

SCHUR 積作用素 のノルム

北海道教育大 大久保 和義 (Kazuyoshi Okubo)

北大 応電研 安藤 毅 (Tsuyoshi Ando)

1. はじめに

M_n を $n \times n$ 複素行列全体からなる線形空間とする. $A \in M_n$ に対して, M_n 上の線形写像 (Schur 積作用素) S_A を $S_A(X) = A \circ B$ で定義する. ここで, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ に対して $A \circ B = (a_{ij} \cdot b_{ij})$ (A と B の Schur 積, あるいは Hadamard 積という) とする.

Schur 積の例としては, 次のようなものがある.

例 1. f, g を連続な周期 2π の関数とする. このとき,

$$a_k = \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} f(\theta) d\theta, \quad b_k = \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} g(\theta) d\theta \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

として,

$$h(\theta) = (f * g)(\theta) = \int_0^{2\pi} f(\theta - t) g(t) dt$$

$$c_k = \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} h(\theta) d\theta$$

とすると, $c_k = a_k \cdot b_k$ となる. 従って, T_f を f の Toeplitz 行列とするととき (i.e. $T_f = (a_{i-j})$), $T_{f*g} = T_f \circ T_g$ となる.

例 2. f を (a, b) から R への連続微分可能な関数とする. $A, B \in M_n$ を固有値が (a, b) に入るエルミート行列として, $g(t)$ を

$$g(t) = f(tA + (1-t)B) \quad t \in (0, 1)$$

で定義する. ユニタリー行列 U_t を用いて $tA + (1-t)B = U_t \text{diag}(\lambda_i(t)) U_t^*$ と表されるが, このとき, $g'(t) = U_t [K_f(\{\lambda_i(t)\}) \circ (U_t^*(A - B)U_t)] U_t^*$ となる. ただし, ここで, $K_f(\{\lambda_i(t)\})$ は

$$K_f(\{\lambda_i(t)\})_{pq} = \begin{cases} f'(\lambda_p(t)) & (\lambda_p(t) = \lambda_q(t)) \\ \frac{f(\lambda_p(t)) - f(\lambda_q(t))}{\lambda_p(t) - \lambda_q(t)} & (\lambda_p(t) \neq \lambda_q(t)) \end{cases}.$$

M_n 上には様々なノルムが考えられるが、ここでは、spectral ノルム

$$\|A\|_\infty = \sup_x \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

と、numerical radius norm

$$w(A) = \sup_x \frac{|\langle Ax|x \rangle|}{\|x\|^2}$$

を考える。ただし、 $\|\cdot\|$ は C^n 上の Euclidean norm, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ は C^n 上の内積を表す。 $w(\cdot)$ と $\|\cdot\|_\infty$ に関しては、次の関係が成り立つ。

$$(1) \quad w(A) \leq \|A\|_\infty \leq 2 \cdot w(A) \quad (A \in M_n)$$

S_A は M_n 上の線形作用素であるから、 M_n 上のノルムに関して S_A の induced norm が考えられる。我々は $\|\cdot\|_\infty, w(\cdot)$ に関する S_A の induced norm をそれぞれ、 $\|S_A\|_\infty, \|S_A\|_w$ で表す。即ち、

$$\|S_A\|_\infty = \sup_X \frac{\|A \circ X\|_\infty}{\|X\|_\infty},$$

$$\|S_A\|_w = \sup_X \frac{w(A \circ X)}{w(X)}$$

で定義する。話を進める上で、以後用いられる用語について説明しておく。 M_n 上のエルミート行列 A, B に対して $A \geq B$ を $A - B$ が半正値行列であると定義する。また、 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^n$ に対して対角行列 D_x を $D_x = \text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ とする。 $A = (a_{ij})$ に対して $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$ とする。ただし、複素数 z に対して $\bar{z}$ を z の共役複素数とする。さらに、 $\|\cdot\|_{w^*}$ で $w(\cdot)$ の dual norm を表す。

$$\|Y\|_{w^*} = \sup_X \frac{|\text{tr}(YX^*)|}{w(X)} \quad (Y \in M_n)$$

この報告では、 $\|S_A\|_w \leq 1$ なる A の表現と他のいくつかの特徴付けを行い、その結果として Haagerup による $\|S_A\|_\infty \leq 1$ の特徴付けが導かれることを示そう。

2. 知られている結果について

Schur 積の ノルム に関する不等式はかなり以前 (1910 年代) から研究されていたが, 作用素 S_A の ノルム については, S. C. Ong によって始められたといえる. このことについて今までに知られていることを挙げておこう.

