の位置である。これらの図からわかるように，粒子は河床から離脱し小跳躍した後，浮遊するようであり，浮遊機構を河床から離脱し小跳躍する過程 (離脱過程) と小跳躍から浮遊する過程 (浮遊過程) に分けて考察するこ



(a)



(b)

Fig. 3(a), (b)　Examples of trajectory obtained for a suspended particle.

とにする。

(a)　離 脱 過 程

粒子が河床を離脱する時にそれに作用する鉛直方向の力として，Fig. 4 に示すように揚圧力 F_L と粒子と河床面との衝突による反発力 F_R および水中重力 G が考えられる。F_L と F_R のどちらが支配的であるかという事が問題であるが，Fig. 3 から推察すると，粒子は礫の間を若干移動した後急激に離脱しており，粒子を離脱させる力は反発力よりも揚圧力が主であると思われる。しかし，矢野ら[3] は均一粒径の粒子を用いたサルテーションに関する実験で，粒子の運動を撮影し，粒子が河床を離脱する現象は転動状態の粒子が河

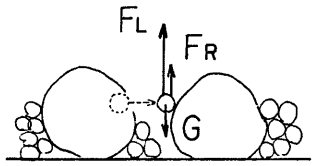


Fig. 4 Forces acting on a particle.

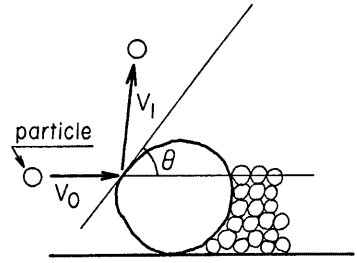


Fig. 5 Schematic dyagram of repulsion between a particle and a gravel.

床面と衝突することによって生じることを明らかにし，その際揚圧力は無視できるとしている。そこで，**Fig. 5** に示すような仮想反発面を考えて，実験で得られた軌跡を用いて，粒子が衝突のみによって離脱しうるかということについて若干検討する。衝突の前後での粒子の速度を V_0, V_1, それらの水平成分を V_{0x}, V_{x1} 鉛直成分を V_{0z}, V_{1z} とする。粒子は河床の礫に水平に衝突すると仮定すると，離脱時に作用する力が反発力のみであるための必要条件は次式で表わされる。

$$0<\alpha<1 \quad \cdots\cdots (1)$$

$$\alpha^2-\alpha+\beta^2>0 \quad \cdots\cdots (2)$$

ここに，$\alpha=V_{1x}/V_0$, $\beta=V_{1z}/V_0$ である。著者らが得た軌跡から V_{0x}, V_{1x}, V_{1z}, ($V_{0z}=0$) を求め，(1)，(2)式の条件について検討した結果，(1)，(2)式を両方満足する場合は全体の17%であった。これより，粒子が衝突による反発力の作用のみで離脱することは少なく，離脱過程では揚圧力を考慮しなければならないことがわかる。

以上の事から，粒子の離脱過程は次のように考えることができる。矢野らの実験のように一様粒径の粒子を用いた場合では，粒子は転動しやすいため，ほとんどの粒子は河床面との衝突によって離脱するが，本研究で対象としているような粗面の場合では，粒子は礫の遮蔽効果により転動しにくいため，河床面との衝突によって離脱するような粒子は少なく，多くの粒子は河床付近で生じる揚圧力によって離脱する。最近，粗面乱流でもバースディング現象が存在することが指摘されており[1),2)]，この揚圧力はバースディング現象の ejection 過程のとき，発生するものと推察される。

(b) 浮遊過程

揚圧力によって河床から離脱した粒子は **Fig. 3** に見られるように小跳躍し，その後急激に浮上し浮遊する。小跳躍から浮遊へ移行するときに粒子に作用する力は3.2で検討するように，揚圧力は離脱後急激に減少することを考慮すれば，河床付近からの上昇流による流体力であると考えられる。この上昇流もバースディング現象の ejection 過程で生じるものと思われる。

(2) バースディングの影響

(1)で検討したように，粒子の浮遊機構とバースディング現象は関連があるものと思われ，ここでは粒子の浮遊現象に及ぼすバースディングの影響について考察する。これに関する研究は B. M. Sumer ら[4)] によって行われているが，本実験で得られた粒子の浮遊軌跡を用いて再検討する。

離脱時に粒子に作用する揚圧力や小跳躍から浮遊へ移行する時に作用する流体力が，バースディング現象の ejection 過程と関係があるか否かを明らかにするために，浮上軌跡の発生の時間間隔 T_S (**Fig. 3** 参照) とバースディングの平均周期 $\overline{T}_B$ や粒子の浮遊高さ z_{max} とバースディングの鉛直方向のスケール λ を比較検討する。**Fig. 6** は軌跡から T_S の値を求めて，それの頻度分布を示したものである。T_S はかなり広い範囲にばらついているものの，0.2～0.4秒にかなり集中しており，平均は $\overline{T}_S=0.36$ 秒である。一方，$\overline{T}_B$ は粗面

での値はわからないので，滑面の場合について求める。中川・禰津[5]によれば $\overline{T_B}$ は $\overline{T_B}\cdot U_{max}/h=1.5\sim3.0$（$U_{max}$：流下方向の最大流速）で表わされ，本実験条件では $\overline{T_B}=0.21\sim0.42$ 秒となり，$\overline{T_S}$ と $\overline{T_B}$ は大体同じ値である。次に，**Fig. 7** は z_{max} の頻度分布を示したものであり，その平均値 $\overline{z_{max}}$ の無次元表示 $\overline{z_{max}^+}(=u_*\overline{z_{max}}/\nu)$（$\nu$：動粘性係数）の値は約50である。一方，$\lambda$ は中川・禰津[5]によると $\lambda^+(=u_*\lambda/\nu)<100$ であり，特に coherent な運動が生じるのは $\lambda^+<50$ であるとされており，$\overline{z_{max}^+}$ と λ^+ はほぼ同じオーダーである。**Fig. 8** は粒子が浮上するときと沈降するときの流下方向の粒子の速度 $u_{p\,up}$ と $u_{p\,down}$ の鉛直方向の分布を示したもので，各点での値は軌跡から計算された値の平均値で，図中の実線は流速分布（対数則分布）である。この図から，$u_{p\,up}$ は $u_{p\,down}$ より小さく，粒子の浮上が河床付近の遅い流体塊を持ち上げる ejection 過程に，また粒子の沈降が河床付近へ高速の流体塊が流れ込む sweep に対応していることが示唆される。なお，B. M. Sumer らも z_{max} や $u_{p\,up}$, $u_{p\,down}$ に関して同様の考察をしている。

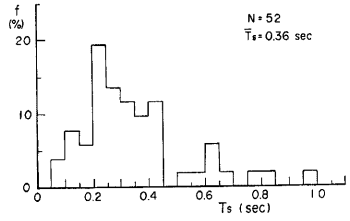


Fig 6. Frequency histogram of the time interval between an upward particle motion and the next one.

