

Flow による generalized analytic functions よりなる環の分類

神奈川県 I 泉池敬司

unit circle 上の disk algebra & $\mathbb{R}$ real line の Bohr
コンパクト化上の generalized analytic functions のなす
algebra の拡張として Forelli [1] により, flow による
generalized analytic functions のなす algebra が導入さ
れた。以後 Muhly による一連の仕事 [5] - [8] と Forelli [2]
などでその algebra が研究されてきた。和田 [11], 富山 [9] [10]
にその紹介及び応用などが詳しく報告されている。ここでは
function algebra の観点より generalized analytic functions
よりなる algebra を flow により分類したい。

§ 1. Normalized flow.

X を compact Hausdorff space とし, (R, X) を flow とする。
すなわち R から X 上の homeomorphisms π の group homo.
 $t \rightarrow T_t$ が与えられていて $R \times X \ni (t, p) \rightarrow T_t p$ が連続の時に

う。 $H^0(R)$ が R 上連続で上半平面上に analytic に拡張出来る関数の集合とする。 $\varphi \in C(X)$ と任意の $x \in X$ の T_t による orbit $O(x)$ 上に制限したら $H^0(R)$ に属している時, analytic function と呼び, その集合を $\mathcal{O}_X$ とかく。 すなわち

$$\mathcal{O}_X = \{ \varphi \in C(X); \varphi \circ T_t x \in H^0(R) \quad \forall x \in X \}.$$

容易に $\mathcal{O}_X$ は sup norm closed な $C(X)$ の subalgebra であることがわかる。 しかし一般には X の点を separate するとは限らない。 $\mathcal{O}_X$ の他の表現方法に spectrum を用いるものがある。 $\varphi \in C(X), f \in L^1(R)$ に対して $\varphi * f \equiv \int_{-\infty}^{\infty} T_t \varphi f(t) dt$ とおく, ここで $T_t \varphi(x) \equiv \varphi(T_t x)$ である。 $J(\varphi) \equiv \{ f \in L^1(R); \varphi * f = 0 \}$ は $L^1(R)$ の closed ideal になり, この Fourier 変換の共通 zero 点の集合を $sp(\varphi)$ とかく。 すなわち

$$\text{補題 1 ([5], p. 114). } \mathcal{O}_X = \{ \varphi \in C(X); sp(\varphi) \subset [0, \infty) \}.$$

よく使う補題として次をあげておく。

補題 2 ([5], p. 116). X 上の Baire measure μ が $\mathcal{O}_X$ の representing measure, $\mu \neq \delta_x$ ($\forall x \in X$)

$\Rightarrow \mu$ は quasi-invariant, すなわち $\forall t \in R$ に對して $T_t \mu \ll \mu$ である。

ここで $T_t \mu(E) \equiv \mu(T_t E)$; E : Baire set of X .

補題 3 ([8], p. 57). $\mu \in M(X)$ が real 値 $\int f d\mu = 0 \quad \forall f \in \mathcal{O}_X$

$(\mu \perp \mathcal{O}_X) \Rightarrow \mu$ は T_t -invariant.

さて $\mathcal{O}_X$ を扱いたいわけだが、一般には $\mathcal{O}_X$ は X を separate してはいない。そこで $x, y \in X, f(x) = f(y) \quad \forall f \in \mathcal{O}_X$ としてみる。

すると $S_x - S_y \perp \mathcal{O}_X$ であり補題より $S_x - S_y$ は T_t -invariant になる。よって $T_t x = x, T_t y = y \quad \forall t \in \mathbb{R}$ である。

今後この様な fixed point が重要な役割を演ずるので

$\mathcal{L} \equiv \{x \in X; T_t x = x \quad \forall t \in \mathbb{R}\}$ とおく。上の議論より $\mathcal{L}$ が $\mathcal{L}$ 以上を含むならば $\mathcal{O}_X$ は X 上の function algebra となる。それ以外の場合は $\mathcal{O}_X$ を function algebra とみるために $(\mathbb{R}, X)$ の normalization を考える。

$X \ni x, y$ に対して $f(x) = f(y) \quad \forall f \in \mathcal{O}_X$ の時 $x \sim y$ とかく。商空間 $\hat{X} = X/\sim$ は $T_t \hat{x} \equiv \widetilde{T_t x}$ により $(\mathbb{R}, X)$ から自然に一つの flow が induce される。これを $(\mathbb{R}, \hat{X})$ とかき、 $(\mathbb{R}, X)$ の normalization ということにする。すると $\mathcal{O}_{\hat{X}} \cong \mathcal{O}_X$ であり $\mathcal{O}_{\hat{X}}$ は $\hat{X}$ の真実を separate して $\hat{X}$ 上の function algebra となる。

