

再構成問題とグラフの種数

関西学院大学（理）浅野考平（Kouhei Asano）

[I] 定義

グラフは単純グラフを考える。またグラフ G の頂点の個数を G の位数、辺の個数を G の大きさという。

1.1 （辺）再構成問題

(1) σ が hypomorphism of G onto H というのは、

$$\sigma: V(G) \rightarrow V(H), \text{ bijection}$$

s.t.

任意の頂点 v に対して、 $G-v \cong H-\sigma(v)$

(2) G から H への hypomorphism が存在するとき G と H は hypomorphic であるという。

1.1.1 再構成予想Ulam-Kelly 1941

G , H を位数3以上のグラフとする。 G と H が hypomorphic ならば
 G と H は同型である。

G と hypomorphic なグラフは互いに同型であるとき、 G は 再構成可能 (reconstructible) であるという。

注意

(1) [BH] のなかに「信頼すべき筋によると1941年に予想が提案された」という記述がある。

(2) $|G|=2$ のとき、成立しない。次の図を見れば明らかである。



(3) σ が edge-hypomorphism of G onto H

$\sigma: E(G) \rightarrow E(H)$, bijection

s.t.

任意の辺 e に対して、 $G - e = H - \sigma(e)$

(4) G から H への edge-hypomorphism が存在するとき G と H は edge-hypomorphic であるという。

1.1.2 辺再構成予想

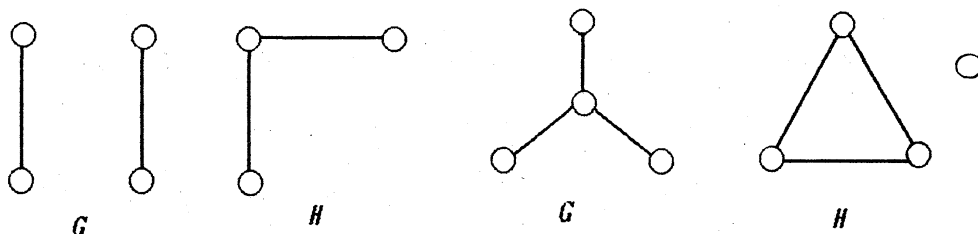
G , H を大きさ 4 以上のグラフとする。 G と H が edge-hypomorphic

ならば、 G と H は同型である。

G と edge-hypomorphic なグラフが互いに同型であるとき G は 辺再構成可能 (edge-reconstructible) であるという。

G が大きさ 3 のとき成立しない。

Example



1.2 頂点デッキ (deck), 辺デッキ (edge-deck)

$D(G)$ を G の部分グラフの族 $\{G - v: v \in V\}$ と定義し、頂点デッキ という。

$D'(G) = \{G-e : e \in E\}$ とし、辺デッキという。(D(G)はGの位数とおなじ個数の部分グラフを含み、 $D'(G)$ はGの大きさと同じ個数の部分グラフをふくむ。)

「グラフHがグラフGの(辺) 再構成グラフ (reconstruction, edge-reconstruction) である。」

$\Leftrightarrow$ Hの頂点(辺)デッキが、Gの頂点(辺)デッキと等しい。

再構成問題、(辺再構成問題)を頂点(辺)デッキを用いて、言い換えれば、

「Gの位数が3以上(大きさが4以上)ならば、Gの再構成(辺再構成)グラフは、Hと同型である。」ということになる。

以下、再構成問題を考えるときは位数3以上、辺再構成問題を考えるときは大きさ4以上のグラフを、対象とする。

1.3 認識可能性, 辺認識可能性

問題を弱める。もし再構成(辺再構成)予想が正しければ、頂点デッキ

(辺デッキ)によって、グラフの(同値類の)すべての性質が決定される。

(1)性質Pに対して、Gが性質Pをもつなら、Gの再構成グラフ(辺再構成グラフ)も性質Pをもつとき、Pは認識(辺認識)可能 (recognizable, edge-recognizable)であるという。

(2)グラフの族 classFに対しても、GがclassFに属するならば、再構成(辺再構成)グラフもクラスFの属するとき、クラスFは認識(辺認識)可能であるという。

(3)グラフの不変量に対しても同様に、「認識可能」、「辺認識可能」定義する。

●グラフのある族、クラスFに対して、クラスFが再構成(辺再構成)可能であるという証明は、2つの段階に分けることが考えられる。

①クラスFは認識(辺認識)可能である。

②クラスFに属するグラフGの再構成(辺再構成)グラフHが、クラスFに属するならば、Hは、Gと同型である。

注意

(1) F の任意のグラフが、②の性質を持つならば、「 F は弱(辺)再構成可能 (weakly reconstructible, -edge-) である。」という。

(2) 位相幾何的性質で規定したグラフの族に対して、上記の2つの問題を論じる。しかし、現在のところわずかな結果しかない。(後述)

