

ホモトピー-球面上の involution と Kervaire invariant について

横浜国大 エ 北田泰彦

ホモトピー-球面上の involution の存在、球面と射影空間との積空間に対する inertia group の問題、射影空間の q 重 suspension によって得られる空間への normal map の Kervaire invariant の問題、これらの関連を以下において考察する。

次の3つの命題を考える。ただし $0 \leq q \leq 2k$ とする。

(A) [surgery, normal map の立場]

Kervaire invariant で与えられる surgery obstruction map

$$c : [D^{q+1} \times P^{4k+1-q} / S^q \times P^{4k+1-q}, G/O] \rightarrow \mathbb{Z}_2$$

は non-trivial map である。

(B) [involution の立場]

Homotopy $(4k+1)$ sphere で non-zero Kervaire invariant をもつ parallelizable manifold を bound するもの $\sum_k^{4k+1}$ (以下 Kervaire sphere とよぶ) 上の involution で

その固定点集合が自然な sphere S^8 と diffeo. となるものが存在する.

(C) [inertia group の立場] Kervaire sphere Σ_K^{4k+1} は $S^8 \times P^{4k+1-8}$ に trivial に作用する.

以上の命題に関し既に知られていることは次の通りであり、いずれも 8 が奇数の場合についてである。すなわち、 $8 = 1, 5, 13, \dots$ では $(8+1)$ 次元 ^{almost} parallelizable closed manifold で Kervaire invariant $\neq 0$ なるものが存在が知られていることから、(A) が成り立つ。この場合、以下の定理 1 によれば (B), (C) も成立することかわかるが、(B) については Brieskorn sphere 上の involution によっても直接的な例が示せる。

8 が偶数の場合には何も実のある結果は (A), (C) に関してはない。ただ次の 2 点に注目する。

i) (B) は $8 = 2k$ のとき成り立つ。

$$\Sigma_K^{4k+1} = \{(z_0, z_1, \dots, z_{2k+1}) \mid z_0^2 + z_1^2 + \dots + z_{2k+1}^2 = 0\} \cap S^{4k+3}$$

上の involution $(z_0, z_1, \dots, z_{2k+1}) \mapsto (\bar{z}_0, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{2k+1})$

を考えればよい。

ii) $8 = 0$ のとき、(A), (B), (C) はすべて同値な問題となる。(Browder - Lopez de Medrano の問題)

§ 1. 結果

定理 1. (A) が成り立てば、(B) 及び (C) が成り立つ。

定理 2. Homotopy 球面 Σ^{2n+1} ($n \geq 3$) が involution T で $\text{Fix } T = S^n$ (standard sphere) なるものをもてば、
 $(S^n \times P^{n+1}) \# \Sigma$ と $S^n \times P^{n+1}$ は diffeo である。

系. $(S^{2k} \times P^{2k+1}) \# \Sigma_k^{4k+1}$ と $S^{2k} \times P^{2k+1}$ とは diffeo である。

§ 2. 証明.

[定理 1 の証明]

(A) $\Rightarrow$ (C) は Wall の surgery exact sequence

$$[D^{8+1} \times P^{4k+1-8} / S^8 \times P^{4k+1-8}, G/O] \xrightarrow{c} \mathbb{Z}_2 \rightarrow h\mathcal{J}(D^8 \times P^{4k+1-8} / \partial)$$

より Σ_k^{4k+1} が $h\mathcal{J}(D^8 \times P^{4k+1-8} / \partial)$ に自明に作用することから明らかである。以下、(A) $\Rightarrow$ (B) の証明を述べる。

$$f: M^{4k+2} \rightarrow D^{8+1} \times P^{4k+1-8} \text{ rel. boundary}$$

は Kervaire obstruction $c(f) \neq 0$ の normal map とする。 $f \in D^{8+1} \times P^{4k-8}$ に transverse regular とし制限された normal map

$$f' = f|_{f^{-1}(D^{8+1} \times P^{4k-8})}: f^{-1}(D^{8+1} \times P^{4k-8}) \rightarrow D^{8+1} \times P^{4k-8} \text{ rel. } \partial$$

を考えると、 $\pi_1 = \mathbb{Z}_2$ 、 $4k+1$ 次元では常に surgery 可能であるから、 f' は homotopy 同値 $M'^{4k+1} \rightarrow D^{8+1} \times P^{4k-8}$ であ

ると仮定して一般性を失わない。このとき、 M' の M における closed tubular neighborhood を N とすると、 M' の自然な double cover $\tilde{M}'$ と、covering transformation による $\mathbb{Z}_2$ 作用により、 N は $\tilde{M}' \times_{\mathbb{Z}_2} D'$ と同一視できる。 E を $M - N$ の閉包とすると、 $M = N \cup E$ 、 $N \cap E \approx \tilde{M}'$ となる。そのとき、 $\partial E = S^8 \times D^{4k+1-8} \cup_{\varphi} \tilde{M}'$ であり、 $\tilde{M}'$ 上の involution (covering transformation) は φ により、 $S^8 \times S^{4k-8}$ 上の involution $(x, y) \mapsto (x, -y)$ に対応しているから、 $S^8 \times D^{4k+1-8}$ 上の involution $(x, y) \mapsto (x, -y)$ に拡張でき、 ∂E 上の involution T で $\text{Fix} = S^8$ なるものが得られた。
 $f|_E : E \rightarrow D^{8+1} \times D^{4k+1-8}$ は non-zero obstruction をもつ normal map なることより、 $c(E) \neq 0$ 、 ∂E は homotopy 球面である。よって Kervaire sphere ∂E 上の $\text{Fix } T = S^8$ なる involution が存在する。(証了)