[1] (I. Schur; 1911)

$$\|A \circ B\|_{\infty} \leq \|A\|_{\infty} \cdot \|B\|_{\infty}$$

この Schur の結果から,

$$\|S_A\|_{\infty} \leq \|A\|_{\infty}$$

が示される.

[2] (S. C. Ong; 1984)

$$\|S_A\|_{\infty} \leq \min \left\{ \max_i \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}, \max_j \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \right\}$$

$A \in M_n$ と $0 \leq \alpha \leq 1$ に対して, $t_i(A, \alpha) := \{p_i(A, \alpha) \cdot q_i(A, 1 - \alpha)\}^{1/2}$ としよう. ただし, ここで, $p_i(A, \alpha)$, $q_i(A, 1 - \alpha)$ は, それぞれ $(AA^*)^{\alpha}$, $(A^*A)^{1-\alpha}$ の主対角要素の大きい方から i 番目のものを表すこととする. このとき, 次のことがいえる.

[3] (M. E. Walter; 1986)

$$\|S_A\|_{\infty} \leq t_1(A, \alpha) \quad (0 \leq \alpha \leq 1).$$

さらに, M_n 上の ノルム $\|\cdot\|$ を unitarily invariant とする, 即ち, $U, V \in M_n$ を unitary matrices とするとき,

$$\|A\| = \|UAV\| \quad (A \in M_n)$$

が成り立つとき, 次が示される.

[4] (K. Okubo; 1987) $\|\cdot\|_u$ を M_n 上の unitarily invariant norm とするとき,

$$\|S_A\|_u := \sup \{\|A \circ B\|_u : \|B\|_u \leq 1\} \leq \|A\|_{\infty}.$$

$c_1(A)$ で A の列ベクトルで最も大きいユークリッドのノルムとする.

[5] (T. Ando, R. A. Horn and C. R. Johnson; 1987) $\|\cdot\|_u$ を M_n 上の unitarily invariant norm とするとき,

$$\|S_A\|_u \leq \inf \{c_1(X) \cdot c_1(Y) : X, Y \in M_{r,n}, A = X^*Y, r \geq 1\} = \|S_A\|_\infty.$$

(最後の等号は Haagerup によって示された.)

Haagerup は $\|S_A\|_\infty$ の特徴づけとして次の定理を示した.

HAAGERUP'S THEOREM. $A = (a_{ij}) \in M_n$ に対して次は互いに同値である.

(1) $\|S_A\|_\infty \leq 1$

(2) A は $A = B^*C$ と表示できる. ただし, $B, C \in M_n$ は $B^*B \circ I \leq I$ で, $C^*C \circ I \leq I$ である.

(3) $a_{ij} = \langle x_j | y_i \rangle$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) と表示できる. ただし, $x_i, y_i \in C^n$ は $\|x_i\| \leq 1, \|y_i\| \leq 1$ を満たす ($i = 1, \dots, n$).

(4)

$$\begin{pmatrix} R_1 & A \\ A^* & R_2 \end{pmatrix} \geq 0$$

を満たし, かつ $R_1 \circ I \leq I, R_2 \circ I \leq I$ となる ($0 \leq$) $R_1, R_2 \in M_n$ が存在する.

3. 結果と準備

はじめに, Haagerup が $\|S_A\|_\infty$ について示したのと同じ型の定理を $\|S_A\|_w$ について述べよう.

定理. $A = (a_{ij}) \in M_n$ に対して次は互いに同値である.

$$(1)_w \quad \|S_A\|_w \leq 1$$

(2)_w A は $A = B^*WB$ と表示できる. ただし, $B, W \in M_n$ は $B^*B \circ I \leq I$ で, $\|W\|_\infty \leq 1$ である.

(3)_w $a_{ij} = \langle Wx_j | x_i \rangle$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) と表示できる. ただし, $W \in M_n$ は $\|W\|_\infty \leq 1$, かつ, $x_i \in C^n$ は $\|x_i\| \leq 1$ を満たす.

$$(4)_w$$

$$\begin{pmatrix} R & A \\ A^* & R \end{pmatrix} \geq 0, \quad R \circ I \leq I$$

を満たす $0 \leq R \in M_n$ が存在する.

この定理の証明は, いくつかのステップに分けて行うが, それらの概略を述べよう.

補題 1. $\|S_A\|_w \leq 1$ となる必要十分条件は,

$$\|D_x \bar{A} D_x^*\|_{w^*} \leq \|x\|^2 \quad (x \in M_n)$$

となることである.

