

発展方程式について

UC Berkeley 加藤 敏夫

§1. Banach 空間¹⁾ X において, 準線型な発展方程式の初期値問題

$$du + A(u)u = 0, \quad 0 \leq t \leq ?, \quad (1)$$

$$u(0) = \phi \quad (2)$$

について総合的な考察をする. ここで du は $du(t)/dt$ の略で, 詳しく書けば, (1) が $du(t)/dt + A(u(t))u(t) = 0$ を意味することはいうまでもない. 未知函数 u は X の値をとり, $A(w)$ は X の線型作用素 (一般に非有界) で $w \in W$ に依存する (W は X のある部分集合). 故に未知函数 u の値は実は W に含まれる. 同い理由で $\phi \in W$ である. 従来この習慣に従って, 以下 $A(w)$ が X 内の C_0 -型半群の生成素の符号をかえたもの (これを単に生成素とよぶ) である場合を考察する. これが空間 X の主な役目である.

もっと一般に

§2. 少し横道にそれるが, (1) の右辺が 0 でなく $f(u)$ の形である場合も, 形式

的には (1) の形に帰着できることを注意しておく. それには問題をかきかえて

1) 以下すべての Banach 空間は^{実で} 回帰的かつ可分とする.

$$d\begin{pmatrix} u \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A(u) & -f(u) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ r \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} u \\ r \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} \phi \\ 1 \end{pmatrix},$$

とすればよいのである。こゝに r は数値関数である。

§3. 問題(1-2)を解くのに簡単な逐次近似法、あるいはそれと大体同等な方法として、不動点定理を用いることを考える。

そのため(1)を線型化して

$$du + A^v(t)u = 0, \quad [A^v(t) = A(v(t))] \quad (3)$$

とし、(3-2)を解く。ただし $v: t \mapsto v(t)$ はある区間 $[0, T']$ で定義され、 W の値をとる適当な関数族 E に属するものとする。(3-2)が解けたとすれば、解 u は v で定まるから半族 $u = \exp v$ が定まる。もし v が E を E にうつし、適当な条件（例えば E が負偏距離空間で v が縮小性をもつ）が満たされれば、 v の不動点として(1-2)の解 u が $[0, T']$ の上で求まるであろう。

§4. この計画を遂行するにはいろいろ準備と仮定がいる。(3-2)を解くには線型発展方程式の理論を用いる。その種の理論は多数あるが、上述のようにここでは半群理論にもとづくものを用いる（田辺[1]、土増田[2]などに詳述されているから参照されたい）。

まず生成子の族 $A^v = \{A^v(t)\}$ が安定であることは弱く

不可欠の条件である。それを保証するためには、通常 $A^\nu(t)$ X の上 が 連続半群 の生成素であるか、もう少し一般に、「 t 」に依存 する X の同値ノルムに關して、連続半群 の生成素であることが、實際上不可欠であろう。

このための便利な仮定としては、 X の同値ノルム $N(X)$ の全体に自明な方法で距離を導入し、 W から $N(X)$ への「 t 」を字像 $w \mapsto \| \cdot \|_w$ があって、 $A(w)$ が $X_w = (X, \| \cdot \|_w)$ で連続半群の生成素とする = $([1, 2]$ の 「 t 」 $A(w) \in G(X_w, 1, \beta)$) を仮定する。（「 t 」の「 t 」は §6 で詳しく述べる。）

§5、(3-2) を解くには更に条件がいる。比較的一般的な条件として、 X に稠密かつ連続に埋め込まれた Banach 空間 Y があって、 $A^\nu(t)$ -許容に与っている（[1, 2] 参照。粗く言えば $A^\nu(t)$ が Y で生成素に与る = t ）のみならず、 Y で定義系を作ると仮定する。更に $Y \subset D(A^\nu(t))$ で $t \mapsto A^\nu(t) \in B(Y, X)$ がノルム連続であるとす。

これらの仮定は字像 $w \mapsto A(w)$ に關する類似の仮定から導くことができる。技術的に便利な仮定として、 Y から X への同型字像 S があって

$$S A(w) S^{-1} = A(w) + B(w), \quad B(w) \in B(X), \quad (4)$$

とすると都合がよい。

§6. このように仮定して (3-2) が解けると、解は A^ν

を通して v によるから, 写像 $\Phi: v \mapsto u = \Phi v$ が定まる.
 不動点定理をあてはめるには, Φ の値域が E に含まれるよ
 うにしなければならぬ. このためには上に導出した E の
 定義を明確に