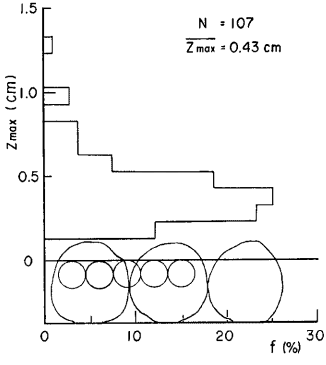


Fig. 7 Frequency histogram of the maximum level of position at which particles terminate upward motion.

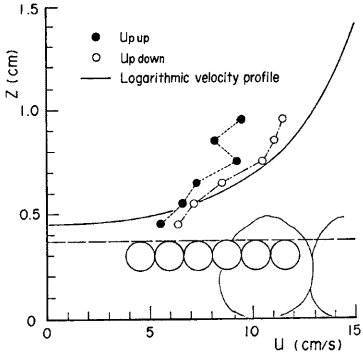


Fig. 8 Vertical profiles of the longitudinal velocity of the particles which move upward and downward.

以上のように，粒子の離脱過程や浮遊過程はバースディング現象と発生周期や鉛直方向のスケールなどに関して密接な関係があると考えられ，今後，粗面での乱流計測等を行って，ejection 過程時にどのような揚圧力が作用しているのかなどについてもう少し詳しい検討をする必要がある。

（3） 並列らせん流の影響

Fig. 9 (a), (b) は粒子の浮遊軌跡を y-z 平面に投影したものであるが，この図や **Fig. 3** から，粒子は浮遊するとかなり横断方向に変動していることがわかる。この横断方向の粒子の運動と並列らせん流との関連を調べるために，浮遊粒子と並列らせん流の横断方向の変動幅について検討する。並列らせん流の横断方向の変動幅は従来の研究成果より水深程度である。一方，浮遊粒子の横断方向の変動幅 b_S の頻度分布は **Fig. 10** のようであり，b_S は並列らせん流の変動幅よりかなり小さく，礫の粒径の2倍程度である。粒子の浮遊運動は **Fig. 9** に示した軌跡から推察すると並列らせん流の影響からうけているようであるが，上述の b_S につ

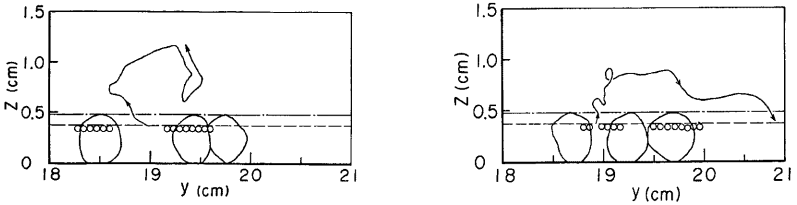


Fig. 9(a), (b) Typical profiles of trajectories projected on $y-z$ plane.

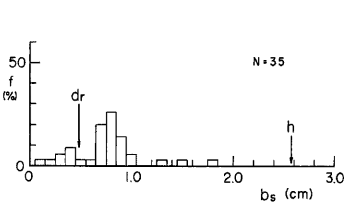


Fig. 10 Frequency histogram of transverse displacement of suspended particles.

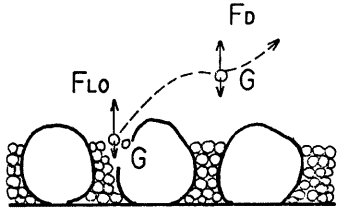


Fig. 11 Schematic diagram of mechanism of particle suspension.

いての検討から，横断方向の粒子の運動は礫による2次流の影響をうけているとも考えられるので，ここでは粒子の浮遊現象が並列らせん流の影響をうける可能性があるということを述べるにとどめる。これについては，礫の粒径を変えてさらに検討する必要がある。

3. 粒子の浮遊機構に関する理論的検討

2章での検討より，粒子は **Fig. 11** に示すように，河床で揚圧力 F_{L0} の作用によって河床から離脱し小跳躍運動を行い（離脱過程），その後河床付近からの上昇流により浮遊する（浮遊過程）。本章ではこのような浮遊機構の定式化を試みるが，前述したように離脱，浮遊過程では粒子は横断方向にも運動するので，定式化も3次元的に行うべきである。しかし，浮遊限界についての考察では鉛直方向の粒子運動について解析すれば十分であり，以下では浮遊機構を鉛直方向（z 方向）に関してのみ定式化する。

3.1 乱流中の粒子の鉛直方向の運動方程式

Tchen[6] は乱流中の粒子の鉛直方向の運動方程式を，(i) 乱流は一様かつ定常である (ii) 粒子は球形で非常に小さく stokes の抵抗則が用いられる (iii) 粒径は乱れの最小渦径よりも小さい (iv) 粒子の運動期間中は同じ流体素分が粒子の近傍にあるという4つの仮定のもとに，次式のように導いた。

$$\frac{\pi}{6}d^3\sigma\frac{dw_p}{dt}=F_D+F_L+\frac{1}{2}\frac{\pi}{6}d^3\rho\left(\frac{dw}{dt}-\frac{dw_p}{dt}\right)-G \quad \cdots\cdots(3)$$