証明. S_A の随伴作用素 S_A^* が $S_{\bar{A}}$ であること, さらに $\|\cdot\|_{w^*}$ ノルム に対する単位球が $\|x\| = 1$ なる x で $x \otimes x^*$ の absolute convex hull であることから, $\|S_A\|_w = \|S_{\bar{A}}\|_{w^*}$, また, $S_{\bar{A}}(x \otimes x^*) = D_x \bar{A} D_x^*$ から補題 1 は示される. ■

$J_k \in M_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) を次で定義する.

$$J_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

次の補題は定理を示すのに重要である.

補題 2. $A \in M_n$ に対して

$$\|S_A\|_w = \|S_{A \otimes J_k}\|_w \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

である.

証明. $k=2$ のときのみを示す. ($k \geq 2$ のときも同様な議論でできる.)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \text{ とするとき,}$$

$$\|S_A\|_w \leq 1 \implies \|S_{\mathbf{A}}\|_w \leq 1$$

を示すとよいから, 補題 1 より

$$(2) \quad \|D_x \overline{A} D_x^*\|_{w^*} \leq \|x\|^2 \quad (x \in C^n)$$

ならば,

$$\left\| \begin{pmatrix} D_y \overline{A} D_y^* & D_y \overline{A} D_z^* \\ D_z \overline{A} D_y^* & D_z \overline{A} D_z^* \end{pmatrix} \right\|_{w^*} \leq \|y\|^2 + \|z\|^2 \quad (y, z \in C^n)$$

を示すとよい. 今, (2) が成り立っているとする. $y, z \in C^n$ に対して $u \in C^n$ を

$$(3) \quad u \circ \overline{u} = y \circ \overline{y} + z \circ \overline{z}$$

となるようにとると

$$\|u\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$$

となる. 2つの行列 U, V を

$$(4) \quad U = D_y \cdot D_u^{-1}, \quad V = D_z \cdot D_u^{-1}$$

で定義すると, (3), (4) より $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ は $C^n \longrightarrow C^{2n}$ の縮小写像 (i.e. $\left\| \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \right\| \leq 1$) である.

したがって、任意の $X \in M_n$ に対して、

$$(5) \quad w \left((U^*, V^*) X \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \right) \leq w(X)$$

がいえ.

$$\begin{pmatrix} D_y \bar{A} D_y^* & D_y \bar{A} D_z^* \\ D_z \bar{A} D_y^* & D_z \bar{A} D_z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} D_u \bar{A} D_u^* (U^*, V^*)$$

だから、(5) を用いて、

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} D_y \bar{A} D_y^* & D_y \bar{A} D_z^* \\ D_z \bar{A} D_y^* & D_z \bar{A} D_z^* \end{pmatrix} \right\|_{w^*} &= \sup_{\substack{X \in M_{2n} \\ w(X) \leq 1}} \left| \operatorname{tr} \left(D_u \bar{A} D_u^* (U^*, V^*) X \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \right) \right| \\ &\leq \|y\|^2 + \|z\|^2. \end{aligned}$$

がいて、補題が証明される. ■

以後の証明では、 $w(X) \leq 1$ なる行列 X の特徴付けを用いる. 1 つには、定義より簡単に示される

$$w(X) \leq 1 \iff \operatorname{Re}(e^{i\theta} X) \leq I \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

であり、もうひとつは、明かではないが有益な特徴付けである次の補題である.

補題 3. (T.Ando [1]) $w(X) \leq 1$ なるための必要十分条件は、 $\begin{pmatrix} I+Z & X \\ X^* & I-Z \end{pmatrix} \geq 0$ なるエルミート行列 Z が存在することである.

さらに、我々は C^* 代数の理論に関していくつかの概念を必要とする. (詳細については [6] を参照)

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を単位元を持つ C^* 代数とし、 $\mathcal{M}$ を $*$ 演算に閉じており、単位元を含む $\mathcal{A}$ の部分空間としよう. $\mathcal{M}$ から $\mathcal{B}$ への線形写像 Φ が **unital** であるとは、 Φ が $\mathcal{A}$ の単位元を $\mathcal{B}$ の単位元に写すことであり、 Φ が正写像であるとは、 $\mathcal{M}$ の正の元を $\mathcal{B}$ の正の元に写すことである

と定義する. $k \geq 1$ に対して, 写像 Φ は $M_k(\mathcal{M})$ ($\mathcal{M}$ 値の $k \times k$ 行列からなる空間) から $M_k(\mathcal{B})$ への線形写像 Φ_k を次のように引き起こす.