しなればならぬ. この調節はかぎり微妙な取り扱いを要求するが, 結
 局次のようにして可能とする. $X \supset Z \supset Y$ の v にも v と
 つの Banach 空間 Z を導入して (λ_A, μ_A は定数)

$$A(w) \in B(Y, Z), \quad \|A(w)\|_{Y, Z} \leq \lambda_A, \quad (5)$$

$$\|A(w) - A(w')\|_{Y, Z} \leq \mu_A \|w - w'\|_Z, \quad (6)$$

と仮定する ((6) で Z を X で置きかえてもよい).

同時に $\varphi \in Z$ の v に対する $\| \cdot \|_w$ のための φ を次のように規定
 する ($\| \cdot \|_X$ は X の標準ノルム).

$$\left. \begin{aligned} d(\| \cdot \|_w, \| \cdot \|_{w'}) &= \mu_N \|w - w'\|_Z, \\ d(\| \cdot \|_w, \| \cdot \|_X) &\leq \lambda_N. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

最後に, W は Y の開集合であると仮定する.

このように仮定の下で, $v \in E$ の正確な条件は, $|v(t) - \phi|_Y$
 $\leq \rho', \quad 0 \leq t \leq T'$ (ただし ρ' は十分小さい定数), かつ v は Z ノルムで
 Lipschitz 連続であることとする. E は Z -

ノルムによる一様ノルムによって ∞ 距離空間となり, ρ', T'
 を適当にとれば, Φ が E 内の縮小写像となって, 不動点定
 理が使えることになり, 問題 (1-2) の解 u (たゞし t について

局所的) の存在と一意性が証明される.

§ 7. u の作り方からみて, 写像 $\phi \mapsto u(\phi)$ は
 局所的に Lipschitz
 Σ -ノルムに於いては連続 (ただし $\phi \in W \subset Y$ なる制限の下
 で) である. これが Y -位相に於いても連続であることを示
 するには, 更に仮定が要する. 例えは

$$\|B(w) - B(w')\|_{X,X} \leq \mu_B \|w - w'\|_Y \quad (8)$$

が十分である. この Y -連続性はかなり興味のある結果で,
 その証明には線型微分方程式の解に於いての詳しい評価式を
 必要とする. 簡単な具体的例題に於いても, これと直接に証
 明することは必ずしも容易ではない. なお Y -連続性はそ
 の以上一般には精密化できない (例えは Y -ノルムでの
 Hölder 連続性を証明することはできない). これにつ
 ては Kato [3] に反例がある.

§ 8. 以上の理論の詳細は Kato [3, 4], Hughes - Kato - Marsden [5] などに、応用を含めて述べられている。典型的な例では、 $A(w)$ は w に依存する係数をもつ R^m の 1 階 微分作用素系であって、それが生成系に与るのは L^2 の $X = L^2(R^m)$ (あるいは同様の空間の直積) をとって、 w が C^1 -級関数になる場合である。故に $W \subset C^1(R^m)$ となる。他方条件 (4) ~ (8) を満足させるためには、 $Y = H^s(R^m)$, $Z = H^{s-1}(R^m)$ (Sobolev 空間) とするのが適当である。ただし Y の部分集合 W が C^1 に含まれるためには、 $s > m/2 + 1$ と取らねばならない。通常の波動方程式 (非線形弾性論を含む) や、一般相対論などでは $m=3$ であるから、 $s > 5/2$ がその条件である。従って $s \geq 4$, $s \geq 3$ などの条件が知られていたが、 $s > 5/2$ は一般には最良の結果と思われる、(これは Friedrichs [6] もみられた。) $[0, \infty[\times R^m$

§ 9. 上の理論は特に Λ での準線型双曲型および放物型の偏微分方程式に有効であるが、 R^m に $\Omega \subset R^m$ でおきかえ、境界条件が現われるようになると無力になる。その主な理由は、(4) を満足する S がみつからないことにある。本来 ための便利な仮定である (4) は Y が $A(w)$ -許容であることを示すが、境界条件を含む微分作用素 $A(w)$ が $X = L^2(\Omega)$ で生成系である場合、高次の Sobolev 空間 $Y = H^s(\Omega)$ が $A(w)$ -許容であることは稀である。

