

# 乱流における局所平均エネルギー散逸率とエネルギー流束の統計

名工大 梶田健一 (Kenichi Kajita)  
 名工大 後藤俊幸 (Toshiyuki Gotoh)  
 Nagoya Inst. of Tech.

## 1 序論

流体力学で考えられている乱流は、レイノルズ数が大きくて、時間的にも空間的にもランダムな流れとして理解されている。乱流場は乱れているので、その性質を知りたいとき、統計的な平均に注目するのが有効である。この乱流を実験的に研究しようとする時、場を乱さずに物理量を測定することはとても難しい。そこで我々は、格子サイズ以下の小さなスケールをモデル化をするということなどは一切せずに、Navier-Stokes 方程式を数値的に時間積分して乱流場を生成した。これを乱流の直接数値計算 (DNS) と呼ぶ。これにより種々の乱流における物理量を正しく測定することが可能となった。

1941 年に Kolmogorov は、高レイノルズ数に対する速度の増加量  $\delta u_r = u(\mathbf{x} + r\mathbf{e}_1) - u(\mathbf{x})$  の構造関数が以下のスケーリング則に従うという理論を示した。(以下 K41 と呼ぶ。)

$$S_p(r) = \langle \delta u_r^p \rangle \propto \bar{\epsilon}^{p/3} r^{p/3} \quad (1)$$

$\langle \rangle$  はアンサンブル平均を示す。慣性領域は  $\eta \ll r \ll L$ 。  $L$  はエネルギーを注入する乱流のマクロスケール、 $\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$  は粘性の効果が支配的になる Kolmogorov スケールである。 $\bar{\epsilon}$  は以下に定義される単位質量あたりの平均エネルギー散逸率である。

$$\bar{\epsilon} \equiv \langle \epsilon \rangle = \left\langle \frac{\nu}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle \quad (2)$$

スケーリング則は、基本的に  $\bar{\epsilon}$  と  $r$  の次元解析から得られる。

$$S_p(r) \propto r^{\xi_p} \quad (3)$$

と定義されるスケーリング指数  $\xi_p$  がスケーリング  $p$  と共に線形的に増加する時、ノーマルスケーリングと呼ばれる。 $p = 2$  の時の波数空間での表現である Kolmogorov のエネルギースペクトルは  $E(k) = K\bar{\epsilon}^{2/3}k^{-5/3}$  と表わされ、 $K$  は Kolmogorov の普遍定数である。乱流の研究における中心的な問題の一つは、全ての流れに対して (1) のスケーリング則が当てはまるかどうかという点である。慣性領域におけるスペクトルの指数は、間欠性のため小さな揺らぎがあるが、まさに  $-5/3$  になることが受け入れられてきている。Kolmogorov 定数は、 $1.5 \sim 2.0$  である。しかし、より高いオーダーのモーメントでは、スケーリング指数が  $p/3$  よりもゆっくと増加するということが実験で示された。これは乱流のスケールが小さくなると、速度の増分の不安定性がより強くなり、速度場の統計がもはや Gaussian にならないことを意味する。スケールの減少と共に統計の変化を説明する現象学的なモデルは、1962 年に Kolmogorov によって提案された (K62)。まず単位質量あたりの局所的な体積平均のエネルギー散逸率が、以下のように定義される。

$$\epsilon_r = \frac{3}{4\pi r^3} \int_{|\mathbf{y}| \leq r} \epsilon(\mathbf{x} + \mathbf{y}) d^3\mathbf{y} \quad (4)$$

そしてこの  $\epsilon_r$  の分布は,

$$P(\epsilon_r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\ln\epsilon_r}} \exp\left(-\frac{(\ln\epsilon_r - m_r)^2}{2\sigma_{\ln\epsilon_r}^2}\right) \quad (5)$$

$$m_r = \ln\bar{\epsilon} - \frac{1}{2}\sigma_{\ln\epsilon_r}^2, \quad \sigma_{\ln\epsilon_r}^2 = A + \mu\ln(L/r) \quad (6)$$

と仮定するのである。ここで  $\mu$  は正の普遍定数で、 $A$  は流れに依存する定数である。その時 K41 のスケーリングは  $\langle \delta u_r^p | \epsilon_r \rangle \propto \epsilon_r^{p/3} r^{p/3}$  のように  $\epsilon_r$  の与えられた変数に対する条件付き平均に置き換えられる。全体平均は、 $\epsilon_r$  の分布上で平均をとることで得られ、結果は以下ようになる。

$$S_p(r) = \int_0^\infty \langle \delta u_r^p | \epsilon_r \rangle d\epsilon_r \propto \bar{\epsilon}^{p/3} (r/L)^{\mu p(p-3)/18} \quad (7)$$

スケーリング指数  $\xi_p$  は、 $p$  について二次になる。小さなスケールへのエネルギーカスケードに対する多くの現象学的理論は、K62 以来多くのものが提案されてきた。実験では一般に、局所的な等方性での仮定の下、以下のような一次元の代用の散逸率を用いる。

$$\epsilon_s(\mathbf{x}) = \frac{15\nu}{r} \int_0^r \left( \frac{\partial u_1(\mathbf{x} + y\mathbf{e}_1)}{\partial x_1} \right)^2 dy \quad (8)$$