$$\Phi_k((a_{ij})) \equiv (\Phi(a_{ij})) \quad (a_{ij} \in \mathcal{M}, i, j = 1, 2, \dots, k)$$

また, Φ は Φ_k が全ての $k = 1, 2, \dots$ に対して正写像であるとき完全正写像であるという.
さて, $\mathcal{M}$ を

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda I + Z & X \\ Y & \lambda I - Z \end{pmatrix} : X, Y, Z \in M_n, \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

で定義される $M_2(M_n) = M_2 \otimes M_n$ の部分空間とする. このとき, $\mathcal{M}$ は $M_2(M_n)$ の単位を含んでおり, また, $*$ 演算に閉じている.

補題 4. $\|S_A\|_w \leq 1$ とする. このとき,

$$(6) \quad \Phi \left(\begin{pmatrix} \lambda I + Z & X \\ Y & \lambda I - Z \end{pmatrix} \right) = \lambda I + \frac{1}{2} \{A \circ X + A^* \circ Y\}$$

で定義される $\mathcal{M}$ から M_n への線形写像 Φ は **unital** で完全正写像である.

証明. 補題 2 より

$$\|S_{A \otimes J_k}\|_w = \|S_A\|_w \leq 1 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

である. また, Φ が **unital** であることは, あきらかである. 次に, Φ が正写像であることを示そう. $\begin{pmatrix} \lambda I + Z & X \\ Y & \lambda I - Z \end{pmatrix} \geq 0$ とする. このとき, $Y = X^*$ かつ $\lambda I \pm Z \geq 0$ だから, $\lambda \geq 0$ となる. $\lambda > 0$ としてもよい. 仮定より, $\begin{pmatrix} I + Z/\lambda & X/\lambda \\ X^*/\lambda & I - Z/\lambda \end{pmatrix} \geq 0$ となり, したがって補題 3 を用いて $w(X) \leq \lambda$ がいえる. よって, $\|S_A\|_w \leq 1$ から, $w(A \circ X) \leq \lambda$ となり, ゆえに,

$$\Phi \left(\begin{pmatrix} \lambda I + Z & X \\ Y & \lambda I - Z \end{pmatrix} \right) = \lambda I + \operatorname{Re}(A \circ X) \geq 0$$

がいえて、 Φ は正写像である。次に、 Φ が完全正写像であることを示す。即ち、任意の自然数 k に対して、 Φ_k が $M_k(\mathcal{M})$ から $M_k(M_n)$ への正写像であることを示すとよい。このことは、 $M_k(\mathcal{M})$ の元

$$(7) \quad \begin{pmatrix} \lambda_{ij}I + Z_{ij} & X_{ij} \\ Y_{ij} & \lambda_{ij}I - Z_{ij} \end{pmatrix}_{1 \leq i, j \leq k} \geq 0$$

に対して、

$$(8) \quad \left(\lambda_{ij}I + \frac{1}{2}\{A \circ X_{ij} + A^* \circ Y_{ij}\} \right)_{1 \leq i, j \leq k} \geq 0$$

を示すとよい。(7) のことは、

$$\begin{pmatrix} I \otimes (\lambda_{ij}) + (Z_{ij}) & (X_{ij}) \\ (Y_{ij}) & I \otimes (\lambda_{ij}) - (Z_{ij}) \end{pmatrix} \geq 0$$

と同値であり、(8) のことは

$$I \otimes (\lambda_{ij}) + \frac{1}{2}\{(A \otimes J_k) \circ (X_{ij}) + (A^* \otimes J_k) \circ (Y_{ij})\} \geq 0$$

となる。したがって、仮定より $(Y_{ij}) = (X_{ij})^*$ と

$$(9) \quad I \otimes (\lambda_{ij}) \geq \operatorname{Re}\{e^{i\theta}(X_{ij})\} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

がわかる。また、 $(\lambda_{ij}) \geq 0$ だから、

$$(\lambda_{ij}) = U^* \cdot \operatorname{diag}(\rho_1, \dots, \rho_k) \cdot U$$

となるようなユニタリ行列 $U \in M_k$ と ρ_i ($i = 1, 2, \dots, k$) が存在する。そして、(9) のことより、

$$I \otimes \operatorname{diag}(\rho_1, \dots, \rho_k) \geq \operatorname{Re}\{e^{i\theta}(I \otimes U) \cdot (X_{ij}) \cdot (I \otimes U^*)\}$$