ここに，d: 粒子の粒径，σ, ρ: 粒子および流体の密度，w_p, w: 鉛直方向の粒子および流体の速度である。また(3)式の右辺第1，2項はそれぞれ鉛直方向の流体力および揚圧力，第3項は仮想質量を加速するための力，第4項は水中重力であり，F_L, F_D および G は(4)～(6)式で表示される。

$$F_D=\frac{1}{2}C_D\rho(w-w_p)|w-w_p|\frac{\pi}{4}d^2 \quad \cdots\cdots(4)$$

$$F_L=\frac{\pi}{6}d^3\rho\frac{dw}{dt} \quad \cdots\cdots(5)$$

$$G=\frac{\pi}{6}d^3(\sigma-\rho)g \quad \cdots\cdots(6)$$

ここに，C_D：抗力係数である。芦田・道上[7]はCorrsin•Lumleyや Hinzeの指摘に従って，(3)式が成立するための条件として近似的に次式を導いている。

$$\left(\frac{d^2}{h}\right)\left(\frac{hu_*}{\nu}\right)^{\frac{3}{2}}<1 \quad \cdots\cdots(7)$$

$$\left(\frac{hu_*}{\nu}\right)^{\frac{1}{4}}>1 \quad \cdots\cdots(8)$$

本研究で対象とするような $d\fallingdotseq 100\,\mu$, $u_*\fallingdotseq 2$ cm/s, $h=3$ cm 程度の条件では，(7)，(8)式はともに満足する。そこで本章では(3)式を浮遊機構のモデルの基礎式として適用することにし，ここでは適用の妥当性について検証する。

粒子の離脱過程を(3)式で表わすとき，(3)式の初期条件は次式のようにおける。

$t=0$ (揚圧力が作用し始める時刻)；

$$w=0,\quad w_p=0,\quad F_D=0,\quad F_L=F_{L0} \quad \cdots\cdots(9)$$

(3)式の妥当性は(3)～(6)，(9)式を用いて粒子の軌跡を推定し，それと実験で得られた軌跡との比較から検証すべきであるが，F_L や w の時間変化がわからないので，実験で得られた離脱軌跡と(3)～(6)，(9)式から w を推定し，w の確率分布型や標準偏差 w' について従来の研究成果と比較して検証することにする。河床上の粒子の1/30秒毎の離脱軌跡から w_p の時間変化を求め，それを使って(3)～(6)，(9)式を差分近似して解き w の時間変化を推定した。**Fig. 12** は w の推定値を $z=0.08$ cm ($z=0$ は河床粒子の表面とする) における値に比例配分によって換算したものの頻度分布を示したものである。図中の曲線は平均 $\bar{w}=0$, 標準偏差 $w'=u_*$ および $2u_*$ の正規分布を，$w\geqq 1.5$ cm/s の範囲に対して頻度分布で表示したものである。この図より，w の推定値の確率分布は $w=0, w'=2u_*$ の正規分布とほぼ一致しているようであるが，従来，粗面河床付近では w の確率分布は $\bar{w}=0, w'\fallingdotseq u_*$ の正規分布であることが明らかにされており，w の推定値の分散はかなり大きくなっている。これは離脱軌跡のみから w の値を推定したために，小さい w の生起する頻度が過少に評価されたことによると思われる。そのことを考慮すると w' の値は $(1\sim2)\cdot u_*$ であり，従来の知見とそれ程矛盾しない。

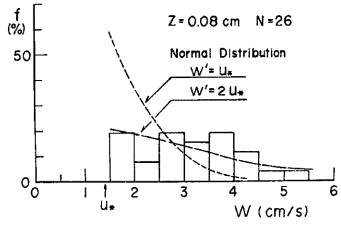


Fig. 12 Frequency histogram of vertical fluidal velocity which was obtained from eq. of a particle motion and its trajectory.

以上のように，(3)～(6)，(9)式を粒子の鉛直方向の運動の解析に適用することの妥当が検証され，次節以下でこれらの式を用いて浮遊機構を定式化する。

3.2 粒子に作用する揚圧力と流体力

粒子の浮遊機構の定式化に先だって，F_{L0}, 離脱後の F_L や F_D および F_{L0} の作用時間の定量的な評価をする必要がある。離脱時および離脱後の F_L や F_D の値は，3.1で w の値を推定した方法と同様な方法で軌跡から推定できる。**Fig. 13, Fig. 14** は F_{L0} および離脱後1/30秒での F_L の推定値の頻度分布を示したものであり，図中の曲線は平均0，標準偏差 $F_{L0}'=0.2$ (dyne) および $F_L'=0.04$ (dyne) の正規分布を，$F_{L0}\geqq 0.1$ (dyne) および $-\infty<F_L<+\infty$ の範囲に対して頻度分布で表示したものである。これらの図から，F_L は平均0の正規分布に大体従うが，その値は離脱後急激に減少し，$F_L=0$ とおいても差し支えないものと思われる。F_{L0} の標準偏差 F_{L0}' は $\rho w'^2$ および d^2 に比例するとすれば次式で記述される。

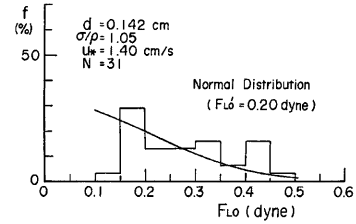


Fig. 13 Frequency histogram of lift force acting on a particle which lies on the bed.

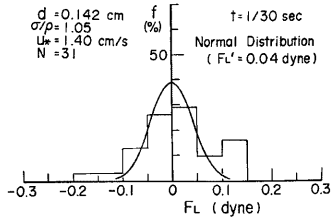


Fig. 14 Frequency histogram of lift force acting on a particle after 1/30 second from the moment at which a particle moves upward from the bed.

$$F_{L0}'=c\rho w'^2 d^2 \quad \cdots\cdots(10)$$

ここに，c: 比例定数である。粗面河床付近では $w'\fallingdotseq u_*$ であるが，本研究で対象としているような河床では揚圧力に礫の遮蔽効果が影響するので，それを考慮して，

$$w'=k'u_* \quad \cdots\cdots(11)$$

とおく。ここに，k': 遮蔽係数である。(10)，(11)式より F_{L0}' は次式で表わされる。

$$F_{L0}'=ck\rho u_*^2 d^2 \quad (k=k'^2) \quad \cdots\cdots(12)$$

以上のように，河床で粒子に作用する揚圧力 F_{L0} は平均0，$F_{L0}'=ck\rho u_*^2 d^2$ の正規分布として与えられ，離脱後粒子に作用する揚圧力は $F_L=0$ とおける。