よって今後は $(\mathbb{R}, X)$ は normalized されたものとし、 $\mathcal{O}_X$ は X 上の function algebra と考える。

次に $\mathcal{O}_X$ の maximal ideal space X_1 に一つの flow を導入する。 $p \in X_1$ に対して μ_p の X 上の representing measure を μ_p とする。 $f, g \in \mathcal{O}_X$ に対して $\int f g d\mu_p = \int f d\mu_p \int g d\mu_p$ であることより $T_t \mu_p$ も又ある点 $T_t p \in X_1$ を represent する。この $\{T_t\}$ は well-defined であり、これにより X_1 に flow が

入ることが確かめられる。

命題 1. $\widehat{\sigma}_X \subset \sigma_{X_1}$.

証明. $p \in X_1$, $f \in \sigma_X$ に対して $\hat{f}(T_t p) \in H^{\infty}(R)$ をいえる。よって
 $F(t) \equiv \int f dT_t \mu_p = \hat{f}(T_t p) = \int T_t f d\mu_p$, $G(t) \equiv F(-t)$ とおく。
 すると $sp(G) \subset -sp(f) \cap sp(\mu_p) \subset (-\infty, 0]$ かつ
 $sp(F) \subset [0, \infty)$ ゆえに $F \in H^{\infty}(R)$.

注) 上の命題より (R, X_1) は normalized flow であり

$$\sigma_{X_1}|_X = \sigma_X.$$

定理 1. 次は同値.

- | | |
|----------------------|--|
| 1) $\sigma_X = C(X)$ | 2) $X = \mathbb{P}$. |
| 3) $X_1 = X$ | 4) $\widehat{\sigma}_X = \sigma_{X_1}$. |

証明 2) $\Rightarrow$ 1) $\Rightarrow$ 3) $\Leftrightarrow$ 4) は「だいた」明らか.

3) $\Rightarrow$ 2). $X \neq \mathbb{P}$ とする。 $x \in X \setminus \mathbb{P}$ とする。 $\delta_x * P_y (y > 0)$ は σ_X の rep. meas. である。ただし $P_y(t) = y / \pi (y^2 + t^2)$.
 もし $z \in X$ の実を表現すれば補題より $\delta_z - \delta_x * P_y$ は invariant measure である。しかし $z \in \mathbb{P}$ ではないし、 $z \in X \setminus \mathbb{P}$

でもない。矛盾より $\delta_x * P_y$ は X の点以外を表現する。

ゆえに $X_1 \neq X$.

注) 証明より μ が $x \in X \setminus P$ の rep. meas. ならば $\mu = \delta_x$ でありよって $X \setminus P$ の点は Choquet bdary point である。

命題 2. $\mathcal{O}_X$ の Shilov bdary は X .

命題 3. $x \in X$, x の m.b.d. $\mathcal{U}(x)$ in X_1 が $\mathcal{U}(x) \subset X$ になるものがある $\Rightarrow x \in P$

§ 2. $\mathcal{O}_X$ の flow による分類.

$\mathcal{O}_X$ がそれぞれ essential, antisymmetric, analytic, integral domain, pervasive, maximal になる必要十分条件を flow に与えた。

定義: Y 上の function algebra A について

- 1) essential $\iff$ 最小の essential set が Y と一致, ここで $E \subset Y$ が essential set for A とは, もし $f \in C(Y)$ $f = 0$ on E ならば $f \in A$ の時をいう。

- 2) antisymmetric $\Leftrightarrow Y$ が antisymmetric set になる, 2113,
 ここで $E \subset Y$ が antisymmetric とは, もし $f \in A$ であ
 る $f|_E$ real ならば $f|_E$ は constant のとき.
- 3) integral domain $\Leftrightarrow$ 代数的に意味そのまゝ.
- 4) analytic $\Leftrightarrow f \in A$ がある Y の open set 上で 0 ならば $f=0$.
- 5) pervasive $\Leftrightarrow$ 任意の closed subset $E \subsetneq Y$ に対して
 $A|_E$ は $C(E)$ で norm dense.
- 6) maximal $\Leftrightarrow A \subsetneq B \subsetneq C(Y)$ なる algebra B がない.