制限しえられる部分空間を Y と

る。 $H^3(\Omega)$ を適当な境界条件で入すれば、それは可能であるかもしれないが、 Y が Ω によりめよいにすることは困難であろう。困難は本質的に初期条件と境界条件との適合性 (compatibility) に関係しており、容易に克服できるものではない。

それで初期値-境界値混合問題に適用できるような発展方程式の理論を作るためには、根本的に理論を作り直すことが必要である。以下はその試みであって、弾性論のような2階の波動方程式には適用できると思われるが、 $\Omega = \mathbb{R}^m$ の場合に適用できる上述の理論のような一般性はない。

§10. この方法においても基本的な考えは変わらず、 $E \ni v \mapsto u = \mathcal{U}v \in E$ と構成して不動点定理を用いる。 u を求めるにはやはり線型問題(3-2)を解くのであるが、前の方法と違ふ点は、 W を用集合として含むような Y で A^v -許容のものが無いことである。この難点を克服するために、一般に

線型発展方程式

$$du + A(t)u = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad u(0) = \phi, \quad (9)$$

の解の正則性の問題から出発する。こゝに正則性という場合、互に関連する2つの性質が与えられる。第一に、 $u(t)$

が X の元としてどのくらいよい元であるか (X が関数空間であれば、 $u(t)$ はどのくらいなめらかな関数であるか) という

こと、算 $\equiv$ は $t \mapsto u(t)$ がどのくらい微分可能であるかといふことである。この2つの性質が関連していることは、 $A(t) = A$ がともに成り立つ場合によつて例示される。実際 $\phi \in \mathcal{D}(A^k)$ と $u \in C^k([0, \infty]; X)$ とは同等である。一般の場合にはこのような簡単な関係は望まれないが、類似の関係があることは容易に想像される。

わづわづに興味のある正則性は主に第一の性質である。

$u(t) \in W$ が不可欠の条件だからである。しかし算 $\equiv$ の性質もあるていどは要る(§7参照)。前述の理論では、 W を開集合として含む"よい"空間 Y で A -許容なものがあることを仮定して、この正則性の問題を一挙に片づけたわけであるが、今度はそれができずいのが困難の理由である。

§11. そこで今度は正則性と Y とを直接結びつけることを手段として、 Y としては (9) を解くための必要ものをとり、正則性は段階的に高めゆく方針をとる。このため以下

$$D(A(t)) = \text{const} = Y \quad (10)$$

を仮定する(これは発展方程式の初期の理論でよく用いられたい仮定である)。すると Y が A -許容であることは自明である。故に $A = \{A(t)\}$ に対して ($I = [0, T]$)

$$A \in \overline{\mathcal{G}}(X, M, \beta) \quad (\text{安定性}) \quad (11)$$

$$A \in L_*^\infty(I; B(Y, X)) \quad (\text{有界性}) \quad (12)$$

を仮定すると、 A に属する発展作用素 $U = \{U(t, s)\}$ が存在して (9) は解をもち、 $\phi \in Y$ ならば $u(t) \in Y$ とする。ただし Y の元は十分な正則性をもたないから、これだけでは十分でない。

(L_*^∞ は作用素値関数として強可則かつ本質的に有界なことを表す。 $\overline{\mathcal{G}}$ は生成素系の安定性を表わすのに用い、単独作用素の場合の $\mathcal{G}$ と区別する。)

正則性を高めるために, $\beta > \beta$ として

$$U_1 = (A + \beta) U (A + \beta)^{-1} \quad (13)$$

$$\left[\text{すなわち } U_1(t, s) = (A(t) + \beta) U(t, s) (A(s) + \beta)^{-1} \right]$$

とすると, U_1 は 形式的 に

$$A_1 = A - C_1, \quad C_1 = dA (A + \beta)^{-1}, \quad (14)$$

で与えられる系 $A_1 = \{A_1(t)\}$ に属する発展作用素に与ることに注意する. 実は U_2 は十分可微分可解性をもたないから, 弱発展作用素 とよび, U 子とを 強発展作用素 と呼んで区別する. 実は (14) からすぐ分かるように, $C_1 \in L_*^\infty(I; B(X))$ となるので, A_1 も安定かつ (10) を満たす. 故に A_1 が (12) を満たせれば U_1 は強となる. その条件は

$$dC_1 \in L_*^\infty(I; B(Y, X)), \quad (15)$$

で与えられる. U_1 が強となれば $U_1(t, s)$ は $Y \subseteq Y$ にうつ

すから, $U(t, s)$ は $(A(s) + \beta)^{-1} Y = D(A(s)^2)$ を

$(A(t) + \beta)^{-1} Y = D(A(t)^2)$ にうつす. 特に $\phi \in D(A(0)^2)$

ならば, (9) の解は $u(t) \in D(A(t)^2)$ を満たす. このよ

うして 2 階の正則性 が求められたことに注意. 同時に $t \mapsto$

$u(t)$ の正則性も, $u \in C^2(I; X) \cap C^1(I; Y)$ の形に与えられる.