となる。したがって、先の numerical radius の性質から、

$$w\left(\left(I \otimes \operatorname{diag}(\rho_1, \dots, \rho_k)^{-1/2} \cdot U\right) \cdot (X_{ij}) \cdot \left(I \otimes U^* \cdot \operatorname{diag}(\rho_1, \dots, \rho_k)^{-1/2}\right)\right) \leq 1$$

がでて、よって $\|S_{A \otimes J_k}\|_w \leq 1$ だから

$$I \otimes (\lambda_{ij}) + \operatorname{Re}(A \circ X_{ij}) \geq 0$$

が示せる。■

次の補題を示すのに、以下の2つの定理が必要である。 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ をヒルベルト空間上の有界線形作用素全体からなる C^* 代数とする。

ARVESON'S THEOREM. $\mathcal{M}$ を C^* 代数 $\mathcal{A}$ の部分空間として、 $\mathcal{A}$ の単位元を含み、 $*$ 演算に閉じているとする。また、 Φ を $\mathcal{M}$ から $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ への *unital* な完全正写像とすると、 Φ を拡張し $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ への *unital* な完全正写像 $\tilde{\Phi}$ が存在する。

STINESPRING'S THEOREM. $\mathcal{A}$ を単位元 1 を持つ C^* 代数として Φ を $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ への完全正写像とする。このとき、ヒルベルト空間 $\mathcal{K}$ と $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ への *unital* $*$ 準同型写像 π と $\|\Phi(1)\| = \|V\|$ なる $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への有界線形写像 V があって、

$$\Phi(a) = V^* \pi(a) V \quad (a \in \mathcal{A})$$

を満たす。

これらの証明については [6] を参照。

補題 5. $\|S_A\|_w \leq 1$ とすると、ヒルベルト空間 $\mathcal{K}$ と C^n から $\mathcal{K}$ への線形写像 $\tilde{B}, \tilde{C}$ があって、

$$(10) \quad A = \tilde{B}^* \tilde{C}$$

と

$$(11) \quad \tilde{B}^* \tilde{B} = \tilde{C}^* \tilde{C}, \quad \tilde{B}^* \tilde{B} \circ I \leq I$$

を満たす。

証明. (6) によって定義された $\mathcal{M}$ から $M_n \simeq \mathcal{B}(C^n)$ への線形写像 Φ は補題 4 より *unital* 完全正写像であるから、Arveson の定理と Stinespring の定理からヒルベルト空間 $\mathcal{K}$

と C^* 代数 $M_2(M_n)$ から $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ への $*$ 準同型写像 π , C^n から $\mathcal{K}$ への線形写像 V があって,

$$\Phi \left(\begin{pmatrix} \lambda I + Z & X \\ Y & \lambda I - Z \end{pmatrix} \right) = V^* \cdot \pi \left(\begin{pmatrix} \lambda I + Z & X \\ Y & \lambda I - Z \end{pmatrix} \right) \cdot V$$

を満たす. このことより,

$$V^* \cdot \pi \left(\begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot V = \frac{1}{2} A \circ X$$

$$V^* \cdot \pi \left(\begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot V = V^* \cdot \pi \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix} \right) \cdot V$$

そして, $V^*V = I$ となることがわかる. $\{e_j\}$ を C^n の自然な直交基底としよう. $\tilde{B}, \tilde{C}$ を次の式で定義する.

$$\tilde{B}e_j = \sqrt{2/n} \sum_{p=1}^n \pi \left(\begin{pmatrix} E_{pj} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot Ve_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$\tilde{C}e_j = \sqrt{2/n} \sum_{p=1}^n \pi \left(\begin{pmatrix} 0 & E_{pj} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot Ve_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

ただし, ここで $E_{ij} = e_i \otimes e_j^*$ とする. この2つの式から, $i = 1, 2, \dots, n$ に対して

$$\begin{aligned} \langle \tilde{B}^* \tilde{C}e_j | e_i \rangle &= \frac{2}{n} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \langle V^* \cdot \pi \left(\begin{pmatrix} E_{ip} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \pi \left(\begin{pmatrix} 0 & E_{qj} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot Ve_j | e_i \rangle \\ &= 2 \langle V^* \cdot \pi \left(\begin{pmatrix} 0 & E_{ij} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot Ve_j | e_i \rangle = a_{ij}, \end{aligned}$$

がいえて, 従って $\tilde{B}^* \tilde{C} = A$ がいえる. さらに, $i, j = 1, 2, \dots, n$ に対して

$$\langle \tilde{B}^* \tilde{B}e_j | e_i \rangle = 2 \langle V^* \cdot \pi \left(\begin{pmatrix} E_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot Ve_j | e_i \rangle$$