一般論より次の関係はよく知られている。

pervasive $\Rightarrow$ analytic $\Rightarrow$ integral domain
 $\Rightarrow$ antisymmetric $\Rightarrow$ essential

又 maximal の条件の下で考えると上の事はすべて同値である。

定理 2. $H \equiv \overline{X \setminus P}$ が $\mathcal{O}_X$ の最小の essential set である。

よ, 2 $\mathcal{O}_X$: essential $\Leftrightarrow P$ の内実なし.

証明. H は一つの essential set であることは明らか。

$E \subsetneq H$ closed とする。 $x \in H \setminus E$, $x \notin P$ なるものがある。

$I = [-\varepsilon, \varepsilon]$ と $\{T_t x; t \in I\} \cap E = \emptyset$ なる $\varepsilon > 0$ がある。又

$\exists g \in C(X)$ と $g=0$ on E かつ $g|_{\{T_t x; t \in I\}} \neq h|_{\{T_t x; t \in I\}} \forall h \in \mathcal{O}_X$.

ならば $\{T_t x; t \in I\}$ は $\mathcal{O}_X$ の interpolation set ではないから。
よ、 $\mathcal{E}$ は essential set ではない。 $\therefore H$ が最小の essential set.

定理 3. $\mathcal{O}_X$: antisymmetric $\Leftrightarrow \varphi \in C(X), \text{sp}(\varphi) = \{0\}$ ならば
 φ は constant.

注) maximal antisymmetric set を flow の言葉ではまろ
んとはいいにくいから、 $x \in X$ を含む max. antisymmetric set
はまず一般階として $\overline{O(x)}$ を考える。次に $\overline{O(y)} \cap \overline{O(x)} \neq \emptyset$ なる
ものに対して $\overline{O(x) \cup_y O(y)}$ を考える。その次に $\overline{O(x) \cup_y O(y)} \cap \overline{O(z)}$
 $\neq \emptyset$ なる $z \in X$ に対して $\overline{O(x) \cup (\cup_y O(y)) \cup (\cup_z O(z))}$ を考える。
以下つづけて、切れ目ど得られるものが求めるものがある。
それが X と一致すれば $\mathcal{O}_X$ は antisymmetric である。

定理 4. 次は同値.

- 1). $\mathcal{O}_X$: analytic 2). $\mathcal{O}_X$: integral domain
- 3). T_t -invariant open set は X に dense.

証明. 1) $\Rightarrow$ 2) は明らか.

2) $\Rightarrow$ 3). Q を T_t -invariant open subset of X と X に
dense ではないものとする。 $Q_1 = X \setminus \overline{Q}$ も又 T_t -inv. open

subset である。ここに $f \in C_0(Q_1)$, $g \in C_0(Q)$ を

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} f(x) & x \in Q_1 \\ 0 & x \in X \setminus Q_1 \end{cases}, \quad \varphi_2(x) = \begin{cases} g(x) & x \in Q \\ 0 & x \in X \setminus Q \end{cases}$$

が $\mathcal{O}_X$ に入り $\varphi_1 \neq 0$, $\varphi_2 \neq 0$ になる様にとれる。 $\varphi_1 \varphi_2 = 0$ である。

3) $\Rightarrow$ 1). $f \in \mathcal{O}_X$ 且 $f = 0$ on open set Q である。すると $f = 0$ on $\bigcup_{t \in \mathbb{R}} T_t Q$ である。 $\bigcup_{t \in \mathbb{R}} T_t Q$ は X 上 ρ -dense。よって $f = 0$ 。

定理 5. $\mathcal{O}_X$: pervasive

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{O}_X|_P \text{ は dense in } C(P) \\ \text{proper } T_t\text{-invariant open set は } X \setminus P \text{ を含む.} \end{cases}$$

証明. $\Rightarrow$ $F \subsetneq X$, $F \not\subset P$ なる closed F があるとする。 (R, F) は一つの flow になる。 $\mathcal{O}_X|_F \subset \mathcal{O}_F$, $F \not\subset P$ より定理 1 から $\mathcal{O}_F \subsetneq C(F)$ である。よって $\mathcal{O}_X|_F$ は $C(F)$ 上 ρ -dense ではない。

$\Leftarrow$ $\mathcal{O}_X$ が pervasive ではないとする。すると $\overline{\mathcal{O}_X|_F} \neq C(F)$ なる closed $F \subsetneq X$ がある。 $\mu \in M(F)$, $\mu \neq 0$ $\mu \perp \mathcal{O}_X$ とする。

すると μ は Forelli [1] より quasi-invariant であり,

$G = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} T_t F^c$ は μ -measure zero, open set. 条件より

$F^c \subset P$ であり $\mu \in M(P)$ となる。しかし $\mathcal{O}_X|_P$ は $C(P)$ 上 ρ -dense であるから $\mu = 0$ 。よって矛盾。