§ 12. 上の構成はくり返し行う. ことが出来て, $k =$

$1, 2, 3, \dots, n$ に対して $A_k = A_{k-1} - C_k, \quad C_k = dA_{k-1} (A_{k-1} + \beta_{k-1})^{-1},$

..., と相当する差商作用素 U_R が作れる. そこで

$$S_R = (A_{R-1} + \beta_{R-1}) \cdots (A_1 + \beta_1)(A + \beta) \quad (15a)$$

とおけば,

$$\phi \in D(S_R(0)) \quad \text{ならば} \quad u(t) \in D(S_R(t)) \quad (16)$$

といふ形に 高階の正則性 を求めることが出来る.

ただしこのためには (15) に相当して

$$dC_R \in L_*^\infty(I; B(Y, X)), \quad R=1, 2, \dots, n, \quad (17)$$

を仮定すればなる. ^{1) (17)} C_R は帰納的に逐次定義されてゆくので, 条件 (17) は甚だ見通しかわるい.

なお, $D(S_2(t)) = D(A(t)^2)$ となることは上述の通りであるが, 同様な結果は $R \geq 3$ では成立しない ($dA, d^2A, \dots$ が関係するから). このため $D(S_R(t))$ の具体形も見通しにくくなる.

§ 13. これらの不便を除いてもっと実用的な条件を見出すために, 次のような仮定をすると便利である. $X \supset Y$ のような二つの Banach 空間の代りに

$$\begin{array}{ccccccc} X = X_0 & \supset & X_1 & \supset & X_2 & \supset & \cdots \supset X_n \\ & & \cup & & \cup & & \cup \\ Y = Y_1 & \supset & Y_2 & \supset & \cdots & & Y_n \end{array} \quad (17a)$$

のよう子, Banach 空間の二重系列を考える. ここでは横の $\supset$ は連続な埋め込みを意味するが, 縦の $\cup$ は Y_R が X_R の閉部分空間になっていることを意味する. 特に Y は X_1 の閉部分空間である.

分空間で, $Y_R = X_R \cap Y$ と仮定する.

$A(t)$ はこれらの空間の間に次のように働きくものとする.

まず (10) 及び (11) が成立すると仮定し, 次に

$$d^R A \in L_*^\infty(I; B(Y_{j+R}, X_j)), \quad 0 \leq j \leq n-R, \\ 1 \leq R \leq n, \quad (18)$$

のように A のなめらかさを仮定する. こゝに $R=0$ は含まれ

ない ことを特に注意する. 最後に次の意味で $A(t)$ が "積分

型" であることを仮定する: $\phi \in Y$ で $A(t)\phi \in X_j$ ならば

実は $\phi \in Y_{j+1}$ で

$$|\phi|_{j+1} \leq \nu(|A(t)\phi|_j + |\phi|_0), \quad (19)$$

ただし ν は定数である. ($|\cdot|_j$ は X_j のノルム).

これらの仮定をすると次のことが証明できる.

$\exists \beta$ ならば $A(t) + \beta$ は Y_{j+1} より X_j への同型写像で

ある ($0 \leq j \leq n-1$).

$C_1 = dA(A + \beta)^{-1}$ とおけば

$$d^R C_1 \in L_*^\infty(I; B(X_{j+R}, X_j)), \quad 0 \leq R, j, \\ j+R \leq n-1. \quad (20)$$

故に $A_1 = A - C_1$ とおけば, A_1 は A と同様 (10), (11), (18)

および (19) を満足する. ただし n は $n-1$ でおきかえ,

β は別の定数 β_1 でおきかえるものとする.