また，離脱後1/30秒での F_D の推定値は，0.01～0.02 dyne であり，離脱すると直ちに w_p は w に近づくことがわかる。$t>1/30$秒での離脱過程中に粒子に作用する F_D の値も推定できるが，推定値の計算誤差が大きくなり詳細な議論はできない。しかし，3.3で考察するように，離脱過程中の粒子の運動は w_{p0} (w_p の初期値) のみで規定されるものとして，$F_L=0$, $F_D=\frac{1}{2}C_D\rho(-w_p)|-w_p|\frac{\pi}{4}d^2$ とおき（3）式から離脱過程中の浮上高さを計算した結果，それは実験結果と大体一致した。したがって，離脱過程中の F_D は次式で表わされるものと考えてよい。

$$F_D=\frac{1}{2}C_D\rho(-w_p)|-w_p|\frac{\pi}{4}d^2 \quad \cdots\cdots(13)$$

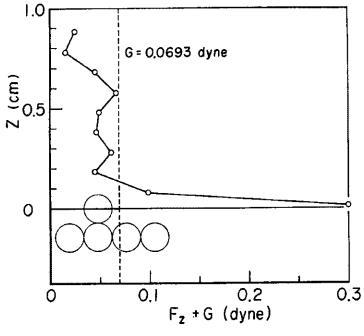


Fig. 15 Vertical profiles of the vertical external forces acting on a particle.

なお，離脱過程から浮遊過程へ遷移するときの F_D は(4)式で表示される。

次に，F_{L0} の作用時間 Δt について考察する。Δt は F_{L0} の作用する厚さ $a_1 d$ と粒子が河床から $a_1 d$ だけ浮上するときのその間での平均離脱速度 $a_2 w_{p0}$ の比で表わされると考えられるので，Δt は(14)式のように記述される。

$$\Delta t=\frac{a_1 d}{a_2 w_{p0}} \quad \cdots\cdots(14)$$

ここに，a_1, a_2: 係数，w_{p0}: F_{L0} が作用した後の粒子の鉛直方向の初速度である。**Fig. 15** は2章で述べた実験から粒子に作用する鉛直方向の力 F_z を求め，その鉛直分布を示したものであり，この図から a_1 の値を推定すると約0.5である。また，a_2 の値はわからないが，0.5とおいて差し支えないものと思われる。

3.3 浮遊機構の定式化

3.1, 3.2で検討した結果を用いて，粒子の浮遊機構を定式化する。まず，浮遊機構の第一段階である離脱過程について解析し，粒子の初期離脱速度 w_{p0}，最大離脱高さ $z_{p\,max}$，鉛直方向の粒子の速度 w_p などを求め，それらの確率分布を明らかにする。座標系および記号の説明を **Fig. 16** に示す。

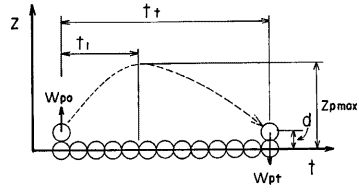


Fig. 16　Coordinate system and symboles.

揚圧力 F_{L0} が Δt 時間作用するとすれば，w_{p0} は次の力積方程式から得られる。

$$(F_{L0}-G)\cdot\Delta t=\frac{\pi}{6}d^3\sigma w_{p0} \quad \cdots\cdots(15)$$

Δt を(14)式で与えると w_{p0} は(15)式より，

$$w_{p0}=\sqrt{a_3(F_{L0}-G)} \quad \cdots\cdots(16)$$

となる。ここに，$a_3=6a_1/(\pi a_2 d^2\sigma)$ である。離脱過程中の粒子の鉛直方向の運動方程式は(3)式に，(6)，(13)式および $F_L=0$ を代入すれば次式となる。

$$\frac{\pi}{6}d^3\left(\sigma+\frac{\rho}{2}\right)\frac{dw_p}{dt}=\frac{1}{2}C_D\rho(-w_p)|-w_p|\frac{\pi}{4}d^2-\frac{\pi}{6}d^3(\sigma-\rho)g \quad \cdots\cdots(17)$$

抗力係数として Rubey の半理論式である次式を適用する。

$$C_D=2+\frac{24}{R_e}\qquad\left(R_e=\frac{|w_p|d}{\nu}\right) \quad \cdots\cdots(18)$$

ここに，R_e ：Reynolds 数である。(17)，(18)式より運動方程式は次のように変形される。

$$\frac{dw_p}{dt}=a\left(\mp w_p{}^2-\frac{12\nu}{d}w_p\right)-b\qquad(\text{複合は } w_p\gtrless 0) \quad \cdots\cdots(19)$$

ここに，$a=\dfrac{3\rho}{d(2\sigma+\rho)}$，$b=\dfrac{\sigma-\rho}{\sigma+\dfrac{\rho}{2}}g$ である。(19)式は林ら[8]がサルテーションの機構を検討したときの基礎式と同じであり，林らの研究と同様の解析を行う。

浮上軌跡 ($w_p\geqq 0$) について，初期条件を $t=0$ で $w_p=w_{p0}$，$z_p=d$ (z_p：粒子の z 方向の位置) として(19)式を解くと，w_p，z_p の時間変化および粒子が離脱してから最大離脱高さに至るまでの時間 t_1 は次式のようになる。

$A\,(=b/a-36\nu^2/d^2)>0$ のとき

$$w_p(t)=\sqrt{A}\tan\left[-a\sqrt{A}\,t+\arctan\left\{(w_{p0}+6\nu/d)/\sqrt{A}\right\}\right]-6\nu/d \quad \cdots\cdots(20)$$

$$z_p(t)=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\cos\left[-a\sqrt{A}\,t+\arctan\left\{(w_{p0}+6\nu/d)/\sqrt{A}\right\}\right]}{\cos\left[\arctan\left\{(w_{p0}+6\nu/d)/\sqrt{A}\right\}\right]}\right|-\frac{6\nu}{d}t+d \quad \cdots\cdots(21)$$

$$t_1=(1/a\sqrt{A})[\arctan\left\{(w_{p0}+6\nu/d)/\sqrt{A}\right\}-\arctan\left\{6\nu/(\sqrt{A}\,d)\right\}] \quad \cdots\cdots(22)$$