定理 6. $\mathcal{O}_x$: maximal

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{O}_x|_P \text{ は } C(P) \text{ ぞ dense} \\ \text{任意の } x \in X \setminus P \text{ に対して } \mathcal{O}(x) \text{ は } X \setminus P \text{ ぞ dense} \end{cases}$$

証明. $\Leftarrow$ 証明は Forelli [2] をそのままとればよい。
 ただし途中にある条件をみたす $x \in X$ を選ぶ所をもう少し正確に話しを進めると実は $x \in X \setminus P$ ととれることだけをチェックすればよい。

$\Rightarrow$ Case I. $\exists x \in X \setminus P$ ぞ $\overline{\mathcal{O}(x)} \cup P \subsetneq X$ とする。 $(R, \overline{\mathcal{O}(x)})$ は normalized flow ぞあるが $B \equiv \{f \in C(X); f|_{\overline{\mathcal{O}(x)}} \in \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{O}(x)}}\}$ とおくと, B は $C(X)$ の closed subalgebra ぞある。

$\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{O}(x)}} \neq C(\overline{\mathcal{O}(x)})$ ぞあるから $B \subsetneq C(X)$ ぞある。所ぞ $y \in X \setminus \overline{\mathcal{O}(x)}$, $y \notin P$ なるものがあるから, $\mathcal{O}_x \subsetneq B$ ぞある。

Case II. $\mathcal{O}_x|_P$ が $C(P)$ ぞ dense ぞ正しいとする。

$B' \equiv \{f \in C(X); f|_P \in \overline{\mathcal{O}_x|_P}\}$ とする。 $\mathcal{O}_x \subsetneq B' \subsetneq C(X)$ ぞある。

系 1. $\mathcal{O}_x$ の場合.

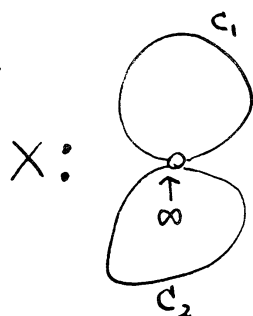
essential $\Leftarrow$ antisym. $\Leftarrow$ integral do. $\Leftrightarrow$ analytic $\Leftarrow$ pervasive
 $\nwarrow$
maximal

系 2. $\text{Int } P = \emptyset$ のとき, pervasive $\Leftrightarrow$ maximal

例 1. $X \equiv \{z; |z| \leq 1\}$ に回転の flow を与える。

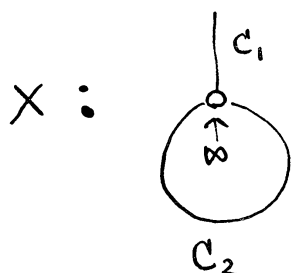
すると $\mathcal{O}_X$ は essential, かつ $\mathcal{O}_X$ は antisymmetric じゃない。

例 2.



$C_1 \cong C_2 \cong \mathbb{R}$ とし, $\mathbb{R}$ の移動の flow を与える。この点 ∞ が fixed point. すると $\mathcal{O}_X$ は antisymmetric しか $\mathcal{O}_X$ は analytic じゃない。

例 3.



$C_2 \cong \mathbb{R}$ とし flow を考える。
 C_1 はすべて fixed point とする。
 すると $\mathcal{O}_X$ は essential じゃない。
 しか $\mathcal{O}_X$ は maximal じゃない。

参 考 文 献

- 1) F. Forelli, Analytic and quasi-invariant measure, Acta Math. 118 (1976⁶⁷), 33-59.
- 2) ———, A maximal algebra, Math. Scand. 30 (1972), 152-158.
- 3) K. Izuchi and Y. Izuchi, Flows and function algebras of generalized analytic functions, to appear.
- 4) G. Leihowitz, Lectures on complex function algebras, Scott, Foresman. 1970.
- 5) P. Muhly, Function algebras and flows, Acta Sci. Math. (Szeged) 35 (1973), 111-121.
- 6) ———, " II, Ark. Math. 11 (1973), 203-213.
- 7) ———, " III, Math. Z. 136 (1974), 253-260.
- 8) ———, " IV, Trans. A.M.S. 203 (1975), 55-66.
- 9) J. Tomiyama, Flow of spectral subspace とその応用. 数理解析研究所講究録 206 (1974), 64-91.
- 10) ———, 関数環と flow について, 数学 28 (1976), 35-46.
- 11) J. Wada, Function algebra & flow, 数理解析研究所講究録 232 (1975), 90-96.