と

$$\langle \tilde{C}^* \tilde{C}e_j | e_i \rangle = 2 \langle V^* \cdot \pi \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{ij} \end{pmatrix} \right) \cdot Ve_j | e_i \rangle$$

がいえて, $\tilde{B}^* \tilde{B} = \tilde{C}^* \tilde{C}$ である. また,

$$\begin{aligned} 2 \langle \tilde{B}^* \tilde{B} e_j | e_j \rangle &= \langle \tilde{B}^* \tilde{B} e_j | e_j \rangle + \langle \tilde{C}^* \tilde{C} e_j | e_j \rangle \\ &= 2 \langle V^* \cdot \pi \left(\begin{pmatrix} E_{jj} & 0 \\ 0 & E_{jj} \end{pmatrix} \right) \cdot V e_j | e_j \rangle \\ &\leq 2 \langle V^* V e_j | e_j \rangle = 2 \end{aligned}$$

となり, 結局 $\tilde{B}^* \tilde{B} \circ I \leq I$ が成り立つ. ■

補題 6. $\|S_A\|_w \leq 1$ とすると,

$$A = B^* W B$$

と

$$B^* B \circ I \leq I, \quad W^* W \leq I$$

を満たすような $B, W \in M_n$ が存在する.

証明. 補題 5 から, (9), (10) を満たすような C^n から ヒルベルト空間 $\mathcal{K}$ への線形写像 $\tilde{B}, \tilde{C}$ が存在する. このとき,

$$|\tilde{B}| \equiv (\tilde{B}^* \tilde{B})^{1/2} = (\tilde{C}^* \tilde{C})^{1/2} \equiv |\tilde{C}|$$

となる.

$B \equiv |\tilde{B}|$ とすると, $B^* B \circ I = \tilde{B}^* \tilde{B} \circ I \leq I$ である.

次に, $\tilde{B} = UB, U^* U = I$ として, $\tilde{C} = VB, V^* V = I$ となるような C^n から $\mathcal{K}$ への線形写像 U, V が存在する. $W \equiv U^* V$ としよう. このとき, W が縮小写像であることはすぐわかり, また,

$$A = \tilde{B}^* \tilde{C} = B^* U^* V B = B^* W B$$

となる. ■

補題 7. もし, $\begin{pmatrix} R & A \\ A^* & R \end{pmatrix} \geq 0$ が, $R \circ I \leq I$ を満たすある $(0 \leq) R \in M_n$ で成り立つならば, $\|S_A\|_w \leq 1$ である.

証明. $X \in M_n$ を $w(X) \leq 1$ であるとしよう. 補題 3 より,

$$\begin{pmatrix} I+Z & X \\ X^* & I-Z \end{pmatrix} \geq 0$$

となる $Z \in M_n$ が存在する. このとき, Schur の定理 ([3] を参照) から,

$$\begin{pmatrix} R \circ (I+Z) & A \circ X \\ A^* \circ X^* & R \circ (I-Z) \end{pmatrix} \geq 0$$

がいえる. ここで, $R \circ I \leq I$ だから $U \equiv R \circ Z$ として,

$$\begin{pmatrix} I+U & A \circ X \\ A^* \circ X^* & I-U \end{pmatrix} \geq 0$$

がいえて, 再び補題 3 を用いると $w(A \circ X) \leq 1$ がいえる. 従って, $\|S_A\|_w \leq 1$ となる. ■

4. 定理と Haagerup の定理 の証明

定理の証明. $(1)_w \implies (2)_w$ は補題 6 である.

$(2)_w$ と $(3)_w$ の同値性は $B = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ とするとよい.

$(2)_w \implies (4)_w$ は $R \equiv B^* B$ とおくことにより示される.

$(4)_w \implies (1)_w$ は補題 7 によって示される. ■

Haagerup の定理に移ろう.

$(2), (3), (4)$ の同値性と $(1) \implies (4)$ は [6] で我々のと同様な方法で示されている. しかしながら, $(1) \implies (4)$ の Haagerup 自身の証明については公表されていない.

この証明を与えるのに, 次の補題が必要である.