$A<0$ のとき

$$w_p(t)=(BCe^{\lambda_1 t}-DE)/(E-Ce^{\lambda_1 t}) \quad \cdots\cdots(23)$$

$$z_p(t)=\frac{1}{\lambda_1}\left\{-B\ln\left|\frac{e^{\lambda_1 t}-E/C}{1-E/C}\right|+D\ln\left|\frac{e^{\lambda_1 t}-E/C}{e^{\lambda_1 t}}\,\frac{1}{(1-E/C)}\right|\right\}+d \quad \cdots\cdots(24)$$

$$t_1=(1/\lambda_1)\ln(DE/BC) \quad \cdots\cdots(25)$$

ここに，$B=6\nu/d+\sqrt{|A|}$，$C=w_{p0}+6\nu/d-\sqrt{|A|}$，$D=6\nu/d-\sqrt{|A|}$，$E=w_{p0}+6\nu/d+\sqrt{|A|}$，$\lambda_1=-2a\sqrt{|A|}$ である。また，$z_{p\,max}$ は $A\geqq 0$ のとき(21)，(22)式より，$A<0$ のとき(24)，(25)式より，

$$z_{p\,max}=z_p(t_1) \quad \cdots\cdots(26)$$

で与えられる。

沈降軌跡 ($w_p<0$) について，$t=t_1$ で $w_p=0$，$z_p=z_{p\,max}$ の条件のもとに(19)式を解くと，w_p，z_p の時間変化

が次式のように求められる。

$$w_p(t)=\frac{HIe^{\lambda_2(t-t_1)}}{-I-He^{\lambda_2(t-t_1)}} \quad \cdots\cdots(27)$$

$$z_p(t)=\frac{1}{\lambda_2}\left\{-I\ln\left|\frac{e^{\lambda_2(t-t_1)}+I/H}{1+I/H}\right|+H\ln\left|\frac{e^{\lambda_2(t-t_1)}}{e^{\lambda_2(t-t_1)}+I/H}\left(1+\frac{I}{H}\right)\right|\right\}+z_{p\,max} \quad \cdots\cdots(28)$$

ここに，t_1 は $A\geqq 0$ のとき (22)式，$A<0$ のとき (25)式で計算され，$H=\sqrt{b/a+36\nu^2/d^2}+6\nu/d$, $I=\sqrt{b/a+36\nu^2/d^2}-6\nu/d$, $\lambda_2=2a\sqrt{b/a+36\nu^2/d^2}$ である。

次に，上式から w_{p0}, $z_{p\,max}$ および w_p の確率分布について考察する。中川・辻本ら[9] は $z_{p\,max}$ の確率分布やサルテーション粒子の存在確率密度を，C_D が一定の条件で w_{p0} の分布を与えて求めている。ここでは，3.2の結果に従って，F_{L0} を平均0，標準偏差 F_{L0}' ((12)式) の正規分布として与え，w_{p0}, $z_{p\,max}$, w_pの確率分布を求める。

F_{L0} の確率密度関数は上述したように，

$$f_{F_{L0}}(F_{L0})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,F_{L0}'}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{F_{L0}^2}{F_{L0}'^2}\right) \quad \cdots\cdots(29)$$

とおく。(16)，(29)式より w_{p0} の確率密度関数は $w_{p0}>0$ に対して，

$$f_{w_{p0}}(w_{p0})=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\,F_0'a_3}w_{p0}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(w_{p0}^2/a_3+G)^2}{F_{L0}'^2}\right\} \quad \cdots\cdots(30)$$

となる。$w_{p0}>0$ の条件に対する w_{p0} の条件付確率密度関数は，

$$f_{w_{p0}|w_{p0}>0}(w_{p0})=\frac{f_{w_{p0}}(w_{p0})}{\int_0^\infty f_{w_{p0}}(w_{p0})dw_{p0}} \quad \cdots\cdots(31)$$

で与えられる。$z_{p\,max}$ の $w_{p0}>0$ の条件に対する条件付確率密度関数は，(26)，(31) 式と次式によって数値計算される。

$$f_{z_{p\,max}|w_{p0}>0}(z_{pmax})=f_{w_{p0}|w_{F0}>0}(w_{p0})\left|\frac{dw_{p0}}{dz_{p\,max}}\right| \quad \cdots\cdots(32)$$

粒子は **Fig. 16** のように，初速 w_{p0} で河床を離脱してから，t_t 時間後に河床と w_{pt} の速度で衝突する。そのときの w_p の確率密度関数は次式で表わされる。

$$f_{w_p|w_{p0}}(w_p)=-\frac{1}{t_t}\Big/\frac{dw_p}{dt} \quad \cdots\cdots(33)$$

これより，$w_{p0}>0$ に対する w_p の確率密度関数は

$$f_{w_p}(w_p)=\int_0^\infty f_{w_p|w_{p0}}(w_p)\,f_{w_{p0}|w_{p0}>0}(w_{p0})dw_{p0} \quad \cdots\cdots(34)$$

で求められる。t_t は(28)式で $z_p(t_t)=d$ とおけば算定され，w_{pt} は(27)式に $t=t_t$ を代入すれば計算できる。

以上より，(34)式は $A\geqq 0$ のとき(20)，(27)，(31)式より $A<0$ のとき(23)，(27)，(31)式より数値計算される。

ついで，以上のような離脱過程にある粒子の運動の解析が妥当であるかについて検証する。**Fig. 17**, **Fig. 18** は w_{p0} と $z_{p\,max}$ の頻度分布の実験値と計算値を比較したものである。ただし (12) 式中の ck の値は **Fig. 13** から5.06としている。また，$z_{p\,max}$ の実験値は得られた軌跡から小跳躍と見なせる軌跡を選んで，その最大離脱高さを読みとったものである。w_{p0} の計算値は実験値より

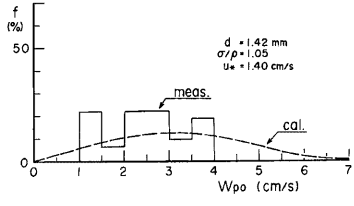


Fig. 17 Comparison between the theoretical result and the experimental one for the probability density distribution of the initial vertical velocity of a particle.