この過程は繰り返すことができる. すなわち $C_2 = dA_1(A_1 + \beta_1)^{-1}$

(ただし $\beta_1 > \beta_1$) とおけば (20) で $n-1$ を $n-2$ でおきかえた条件を満たし、したがって $A_2 = A_1 - C_2$ および (19) は (10), (11), (18) を満たす、ただし n は $n-2$ で、 β は別の定数 β_2 でおきかえる。

以下同様にして § 12 にのべた構成が可能となる。しかも今度は、条件 (10), (11), (18) を検証しておけば、あとの過程は自動的に行われるから、この方法は実用的である。

このようにして解の正則性として、 $\phi \in D(S_m(0))$ ならば $u(t) \in D(S_m(t))$, および $u \in C^k(I; Y_{m-k})$, $0 \leq k \leq m-1$, $u \in C^m(I; X)$, という結果がえられる。

ただし $S_k(t)$ の定義は前と同様 (15a) で、定数 $\beta, \beta_1, \dots$ のえらび方に依存するが、 $D(S_k(t))$ はこれらの定数に依存する Y_k の閉部分空間であることが示される。以下これを $D_k(t)$ と記す。かくして $\phi \in D_m(0)$ ならば $u(t) \in D_m(t)$ という形で主要な正則性の結果が与えられる。

§ 14. このように $D_k(t) \subset Y_k$ は極めて重要な部分空間であるから、その特徴づけ如何という問題が生ずる。これは次のように解かれる。帰納法によって次のような作問系列：
 $S^0(t) = 1, S^1(t), S^2(t), \dots, S^m(t)$ を作る、ただし $D(S^1(t)) \supset D(S^2(t)) \supset \dots \supset D(S^m(t))$. $S^j(t)$ が定義されたとすると、 $S^{j+1}(t)$ は次の式で与えられる：

$$S^{j+1}(t)\psi = - \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (d^{j-k}A(t)) S^k(t)\psi, \quad (21)$$

ただし $D(S^{j+1}(t))$ は, $\psi \in D(S^j(t))$ かつ $k \leq j$ なる $S^k(t)\psi \in Y_{j+1-k}$ である j なる ψ の全体とする. このとき (21) の意味をもつことは, (18) を用いて容易にわかる.

このように $S^j(t)$ を定義したとき

$$D_j(t) = D(S^j(t)) \quad (22)$$

が成立する. (これは $D_j(t)$ が定数 $3, 3_1, \dots$ によらず n に ∞ と明示している.)

なお j の小さい値に対する $S^j(t)$ の形は次の如くである (簡単のため変数 t を省略する).

$$\begin{aligned} S^0 &= 1, \quad S^1 = -A, \quad S^2 = -dA + A^2, \\ S^3 &= -d^2A + 2(dA)A - A(-dA + A^2), \quad \dots \end{aligned} \quad (23)$$

§ 15. 上の理論を線型化された発展方程式 (3-2) に適用すれば, 自明の重: $E \rightarrow E$ を成熟する可能性がえられる. それは, まず系列 (17a) を適当にえらんで, W が X_m の閉集合になるようにする. すなわち十分高階の X_m の閉集合 W とすれば, $w \in W$ に対して $A(w) \in G(X, M, \beta)$ が成立するといふことである. 応用上 X_m は Sobolev 空間 $H^m(\mathbb{R})$

の如きものであるから、この仮定は適当である。

次に III の定義であるが、 $v \in E$ の第一条件として $v(t) \in W$ である。
($I' = [0, T']$)。

次に $L^\infty(I'; X_{m-k})$, $0 \leq k \leq m$ を要求する。すると

写像 $W \ni w \mapsto A(w)$ に適当な仮定を立てて、 $v \in E$ のとき

で $A'(t) = A(v(t))$ が条件 (10), (11), (12) ⁽¹⁹⁾ を満足する v により

接点 w の選択は比較的容易である。(10), (19) については直接
(11) については

これを $A(w)$ に仮定する。 $\S 6$ として、 X の可変ノ

ルム $\|\cdot\|_W$ を利用する条件を導入しても可なり、既にして $v \in E$ が上述の条件を満足すれば A' が (11) を満足する、という間接的な仮定をありても別に不便ではない。

次に仮定 (18) だが

写像 $w \mapsto A(w)$

の微分可能性に關する。これは多数の空間 X_k が関係するため、通常の Fréchet 微分の概念では記述できない。そこでこの場合にも、むしろ次のような間接的な条件を導入する方が実用的なようである。すなわち、 $v \in E$ が上述の条件を満足するとき

$$d^k A^v(t) = F^k(v(t), dv(t), \dots, d^k v(t)), \quad 1 \leq k \leq m, \quad (24)$$

と書けるとする。ただし F^k は

$$W \times X_{m-1} \times \dots \times X_{m-k} \rightarrow \bigcap_{j=0}^{m-k} B(Y_{k+j}, X_j) \quad (25)$$

での連続写像

と仮定する。更に

$$|A(w') - A(w)|_{Y_m, X_0} \leq \mu |w' - w|_0, \quad w, w' \in W \quad (26)$$

を仮定する (16) を参照).