補題 8. $A = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると

$$\|S_A\|_\infty = \|S_A\|_w \quad (A, 0 \in M_n)$$

証明. (1) より $2n \times 2n$ 行列 $\begin{pmatrix} B & D \\ C & E \end{pmatrix}$ に対して

$$2w \left(\begin{pmatrix} B & D \\ C & E \end{pmatrix} \right) \geq \left\| \begin{pmatrix} B & D \\ C & E \end{pmatrix} \right\|_\infty \geq \left\| \begin{pmatrix} 0 & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \|D\|_\infty$$

がいえ。一方,

$$w \left(\begin{pmatrix} 0 & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \|D\|_{\infty}.$$

が知られている (Holbrook [2] 参照) から,

$$\begin{aligned} \|S_{\mathbf{A}}\|_w &= \sup \left\{ w \left(\begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} B & D \\ C & E \end{pmatrix} \right) : w \left(\begin{pmatrix} B & D \\ C & E \end{pmatrix} \right) \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ w \left(\begin{pmatrix} 0 & A \circ D \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) : \|D\|_{\infty} \leq 2 \right\} \\ &= \sup \left\{ \frac{1}{2} \|A \circ D\|_{\infty} : \|D\|_{\infty} \leq 2 \right\} \\ &= \|S_{\mathbf{A}}\|_{\infty}. \end{aligned}$$

がわかる. ■

Haagerup の定理での (1) $\implies$ (4) の証明. $\|S_{\mathbf{A}}\|_w = 1$ とする. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると, 補題 8 から, $\|S_{\mathbf{A}}\|_{\infty} = \|S_{\mathbf{A}}\|_{\infty} = \|S_{\mathbf{A}}\|_w$ だから, 我々の定理から

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & 0 & A \\ R_{21} & R_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{11} & R_{12} \\ A^* & 0 & R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \geq 0$$

であり,

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \geq 0, \quad R_{ii} \circ I \leq I \quad (i=1,2)$$

となるような $R_{ij} \in M_n(i, j=1,2)$ が存在する. よって, $R_1 = R_{11}, R_2 = R_{22}$ とすると,

$$\begin{pmatrix} R_1 & A \\ A^* & R_2 \end{pmatrix} \geq 0, \quad R_1 \circ I \leq I, \quad R_2 \circ I \leq I$$

がいえ。即ち, (4) が成立する. ■

5. 定理の応用

系 1 .

$$\|S_A\|_\infty \leq \|S_A\|_w \leq 2\|S_A\|_\infty \quad (A \in M_n).$$

証明. 左側の不等式を示すのに, $\|S_A\|_w = 1$ としよう. このとき, 条件 (4) は条件 (4)_w から $R_1 = R_2 = R$ とすることによって導かれる. 右側の不等式は (1) より簡単に示される. ■

Johnson [4] によって,

$$w(A \circ B) \leq 2w(A) \cdot w(B) \quad (A, B \in M_n)$$

が示された. このことは,

$$\|S_A\|_w \leq 2w(A) \quad (A \in M_n)$$

と同値であるが, [5]で述べている Okubo の次の結果はこの改良である. これを我々の定理から導く.

系 2 .

$$\|S_A\|_w \leq \|A\|_\infty \quad (A \in M_n).$$

証明. $\|A\|_\infty = 1$ としよう. このとき, $R = I$ とすると (4) が成り立つ. ■

系 3 . A がエルミート行列 のとき, $\|S_A\|_\infty = \|S_A\|_w$ である.

証明. $\|S_A\|_\infty = 1$ としよう. Haagerup の定理から, (4) を満たす $0 \leq R_1, R_2 \in M_n$ が存在する. $A = A^*$ だから, $R = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$ とおくと (4)_w が成り立つ. 従って $\|S_A\|_\infty \geq \|S_A\|_w$ である. 逆の不等式は, 系 1 . から導かれる. ■

系 4 . 半正値行列 $A = (a_{ij}) \geq 0$ に対しては,

$$\|S_A\|_w = \max_i a_{ii}$$

である.

証明. $A \geq 0$ のとき,

$$\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \geq 0$$

から $\|S_A\|_w \leq \max_i a_{ii}$ は我々の定理よりいえる. 逆の不等式は $a_{ii} = w(S_A(E_{ii}))$ ($i = 1, \dots, n$) から導かれる. ■

系 5. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix}$ とすると,

$$\|S_A\|_\infty = \|S_{\mathbf{A}}\|_w \quad (A \in M_n)$$

証明. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix}$ がエルミートだから,

$$\|S_A\|_\infty = \|S_{\mathbf{A}}\|_\infty \quad (A \in M_n)$$

を示すと十分である. これは, ノルムの定義と

$$\left\| \begin{pmatrix} B & D \\ C & E \end{pmatrix} \right\|_\infty \geq \left\| \begin{pmatrix} 0 & D \\ C & 0 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max\{\|C\|_\infty, \|D\|_\infty\}$$

を用いて簡単に示される. ■

系 6. $A \in M_n$ をユニタリー行列とすると $\|S_A\|_\infty = \|S_A\|_w = 1$.