広い分布をしているが，その平均値は大体同じ値である。また，$z_{p\,max}$ の分布については，計算値が実験値から若干負の方向にずれているものの，両者はほぼ一致している。この事より，以上のような解析で離脱過程中の粒子の運動がシミュレートできるものと考えられる。

さて，粒子が離脱過程中に河床付近からの上昇流をうけたときの粒子の鉛直方向の運動方程式は，(3)式に(4)，(6)式および $F_L=0$ を代入して，次式のようになる。

$$\frac{\pi}{6}d^3\left(\sigma+\frac{\rho}{2}\right)\frac{dw_p}{dt}=\frac{1}{2}C_D\rho|w-w_p|(w-w_p)\cdot$$

$$\frac{\pi}{4}d^2-\frac{\pi}{6}d^3(\sigma-\rho)g \quad \cdots\cdots(35)$$

ここに，w は粒子が上昇流をうけた位置を $z=z_p$ とすると，次式のような正規分布で与えられる。

$$f_w(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,w'}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{w^2}{w'^2}\right) \quad \cdots\cdots(36)$$

$$w'=f_n(z_p^+)\cdot u_* \qquad (z_p^+=u_*z_p/\nu) \quad \cdots\cdots(37)$$

ここに，$f_n(z_p^+)$ は z_p^+ の関数である。

(35)式から粒子が離脱過程から浮遊過程に遷移する条件を検討する。いま，離脱過程中に(35)式の dw_p/dt が正になるとすると，粒子の軌跡はたとえば **Fig. 19** の *I*, *II*, *III* のような形状になると考えられる。(図中の実線は粒子の離脱過程における軌跡である。)ここに，*I* は浮上過程中に上昇流により $dw_p/dt>0$ となる場合，*II*, *III* は沈降過程中に上昇流により $dw_p/dp>0$ となる場合であり，*II* では上昇流の作用後の粒子の速度が $w_p>0$, *III* では $w_p<0$ である。*I*, *II*, *III* のうち浮遊と考えられるのは *I* と *II* であろうが，それに限定して上述の遷移条件を解析することは難しいので，ここでは *III* のような場合も浮遊に含めることにすると，離脱過程から浮遊過程に遷移する条件は，(35)式で $dw_p/dt>0$ となる条件で表わされ，それは(34)，(35)，(36)，(37)式を用いて確率的に明らかにされる。

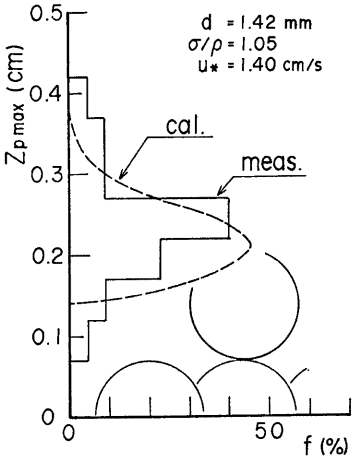


Fig. 18 Comparison between the theoretical result and the experimental one for the probability density distribution of the maximum level of position at which saltating particles terminate upward motion.

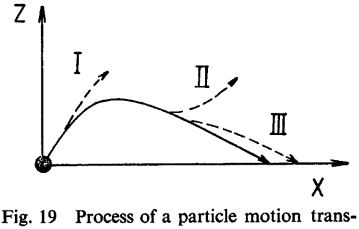


Fig. 19 Process of a particle motion transforming into suspension from saltation.

粒子の浮遊機構の定式化は，離脱過程から浮遊過程に遷移したあとのことについても行うべきであるが，それについてはもう少し詳しい検討が必要でありここでは取り扱わない。したがって，本章では以上のように，浮遊機構のうち，粒子が河床を離脱する機構と，それから浮遊へ移行する条件について定式化するにとどめる。

4. 粗面上の粒子の浮遊限界

粒子の運動は前章で解析したように確率的であり，浮遊限界も確率的に論じなければならない。浮遊限界を定義することは難しいが，ここでは，河床を確率 P_α で離脱した粒子が確率 P_β で浮遊へ移行する条件のときを浮遊確率 P_r $(=P_\alpha\cdot P_\beta)$ の浮遊限界と表わすことにし，そのときの摩擦速度を u_{*S} (P_r) で表示する。

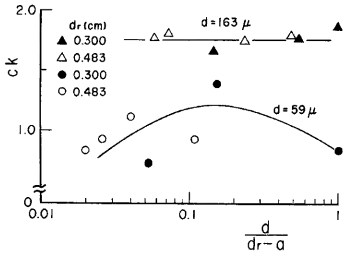


Fig. 20 Variation of coefficient of shelter effect with the position of particles among gravels.

また，確率 P_α で河床を離脱するときおよび確率 P_β で離脱過程から浮遊過程へ移行するときの摩擦速度をそれぞれ $u_{*L}(P_\alpha)$, $u_{*LS}(P_\beta)$ で表示する。

まず，粒子が河床から離脱する条件を考える。河床粒子が P_α ($F_{L0}>\alpha F_{L0}'$ となる確率) 以上の確率で河床を離脱する条件は $\alpha F_{L0}' \geqq G$ であり，$u_{*L}(P_\alpha)$ は (12) 式から次式のようになる。

$$\frac{u_{*L}(P_\alpha)^2}{sgd}=\frac{\pi}{6}\frac{1}{\alpha ck} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (38)$$