[定理 2 の証明]

補題 3. Homotopy 球面 Σ^{2n+1} ($n \geq 3$) が $\text{Fix } T = S^n$ なる involution T をもつとき、 $\mathbb{Z}_2$ -diffeo

$$(\Sigma^{2n+1}, T) \approx S_t^n \times D_a^{n+1} \cup_{\psi} D_t^{n+1} \times S_a^n$$

が存在する。ここで添字 t, a はそれぞれ trivial involution, antipodal involution を表わし、 ψ は $\mathbb{Z}_2$ -equivariant diffeo.

$$S_t^n \times S_a^n \rightarrow S_t^n \times S_a^n \quad \text{である.}$$

(証明は S -cobordism theorem より明らかである)

さて、 ψ は $\text{diffeo. } S^n \times P^n \xrightarrow{\bar{\psi}} S^n \times P^n$ を引きおこす。 S^n の 1 点 $*$ を base point とするとき、 $\bar{\psi}|_{\{*\} \times P^n}$ は identity と仮定してよい。 $S^n = D_+^n \cup D_-^n$, D_+^n は $\{*\}$ を中心とする半球面とすると、 $\bar{\psi}|_{D_+^n \times P^n}$ はある $\alpha: P^n \rightarrow O(n)$ によって $\bar{\psi}(x, [y]) = (\alpha([y]) \cdot x, [y])$ と書ける。この α を用いて、 $D^{n+1} \times S^n$ の $\text{diffeo. } \alpha_1$ を $\alpha_1(x, y) = (\alpha([y]) \cdot x, y)$ と定義する。 $S^n \times D^{n+1} \bigcup_{\text{id}} D^{n+1} \times S^n$ の部分集合、 $D_+^n \times D^{n+1} \bigcup_{\text{id}} D^{n+1} \times S^n$ から $S^n \times D^{n+1} \bigcup_{\psi} D^{n+1} \times S^n$ の部分集合 $D_+^n \times D^{n+1} \bigcup_{\psi} D^{n+1} \times S^n$ への写像を $D_+^n \times D^{n+1}$ 上では "identity", $D^{n+1} \times S^n$ 上では α_1 とすることにより、 $S^n \times D^{n+1} \bigcup_{\text{id}} D^{n+1} \times S^n$ と $S^n \times D^{n+1} \bigcup_{\psi} D^{n+1} \times S^n$ は左辺の $D_-^n \times D^{n+1}$ を除いた部分で diffeomorphic となり、これを全体への diffeo に拡張する obstruction から $\Sigma \in \Gamma_{2n+1}$ を表わしている。

$$Q_0^{2n+1} = S^n \times P^{n+1} = S^n \times (S^n \times_{Z_2} D^1) \bigcup_{\text{id}} S^n \times D^{n+1}$$

$$Q_1^{2n+1} = S^n \times (S^n \times_{Z_2} D^1) \bigcup_{\psi^{-1}} S^n \times D^{n+1} \quad \text{とおく.}$$

$S^n \times (S^n \times_{Z_2} D^1) \subset Q_0$ から $S^n \times (S^n \times_{Z_2} D^1)$ への diffeo を $\bar{\alpha}_1(x, [y, \pm]) = (\alpha([y]) \cdot x, [y, \pm])$ で定義する。これは $\partial(S^n \times D^{n+1}) \subset Q_0$ から $\partial(S^n \times D^{n+1}) \subset Q_1$ への写像とみるとき $\partial(D_+^n \times D^{n+1})$ 上で identity となり、これは $D_+^n \times D^{n+1}$

上の diffeo に拡張できる。この diffeo を $D^n \times D^{n+1}$ への
 diffeo に拡張する obstruction が Σ であり、 Σ から、 Q_1 は
 $Q_0 \# \Sigma$ と diffeomorphic である。また一方、 $S^n \times D^{n+1} \subset Q_0$
 から $S^n \times D^{n+1} \subset Q_1$ への "identity" map は $S^n \times (S^n_{\mathbb{Z}_2} D')$
 の boundary 上では ψ によって与えられる。 ψ は
 $S^n \times S^n$ 上の $\mathbb{Z}_2$ -equivariant diffeo であったから、
 自然に $S^n \times (S^n_{\mathbb{Z}_2} D')$ 上の diffeo に拡張できる。このこと
 は Q_0 と Q_1 とが diffeo なることを示す。よって Q_0 と
 $Q_0 \# \Sigma$ とが diffeo となる。(証了)