これらの仮定の下に A^v が §13 の諸条件を満足すること
が証明できる. したがって問題 (3-2) が解ける.

§16. そこで $\Phi: v \mapsto u = \Phi v$ が E を E にうつすことを
示したいのであるが, それには更に E に制限を加える必要
がある. その理由は, $u \in E$ をいには §13 の高階正則性,
すなわち $\phi \in D_m^v(0) \Rightarrow u(t) \in D_m^v(t)$ を (7) によるわけである
(§13 の $D_m(t)$ は v によるから $D_m^v(t)$ とかく) が, それには
与えられた $\phi \in W$ に対し, $\phi \in D_m^v(0)$ が成立せねばならない.
ところで $D_m^v(0)$ の作り方 (§14 に示したように, $d^R A^v(0)$
($0 \leq R \leq n-1$) に依存するから, (24) によつてまた $d^R v(0)$
($0 \leq R \leq n-1$) に依存する. これらの $d^R v(0)$ が勝手であ
らうと $\phi \in D_m^v(0)$ は保証される. したがって $d^R v(0)$

の値は制約条件を満たさなければならない、これが E に課せられる新しい条件となる。

この条件を足る下には次の計算がある。 $du = -A^u(t)u$ を形変時に逐次微分すると、(24) を用いて

$$d^{p+1}u(t) = G^p(v(t), dv(t), \dots, d^p v(t); u(t), \dots, d^p u(t)),$$

$$0 \leq p \leq n-1 \quad (28)$$

の形の式を得る。ここで G^p は

$$(W \times X_{n-1} \times \dots \times X_{n-p}) \times (Y_n \times \dots \times Y_{n-p}) \rightarrow X_{n-p-1}$$

での連続写像である。ここで $d^p u(t) \in Y_{n-p}$ と暗に仮定し
て、これは $\phi \in D_n^v(0)$ が満たされていければ正しいといは
 $u(t) \in D_n^v(t)$ からわかる。(便宜上 $Y_0 = X$ と約束する。)

そこで与えられた $\phi \in W \cap Y \subset Y_n$ から出発して

$$\begin{aligned} \phi_1 &= G^0(\phi; \phi), \quad \phi_2 = G^1(\phi, \phi_1; \phi, \phi_1), \\ \phi_3 &= G^2(\phi, \phi_1, \phi_2; \phi, \phi_1, \phi_2), \quad \dots \end{aligned} \quad (29)$$

によって $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ を計算する。ただし、まず $\phi_1 \in X_{n-1}$ と
なるがこれが $\phi_1 \in Y$ (したがって $\phi \in Y_{n-1}$) を満たすことを仮
定し、次に次の進め方をする。その上で $\phi_2 \in X_{n-2}$ となるが、
これが $\phi_2 \in Y$ (したがって $\phi_2 \in Y_{n-2}$) を満たすことを仮
定して次の進め方をする。このようにして $\phi_{n-1} \in Y$,
まで成立するとき、 ϕ を 許される初期値 と呼ぶ。許され
る初期値の全体を M とする。 M は Y の中の多様体の如

きものである。

そこで今 $\phi \in M$ と仮定して $\phi_1, \dots, \phi_n \in \mathcal{S}\mathcal{F}\eta$, $v \in E$ に
対して

$$d^R v(0) = \phi_R, \quad 0 \leq R \leq n-1 \quad (30)$$

という条件をつける ($\phi_0 = \phi$ と約束). すると $\phi \in D_n^v(0)$
となることがわかる. 何故か? は $D_n^v(0) = D(S^{v,n}(0))$ である
から ($S^{v,j}$ は $A = A^v$ のとき S^j と表わす), §14 に
よって $S^{v,j}$ の作り方と, (29) による ϕ_j の作り方を比較して
みれば,

$$\phi \in D(S^{v,j}(0)), \quad S^{v,j}(0)\phi = \phi_j, \quad 0 \leq j \leq n, \quad (31)$$