ここに，$s=\sigma/\rho-1$ である。(38)式中の ck は F_{L0} と礫の遮蔽効果についての係数であり，その値を理論的に評価することは困難である。そこで，ck の値を著者らの行った粗面上の粒子の浮遊限界に関する研究成果[10] を用いて推定する。著者らの得た浮遊限界の摩擦速度は，粒子が河床から浮上し始める状態を観察することによって求めたものであり，この値は粒子が河床を離脱する条件に対する値にほぼ対応する。著者らの実験結果が $\alpha=3$ に対応するとして (38) 式から ck の値を推定し，それを粒子の存在高さ $d/(d_*-a)$ と d をパラメータにとって整理したものが **Fig. 20** である。この図より，$d=163\,\mu$ では $d/(d_*-a)\geqq 0.05$ の領域で ck は一定であり，この事より，$d\geqq 163\,\mu$ では $d/(d_*-a)\geqq 0.05$ の領域で遮蔽効果が一定となり，$ck\fallingdotseq 1.76$ とおけるものと思われる。$d/(d_*-a)=0.05$ に対して，Fig. 20 から ck の値を求めて，$\alpha=3$ ($P_\alpha=0.13\%$) に対する離脱限界 (u_{*L} (0.13%)) を (38)式から求めると **Fig. 21** の点線のようになる。図中には，参考のため，沈降速度 w_0 を表わす曲線，一様粒径の砂礫に対する限界掃流力の無次元表示 τ_{*c} の曲線および ck の推定に

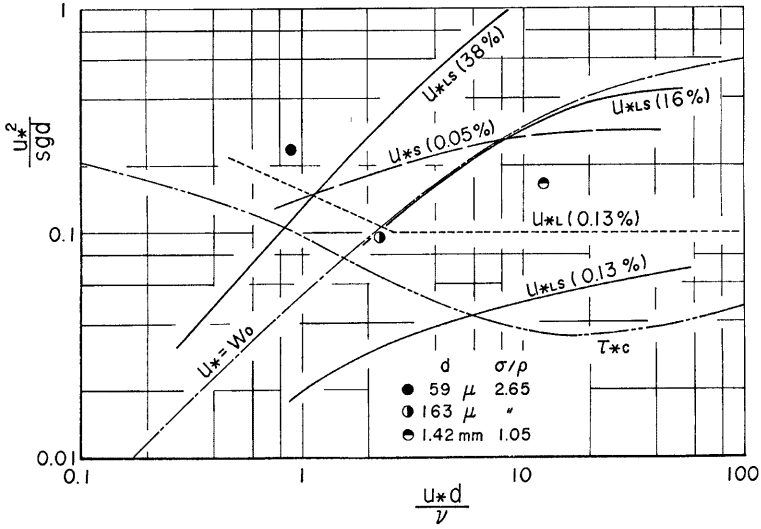


Fig. 21 Criterion for the threshold conditions of detachment from the bed (u_{*L}), transformation into suspension from saltation (u_{*LS}) and suspension (u_{*S}).

用いた著者らの浮遊限界の実験結果（d=1.42 mm のものは本実験による）が示されている。

次に粒子が離脱過程から浮遊過程へ遷移する条件は 3.3 で考察したように，$dw_p/dt>0$ で表示される。(34)，(35)，(36)，(37)式から離脱過程にある粒子が確率 P_β=0.13%, 16%, 38% で浮遊過程へ移行するときの摩擦速度 u_{*LS} (0.13%), u_{*LS} (16%), u_{*LS} (38%) を計算し，それを **Fig. 21** に図示すると図中の実線のようになる。ただし，(37)式の $f_n(z_p^+)$ の値は $z_{p\,max}$ の値が d の数倍であるということから $f_n(z_p^+)=1$ とおいた。

u_{*L} や u_{*LS} についての以上の考察から P_T=0.05% に対する浮遊限界（u_{*S} (0.05%)）を表わす曲線は，**Fig. 21** の破線のようになる。**Fig. 21** より次のようなことが考察される。

(i) $u_*d/\nu<2$ (σ/ρ=2.65, ν=0.01 cm²/s のとき $d<140\,\mu$) のとき，粒子が河床から離脱し始める条件は，離脱過程にある粒子が16%以上の確率で浮遊する条件となっているが，$u_*d/\nu>2$（前述の条件で $d>140\,\mu$）のとき，離脱した粒子のほとんどが小跳躍する条件となっている。

(ii) $u_*d/\nu>2$（前述の条件で $d>140\mu$）のとき，$u_*=w_0$ は P_β=16% の状態にほぼ対応しており，従来提案されている浮遊限界の条件式 $u_*=w_0$ は離脱過程にある粒子がかなり浮遊へ移行する条件であるのに対し，$u_*d/\nu<2$（前述の条件で $d<140\mu$）のとき，$u_*=w_0$ では P_a は小さく粒子は河床からほとんど離脱しない。

(iii) $u_*d/\nu>1$（前述の条件で $d>70\mu$）のとき，u_{*S} (0.05%)$>u_{*L}$ (0.13%) であり，u_* の増加に伴って浮遊砂が徐々に増加する。一方，$u_*/d/\nu<1$（前述の条件で $d<70\mu$）のとき，u_{*S} (0.05%) は u_{*L} (0.13%) や u_{*c}（掃流限界のときの u_*）より小さくなる傾向があり，粒子は移動し始めるとすぐに浮遊し，u_* の増加とともに急激に浮遊砂が増加する。

5. 結　　語

以上，粗面上の粒子の浮遊機構に関して詳細な実験を行い，粒子が河床を離脱して浮遊する機構を明らかにするとともに，それをモデル化し浮遊機構の定式化を行った。さらにその成果を用いて，粗面上の粒子の浮遊限界を明らかにした。本研究で得られた結果を要約すると次のようである。

(1) 粗面河床上の粒子は，河床付近で生じる揚圧力によって河床から離脱する。このとき，粒子と礫との衝突による反発力は，粒子が礫の遮蔽効果によって転動しにくいため揚圧力よりかなり小さいものと考えられる。

(2) 河床上の粒子の浮遊機構は，多くの場合揚圧力によって河床から離脱し小跳躍する離脱過程と小跳躍中の粒子が河床付近からの上昇流による流体力によって浮遊する浮遊過程からなる。

(3) 粒子の浮上軌跡の発生時間間隔や浮遊高さをバースティングの平均周期や鉛直方向のスケールに関する従来の知見（ただし滑面の場合）と比較した結果，それらはよく一致しており，粒子が河床から離脱するときに作用する揚圧力や離脱過程にある粒子が浮遊するときに粒子に作用する上昇流は，バースティング現象の ejection 過程と関連があることが示唆された。しかし，粗面上のバースティング現象については，今後もう少し詳しい検討を行う必要がある。