[II] 基本結果

2.1 次数列の認識可能性とKellyの補題

2.1.1 定理

G の位数, 大きさ, 次数列は(辺)認識可能である

証明

① 認識可能であること

● G の頂点デッキ $D(G)$ を考える。

位数は明らかに認識可能である。

● 大きさ。

$V = \{v_1, \dots, v_n\}$ とする。 $G - v_i$ の大きさを m_i とする。 G の任意の辺 $e = (v_i, v_j)$ は $G - v_i$ および $G - v_j$ 以外の $D(G)$ に属する。 すなわち、 $n-2$ 個の $D(G)$ の元に属する。

故に $\sum \{m_i : 1 \leq i \leq n\} = (n-2)m$ である。

従って、 $m = \sum \{m_i : 1 \leq i \leq n\} / (n-2)$ となり、 $D(G)$ により決定される。

● 次数列

v_i の次数 $d(v_i) = m - m_i$ であるから、明らかに、次数列は、 $D(G)$ より決定される。

② 辺認識可能であること

位数, 大きさは明らかに辺認識可能である。

次数列については、かなり面倒で、次の定理を用いる。証明は[BCL]にもある。

2.1.2 定理 Kelly's Lemma [K]1957

G, F をグラフとし, F の位数は G の位数より小さいとする.

このとき, G の部分グラフで F と同型であるものの個数 $s(F, G)$ は認識可能である.

同様の方法で, 「 F の大きさが G の大きさより小さいとすると, $s(F, G)$ は辺認識可能である。」ことが証明できる.

注意

この定理より, ただちに, 位数 3 以上 (大きさ 4 以上) の正則グラフは再構成 (辺再構成) 可能であることがわかる.

2.2 連結性

2.2.1 定理

非連結なグラフは再構成可能である.

証明は, [BCL] 参照. また, G の連結度は $D(G)$ に属するグラフの連結度の最小値に 1 を加えたものであるから, 次の定理が成立する.

2.2.2 定理

連結度は認識可能.

2.3 樹木

再構成問題の最も古典的な結果として次の定理がある. 証明は [BCL] にもある.

2.3.1 定理Kelly, P.J. 1957 [K]

位数 3 以上の木は, 再構成可能である

2.4 再構成問題と辺再構成問題の関係

2.4.1 定理Greenwell, D.D. [Gr] 1971

G が孤立点を持たないとき, もし, G が再構成可能であれば,
辺再構成可能である.

注意

G が孤立点を持つとき, 明らかに再構成可能である. 一方, 孤立点を持つグラフがすべて辺再構成可能であれば, 任意のグラフは辺再構成可能である.

2.4.2 定理Harary-Palmer 1965 [HP] Hemninger 1968 [He]

G をサイズが 4 以上のグラフとする.

G が辺再構成可能 $\Leftrightarrow G$ の線グラフ $L(G)$ が再構成可能

← の証明が Harary-Palmer 1965, 証明は短い

→ の証明が Hemninger 1969

注意

この定理より, すべての線グラフが再構成可能であるならば, 再構成予想は正しい.

(線グラフには特徴があり, 線グラフでないようなグラフが存在する.)

また, 辺再構成予想がすべてのグラフについて正しいければ, 再構成予想も正しい.

[Ⅲ] グラフの種数と再構成問題

3.1 平面グラフ

3.1.1 定理 Giles 1974 [Gi]

外平面的グラフは再構成可能である。

在知られている最良の結果は以下の2つの定理である。これらの論文は連続して発表された。

3.1.2 定理 Fiorini and Lauri 1981 [FL1]

極大平面グラフは認識可能である。

3.1.3 定理 Lauri 1981 [L1]

極大平面グラフは、再構成可能である。

極大平面グラフで、最小次数が4以上であるグラフに対しては、Fiorini and Manvelが再構成可能であることを証明していた [FM]。この部分はこの種の定理の証明の方針をよ示していると思うので概略を述べる。（証明は、[FL1]の証明をもとにしている。）埋め込みに関する基本的な用語を説明する。

G をグラフ、 F を曲面とする。

$f_1, f_2: G \rightarrow F$ を埋め込みとする。 f_1, f_2 が同値

$\Leftrightarrow$ 適当な F の同相写像 h と G の自己同型写像 σ が存在して、

$$h \circ f_1 = f_2 \circ \sigma \quad (\text{像を重ねることができる。})$$

G の F への埋め込みが1つの同値類しかもたないとき、 G は一意的に埋め込み可能

(uniquely embeddable)であるという.

$f: G \rightarrow F$ を埋め込みとする. G の任意の自己同相写像 σ に対して適当な F の同相写像 h が存在して,

$h \circ f = f \circ \sigma$ となるとき, f は G の F への忠実 (faithful) な埋め込みという.