証明. $\|S_A\|_w \leq 1$ であることは補題 2 からいえる. 一方, A がユニタリーならば, A と $\bar{A}$ の Schur 積 $A \circ \bar{A}$ は doubly stochastic だから $\|A \circ \bar{A}\|_\infty \geq 1$ となる. 故に, $\|\bar{A}\|_\infty = \|A\|_\infty = 1$ から, $\|S_A\|_\infty \geq 1$ が示され, 従って補題 1 を用い系が証明できる. ■

系 7. $A \in M_n$ に対して

$$(11) \quad \|S_{|A|+|A^*|}\|_w \geq \|S_A\|_w$$

が成立する.

A が正規行列 (即ち, $A^*A = AA^*$) ならば

$$\|S_{|A|}\|_w \geq \|S_A\|_w$$

である.

証明. 不等式 (11) は, 系 4 と

$$\begin{pmatrix} |A| + |A^*| & A \\ A^* & |A| + |A^*| \end{pmatrix} \geq 0$$

が成り立つことから.

A が正規ならば, 定義より $|A| = |A^*|$ だから,

$$\begin{pmatrix} |A| & A \\ A^* & |A| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A^*| & A \\ A^* & |A| \end{pmatrix} \geq 0$$

だから, $|A| + |A^*|$ のかわりに $R = |A|$ をとるとよい.

例 3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ としよう. ユニタリー行列 $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ を用いて,

$$A = U \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot U^* \text{ とできるから}$$

$$w(A) = w\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1$$

かつ,

$$\|A\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 2$$

である. 従って, 系 2 より, $\|S_A\|_w \leq \|A\|_\infty = 2$ となる. 一方で, $S_A(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$w\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 2$ だから, $\|S_A\|_w = 2$ となる.

また, $U \in M_2$ をユニタリー行列とすると, $A \circ U$ はユニタリー行列になり,

$$\|S_A\|_\infty = \sup\{\|A \circ U\|_\infty : U \in M_2; \text{ユニタリー}\} = 1$$

である.

さらに, $|A| = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $|A^*| = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ となるから,

$$\|S_{|A|+|A^*|}\|_w = \|S_{2I}\|_w = 2 = \|S_A\|_w = 2\|S_A\|_\infty$$

となるから, 系 1 と (11) の不等式は最良である.

[注意] Haagerup の定理との類似を考えると, $(2)_w$ は,

$(2)'_w$ $B^*B = C^*C$ かつ, $B^*B \circ I \leq I$ となる $B, C \in M_n$ が存在して, $A = B^*C$ とできる.

となることが望ましい.

このことは, $(2)_w$ で縮小写像 W がユニタリーにとれば正しいことがわかるが, 中村美浩氏が次の例でこれは正しくないことを示してくれた.

例 4. $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ としよう. 上の例のように, $\|S_A\|_w = 1$ だから, 仮に $(2)'_w$ が正しいとすると,

$B^*B = C^*C, B^*B \circ I \leq I$ で, かつ $A = B^*C$ となる $B, C \in M_n$ が存在する.

このとき, B^*B の対角成分が 1 以下で, 少なくともひとつは 1 であること, また,

$$\begin{pmatrix} B^*B & A \\ A^* & B^*B \end{pmatrix} \geq 0$$

であることを用いると, B^*B が正則な対角行列であることがわかる. したがって, B, C が正則であり, $A = B^*C$ も正則となり, これは, A が正則でないことに矛盾する.

REFERENCES

1. T. Ando, *On the structure of operators with numerical radius one*, Acta Sci. Math. **34** (1973), 11–15.
2. J. A. R. Holbrook, *On the power-bounded operators of Sz.-Nagy and Foiaş*, Acta Sci. Math. **27** (1968), 297–310.
3. R. A. Horn and Ch. R. Johnson, "Matrix Analysis," Cambridge U. P., Cambridge UK, 1985.

4. Ch. R. Johnson, *Hadamard products of matrices*, Linear Multilinear Alg. **1** (1974), p. 295–307.
5. K. Okubo, *Hölder-type norm inequalities for Schur product of matrices*, Linear Alg. Appl. **91** (1987), p. 13–28.
6. V. I. Paulsen, “Completely Bounded Maps and Dilation,” Pitman Research Notes in Math. 146, Longman, Essex UK, 1986.