(4) 粒子の離脱軌跡と Tchen によって提案された乱流中の粒子の鉛直方向の運動方程式を用いて，粒子に作用する揚圧力 F_L を推定した結果，F_L は平均0の正規分布にほぼ従うが，その値は離脱後急激に減少し $F_L\fallingdotseq 0$ になることが明らかにされた。

(5) (4)で述べた運動方程式を用いて，離脱過程中の粒子の運動を確率的に解析するとともに，その解析法の妥当性を実験値から検証した。さらに，離脱過程から浮遊過程へ遷移する条件式を提示し，粒子が河床を離脱し浮遊し移行する機構を定式化した。

(6) 粒子の浮遊機構のモデルから，粒子が河床から離脱する条件や離脱した粒子が浮遊へ移行する条件について検討した。その結果，$d\geqq 163\mu$ の粒子では遮蔽効果が粒径によらず同じであり，離脱限界のときの無次元揚流力 τ_{*L} が一定となるのに対し，d が小さくなると遮蔽効果が大きくなり，τ_{*L} は増加し，そのような粒子は離脱しにくくなることが明らかにされた。また，従来提案されている $u_*\fallingdotseq w_0$ という浮遊限界の条

件式は，$u_*d/\nu>2$ ($\sigma/\rho=2.65$, $\nu=0.01\,cm^2/s$ のとき $d>140\mu$) に対して，離脱した粒子が確率16%で浮遊するという条件 ($u_*=u_{*LS}$ (16%)) にほぼ対応することが明らかにされた。

(7) 河床粒子が浮遊する条件が検討され，その結果，$u_*d/\nu>1$ ($\sigma/\rho=2.65$, $\nu=0.01\,cm^2/s$ のとき $d>70\mu$) のとき掃流砂（サルテーション）が主である状態があり，u_* が増加するとともに浮遊砂は徐々に増加するのに対し，$u_*d/\nu<1$ (前述の条件で $d<70\mu$) のとき，粒子は移動し始めるとすぐに浮遊し始め，u_* が増加するとともに浮遊砂は急激に増加することが明らかにされた。

今後，河床で粒子に作用する揚圧力や粒子の離脱，浮遊過程と乱流との関連について，乱流計測等をおこなって，もう少し詳細に検討したい。

最後に，本研究を遂行するにあたり，実験や資料整理，図面作成などに御協力していただいた，京都大学防災研究所技官吉田義則氏ならびに京都大学工学部学生神田昌幸君に感謝の意を表します。

参 考 文 献

1) Grass, A. J.: Structural features of turbulent flow over smooth and rough boundaries, J. Fluid Mech., Vol. 50, 1971, pp. 233～255.
2) 中川博次，禰津家久，為沢長雄：水素気泡トレーサーによる乱れ計測について，土木学会関西支部年講，II-8, 1974.
3) 矢野勝正，土屋義人，青山俊樹：掃流砂れきの Saltation に関する実験，京都大学防災研究所年報第12号 B, 1969, pp. 491～502.
4) B. M. Sumer and Rolf Deigaard: Experimental investigation of motions of suspended heavy particles and the bursting process, Technical university of Denmark, Series Paper, No. 23, 1979, pp. 5～76.
5) 中川博次，禰津家久：せん断乱流の bursting 現象とその物理モデル，第22回水理講演会論文集，1978, pp. 29～36.
6) Hinge, J. O.: Turbulence, McGraw-Hill, 1959, pp. 353-354.
7) 芦田和男，道上正規：浮遊砂に関する研究(1)——河床付近の濃度——，京都大学防災研究所年報第13号 B, 1970, pp. 63～79.
8) 林 泰造，尾崎幸男：掃流砂量に関する基礎的研究，第23回水理講演会論文集，1979, pp. 157～167.
9) 中川博次，辻本哲郎，赤尾恒博：Saltation 運動の確率的性質，第27回水理講演会論文集，1983, pp. 291～298.
10) 芦田和男，岡部健士，藤田正治：粒子の浮遊限界に関する研究，第27回水理講演会論文集，1983, pp. 311～316.

付　　録

本論文で使用している主な記号を整理して示す。(慣用的な記号は省略する。)

a : 粒子の堆積厚さ
b_S : 浮遊粒子の横断方向の変動幅
c : 揚圧力に関する係数
d_r : 礫の粒径
F_L, F_L' : 鉛直方向の揚圧力およびその標準偏差
F_{L0}, F_{L0}' : 河床での F_L およびその標準偏差
F_D : 鉛直方向の流体力
F_R : 粒子と河床面の衝突による反発力
F_z : 粒子に働く鉛直方向の全外力
G : 粒子の水中重量
k, k' : 遮蔽係数 ($k=k'^2$)
T_S : 粒子の浮上軌跡の発生の時間間隔
T_B : バースディングの周期
Δt : F_{L0} の作用時間
t_t : 1回の小跳躍に要する時間
t_1 : 離脱した粒子が離脱過程の最大浮上高さに至るまでの時間
$u_{*L}(P_\alpha)$: 河床上の粒子が確率 P_α で離脱するときの摩擦速度
$u_{*LS}(P_\beta)$: 離脱した粒子が確率 P_β で浮遊過程へ遷移するときの摩擦速度
$u_{*S}(P_\gamma)$: 河床上の粒子が確率 P_γ で浮遊過程へ移行するときの摩擦速度（浮遊確率 P_γ の浮遊限界に対する摩擦速度）
u_{*c} : 掃流限界のときの摩擦速度
$u_{p\,up}$, $u_{p\,down}$: 粒子が浮上するときおよび沈降するときの粒子の流下方向の速度
w, w' : 鉛直方向の乱れ速度およびその標準偏差
w_p, w_{p0} : 鉛直方向の粒子の速度および粒子が河床を離脱するときの w_p
w_0 : 粒子の沈降速度
z_{max} : 粒子の最大浮遊高さ
$z_{p\,max}$: 離脱過程中の最大離脱高さ
λ : バースディングの鉛直方向のスケール