G から F への一意的かつ忠実に埋め込み可能であるとき, G の F への2つの埋め込み f_1, f_2 に対して, G の閉路 C が f_1 において領域の境界であるための必要十分条件は, f_2 において領域の境界であることである.

平面的グラフの埋め込みに関する次の古典的結果をもちいる.

3.1.4 定理 Whiteney 1932 [W] (根上による言い換え [N1])

3 連結平面的グラフは球面に一意的かつ忠実に埋め込み可能である.

3.1.5 定理 Chartland-Kaugars-Lick 1972 [CKL]

G が k 連結かつ最小次数 $\delta(G) \geq 1/2(3k-1)$ であれば, 適当な頂点 v が存在して, $G-v$ は k 連結である.

従って, G を最小次数が4以上のグラフとすると適当な頂点 v_0 が存在して $G-v_0$ は3 連結である.

3.1.6 補題

G を最小次数が4以上の3 連結グラフとする.

G が極大平面グラフであるための必要十分条件は, 任意の v に対して $G-v$ が $d(v)$ 表現可能であることである.

(k 表現(k -representation)とは, 1つの領域が k 角形でありそれを除いて, すべての領域は3角形であるような平面への埋め込みである.)

証明の概略.

必要条件であることは明らかであるので, 十分条件であることを証明する.

G の任意の頂点 v に対して, $G-v$ は $d(v)$ 表現を持つと仮定する.

①Chartlandの結果により, 適当な頂点 v に対して, $G-v$ は3連結である.

仮定により $G-v$ は $d(v)$ 表現可能である.

② $G-v$ の $d(v)$ -表現を考える. G において v に隣接している $d(v)$ 個の頂点がこの表現の $d(v)$ 角形領域の境界にあれば証明終了. v に隣接している頂点 w が k 角形領域にないと仮定し,

このとき, 適当な頂点 u ($u \neq v$) が存在して, $G-u$ が $K_{3,3}$ または, K_5 と同相な部分グラフをふくむことを証明する.

3.1.7 定理

最小次数が4以上の極大平面グラフの族は認識可能である.

証明

G を条件を満足するグラフとする.

G は3連結である. H を G の再構成グラフとする. すなわち, G の頂点デッキと H の頂点デッキは等しい. 従って, 任意の H の頂点 v に対して $H-v$ は $d(v)$ -表現をもつ.

故に, 補題により, H は極大平面グラフである.

3.1.8 定理

最小次数が4以上の3連結な極大平面グラフは, 再構成可能である.

証明

G を条件を満足するグラフとする。 H を G の再構成グラフとする。 H は最小次数が4以上の極大平面グラフである。(したがって、3連結) G, H を平面に埋め込む。

v を $G-v$ が3連結になるような頂点とする。Whitneyの定理より、 $G-v$ の埋め込みかたは唯一つである。一方、 $H-v \cong G-v$ であるから、 G の埋め込みから v を取り除いたものと、 H の埋め込みから v を取り除いたものは同じと考えて良い。

この埋め込みにおいて、 $d(v) (\geq 4)$ 角形の領域は唯一つ。 v はその領域内になければならない。

故に、 G と H は同型である。

注意

最小次数が4以上の極大平面グラフの族の認識可能性は、Whitneyの定理(3連結平面グラフがuniquely and faithfullyに埋め込み可能である)だけでは、証明できない。
補題2.6の証明が本質的)

3.2 その他

3.2.1 定理 [J. Lauri 1981] [L2]

- (1) 連結度3, 最小次数4以上射影平面の三角形分割は弱再構成可能。
- (2) 連結度3, 最小次数4以上のトーラスの三角形分割は弱再構成可能。

注意

この定理の条件は、連結度が3である。3連結グラフに対して証明しているのではない。

● 曲面の三角形分割(すなわち、曲面への極大埋め込みが存在するグラフ)の再構成問題に制限する。すなわち、

- (1) 曲面の三角形分割は認識可能か?

(2) 曲面の三角形分割は弱再構成可能か？

という、2つの問題を考える。

(1) は、次の予想を証明すれば良い。

3.2.2 予想 [L3]

G をグラフとする。任意の頂点 v に対して $G-v$ が曲面 F の $d(v)$ 表現をもてば、
 G は F の三角形分割である。

この予想の証明は一般には難しいと考えられる。平面に対する証明が、補題 2.6 である。そして、これは、Kuratowski の定理を本質的に用いている。射影平面が、次の目標であると思われるが、射影平面の Kuratowski type の定理 [A1], [A2] を直接もちいることは難しい。