となることが帰納法で示されることがある。

$\phi \in D_n^v(0)$ がわかれば §13 によって $u(t) \in D_n^v(t)$ となり,
したがって (28) の計算によつて, $d^R u(0) = \phi_R$ となる
ことが帰納法でわかる. したがって条件 (30) は v から
 $u = \bar{u}v$ にうつっても保存される。

§ 17. 以上により E の正確な定義は次のようにあらはされる。
 ことが予想される。 $v \in E$ の条件として、

$$\|d^R v(t) - \phi_R\|_{n-R} \leq P'_R, \quad 0 \leq R \leq n, \quad (32)$$

$$d^R v(0) = \phi_R, \quad 0 \leq R \leq n-1 \quad (33)$$

ただし P'_R は X_n での ϕ の P'_0 -条件が W に含まれるかぎり任意の正数とする。上述のように、かゝる v に対しては $\phi \in D_n^v(0)$ とするから、(3-2) の解 $u = \mathfrak{A}v$ は $d^R u(t) \in Y_{n-R} \subset X_{n-R}$ を満たし、 t が十分小さければ再び (32) を満足する可能性がある。また u が (33) を満たすことは、上と同様 (29) を用いて検証される。

実際に $u \in E$ であることを正確に証明するには、もっと定量的な議論が必要である。このためには線型発展方程式の発展作用素に関する詳しい評価を用いるなければならないが、ここには省略する。

要は $F \rightarrow E$ が示されれば、あとの議論は全く周知の軌道に乗るから、これをまた省略したい。

詳細は Kato [7] をみられたい。

§ 18. 以上で抽象理論としては一応の形がととのったが、
 に与えるが、そこで v と u のかゝれた仮定として、 E が空で
 $\bar{u}$ と u ；条件を加えなければならぬ。実際 (32), (33)
 を満足する v が存在することは、一般には証明できそうに
 ない。しかしこの仮定は、 $X_R = H^R(\Omega)$, $Y = H_0^1(\Omega)$ のとき
 典型的な応用では満足されているので問題はない。

なお M が空でないという保証もある。 $\wedge$ M が空であったとき
 は、解が存在しなくてもやむを得ない。何れも (1-2) の解 u
 が存在して十分であるからである、 $\phi \in M$ である ϕ がある
 ということ、(28), (29) の計算で示されているからである。

通常の応用では M が空でないことは確かである。上述の
 例では $C_0^\infty(\Omega) \subset M$ であることは明らかである。(しか
 議論には
 しい $\wedge$ 十分説明できる、 $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ は仮定として採
 り得るから。)

解 $u(x)$ が ϕ に連続に依存するかどうか、これも未解決
 である。

最後に応用について一言すると、上の結果は $[0, T] \times \Omega$ での、
 波動方程式の系 (強性論の場合) で境界条件
 $u=0$ を課した場合に適用できそうに思われるが、 v と
 未解決の点がある。それは2階線型 $\wedge$ 楕円型方程式の系に対し
 て、性質 (19) を保証する正則性定理が文献に見当たらないこ

とである。単独方程式の場合には Morrey [8] の定理 5.6.3 が使えるが、相当する定理が系の場合に成立するかというかわかっているようである。

文 献

- [1] 田辺友城, 発展方程式, 岩波 1975.
- [2] 増田久弥, 発展方程式, 紀伊國屋 1975.
- [3] T. Kato, The Cauchy problem for quasi-linear symmetric hyperbolic systems, Arch. Rational Mech. Anal. 58 (1975), 181-205.
- [4] T. Kato, Quasi-linear equations of evolution, Lecture Notes in Math. 448, Springer 1975, pp. 25-70.
- [5] T. Hughes, T. Kato and J. E. Marsden, Well-posed quasi-linear second-order hyperbolic systems with applications to nonlinear elastodynamics and general relativity, Arch. Rational Mech. Anal. (in press).
- [6] K. O. Friedrichs, On the laws of relativistic electro-magneto-fluid dynamics, Comm. Pure Appl. Math. 27 (1974), 749-808.
- [7] T. Kato, Linear and quasi-linear equations of evolution of hyperbolic type, Lecture Notes, Hyperbolicity, C. I. M. E. (Cortona), 1976.
- [8] C. B. Morrey, Jr., Multiple integrals in the calculus of variations, Springer 1966.