(2) についても、射影平面がこの予想の解決に最も近い。

根上の次の結果（の証明）が本質的に利用可能であると思われる。

「 K_6 以外の 5 連結な射影平面の三角形分割（極大射影平面的グラフ）は、一意的かつ忠実に埋め込み可能である。[N2]」

[IV] グラフの種数と辺再構成問題

再構成問題に関する結果より、辺再構成問題の方が、良い結果がある。例えば、

4.1 定理 S.Fiorini J.Lauri [FL2]

4 連結平面グラフは、辺再構成可能である。

Fiorini が 1978 年に 4 連結最小次数が 5 である平面グラフは辺再構成可能であることを証明している。[F]

また、平面以外でも、射影平面の三角形分割について、解決されている。

4.2 定理 S.Fiorini and J. Lauri 1982[FL3]

- (1)射影平面の三角形分割は，辺再構成可能である。
- (2)連結度3で，ある曲面の三角形分割であるようなグラフは，
辺再構成可能である。

注意

(2)は実際には，連結度3，かつ，任意の3-cut $[a, b, c]$ はクリークであるようなグラフの族は辺再構成可能であることを証明し，連結度3の三角形分割がこの条件を満足していることを証明したのに過ぎない。

辺再構成問題に関しては，[L3]がそのテクニックを含めて解説しているので，ここでは述べないことにする。

[V] 文献

以下の文献表は，主に，曲面の埋め込みと再構成問題の両方に関連した文献に限定した。[BH]，[Na]は，再構成問題一般に対する概説であり，詳しい文献表がある。ただし，少し古いので，最新のものは含まれていない。[L3]は新しいものも含まれている。

[A1]D.Archdeacon, A Kuratowski theorem for the projective plane, Thesis, The Ohio State University (1980)

[A2]D.Archdeacon, A Kuratowski theorem for the projective plane, J.Graph Theory 5(1981), 243-246

[BCL]M.Behzad, G.Chatland and L.Lesniak-Foster, Graphs and Digraphs, Prindle (1979?)日本語訳 グラフとダイグラフの理論 秋山-西関訳(共立)1981

[BH]J.Bondy and R.L.Hemminger, Graph reconstruction - A survey, J.Graph Theory 1(1977) 227-268.

[CKL]G.Chatland, A.Kaugars, D.R.Lick, Critically n-connected graphs, Proc.

Amer. Math. Soc. 32(1972) 63 - 68.

[F]S.Fiorini, On the edge-reconstruction of planar graphs, Math.Proc.Cambridge Philos.Soc.83(1978) 31-35

[FL1]S.Fiorini, and J.Lauri, The reconstruction of maximal planar graphs I. recognition, J. Combin. Theory(B)30 (1981) 188-195.

[FL2]S.Fiorini and J.Lauri, Edge-reconstruction of 4-connected planar graphs, J. Graph Theory, &(1982) 33-42

[FL3]S.Fiorini and S.Lauri, On the edge reconstruction of graphs which triangulate surfaces, Quart.J.Math.33(1982) 191-214.

[FM]S.Fiorini and B.Mandel, A Theorem on planar graphs with an application to the reconstruction problem II, J. Combin. Inform. and Syst. Sci.3(1978)200-216.

[Gi]W.B.Giles, The reconstruction of outerplanar graphs, J. Combin.Theory(B)16 (1974) 215-226.

[Gr]D..D.Greenwell, Reconstructing graphs, Proc. Amer. Math. Soc. 30 (1971) 431-433.

[HP]F.Harary and E.M.Palmer, A note on similar points and similar lines of a graph, Rev. Roumaine Math. Pures et Appl. 10 (1965) 1489- 1492.

[He]R.L.Hemminger, On reconstructing a graph, Proc. Amer. Math. Soc. 20 (1969) 185-187.

[L0]J.Lauri, Edge-reconstruction of planar graphs with minimum valency 5, J. Graph Theory 3(1979)269-286.

[L1]J.Lauri, The reconstruction of maximal planar graphs II. reconstruction, J. Combin.Theory(B)30 (1981) 196-214.

[L2]J.Lauri, The reconstruction of planar graphs, Doctoral Thesis, The Open University, England 1981.

[L3])J.Lauri, Graph reconstruction-Some techniques and new properties, ARS combinatoria 24B (1987) 35-61.

[K]P.J.Kelly, A congruence theorem for trees, Pacific J.Math. 7(1957) 961-968.

[Na]C.St.J.A.Nash-Williams, The reconstruction problem, Selected Topics in Graph Theory(L.W.Beineke and R.J. Wilson,eds),Academic Press, London, 1978, 205-236.

[N1]S.Negami,Uniqueness and faithfulness of embedding of graphs into surfaces, Dissertation. Tokyo Institute of Technology 1985.

[N2]S.Negami, Uniquely and faithfully embeddable projective-planar triangulations, J. Combin. Theory(B)36 (1984) 189-193.

[W]H.Whitney, Congruent graphs and the connectivity of graphs, Amer.J.Math. 54 (1932) 150-168.