しかし、実験では小さなスケールで一様性と等方性が満足されているとは限らず、その結果、エネルギー散逸率の正しい統計法則を把握することは困難である (Praskovski & Oncley 1997)。Praskovski らの実験によると、テイラーのマイクロスケールレイノルズ数  $R_\lambda$  が小さい時、 $\ln\epsilon_s$  の PDF は、スケール  $r$  が慣性領域で非常に Gauss 分布に近い。一方、 $R_\lambda = \bar{u}\lambda/\nu$  が大きい場合では、Gauss 分布より速く減衰する。

乱流のもう 1 つの問題は、'局所的なサブスケール間のエネルギーの流れ' についてである。つまり、ある点とその近傍において空間のスケール  $r$  以上の運動から、スケール  $r$  以下の小さなスケールへのエネルギー輸送の総和についてである。

$$\epsilon_r(\mathbf{x}) \sim \frac{[\delta u_r(\mathbf{x})]^3}{r} \quad (9)$$

式 (9) は、点  $\mathbf{x}$  での長さスケール  $r$  における速度差  $\delta u_r(\mathbf{x})$  の大きさと点  $\mathbf{x}$  を中心とする半径  $r$  の球体内の局所的なエネルギー散逸率の体積平均  $\epsilon_r(\mathbf{x})$  との関係を示している。しかし、Kraichnan(1974) によると、 $\epsilon_r$  は散逸領域の特性量  $\epsilon$  の空間平均であり、それが慣性領域での特性量である保証はなく、慣性領域での特性量はエネルギー流束関数  $\Pi_r$  であると述べられている。そして、エネルギー保存則から平均値において  $\langle \Pi_r \rangle$  と  $\langle \epsilon_r \rangle$  が結びついているに過ぎないと言われている。ここで  $\Pi_r$  は以下のように定義される。

$$\Pi_r \equiv -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial r_j} (|\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{r})|^2 \delta u_j(\mathbf{x}, \mathbf{r})) \quad (10)$$

現在の DNS による乱流の研究は、以前の DNS による研究と比べて 2 つの有利な面を持つ。まず第一に、実験では実現することが難しい大きなスケールでの一様等方性の外力により駆動されるという理想条件、第二に、データは慣性領域が有限の幅を持つということである。従って、我々は局所的な体積平均のエネルギー散逸率とエネルギー流束関数を定義どおりにより正確に調べることができる。

## 2 数値解析方法

### 定常乱流の実現方法

DNS で生成される乱流は減衰乱流と定常乱流 (強制乱流) が考えられる。外力を与えなければ、乱流のエネルギーは粘性により減衰するので減衰乱流と呼ばれる。本研究では統計的に定常な乱流を実

表 1: 数値パラメータ

| Label | N        | $k_{max}$ | $\nu$                | $c_f$ | forcing range     | $\Delta t$           |
|-------|----------|-----------|----------------------|-------|-------------------|----------------------|
| run1  | $1024^3$ | 483       | $2.8 \times 10^{-4}$ | 0.51  | $1 \leq k \leq 2$ | $5.0 \times 10^{-4}$ |
| run2  | $1024^3$ | 483       | $2.0 \times 10^{-4}$ | 0.51  | $1 \leq k \leq 2$ | $5.0 \times 10^{-4}$ |

表 2: 乱流場の統計量

| $R_\lambda$ | $E$  | $\epsilon$ | $\eta$                | $k_{max}\eta$ | $\lambda$             | $L$   | $T_{eddy}^{av}$ |
|-------------|------|------------|-----------------------|---------------|-----------------------|-------|-----------------|
| 395         | 1.82 | 0.512      | $2.58 \times 10^{-3}$ | 1.24          | $9.83 \times 10^{-2}$ | 1.139 | 5.36            |
| 463         | 1.78 | 0.493      | $1.99 \times 10^{-3}$ | 0.961         | $8.39 \times 10^{-2}$ | 1.150 | 1.71            |

現する為、以下のように外力の項を加えた非圧縮性の Navier-Stokes 方程式を用いる。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (12)$$

$\mathbf{f}$ : Gaussian force (white noise in time)

ここで  $\nu$  は動粘性率である。以下簡単のために  $\rho = 1$  とする。3次元の乱流は (11), (12) 式を数値的に解くことにより実現される。(11) 式の右辺第三項が外力を表しており、低波数領域でエネルギーを励起する。外力は統計的には等方性を持つように各時刻で与えている。Navier-Stokes 方程式はフーリエ空間で時間積分される。時間発展については4次の Runge Kutta Gill 法を用いる。格子点は  $1024^3$ 、境界条件は周期境界条件である。フーリエスペクトル法は空間微分を良い精度で行うことができる。本研究では  $1024^3$  という高解像度の数値シミュレーションを実現する為、大型ベクトル並列型計算機 (VPP5000 名古屋大学大型計算機センター) を用いた。

### 3 結果

本研究において使用したパラメータを表1に、得られた乱流場の代表的な統計量を表2に示す。 $T_{eddy}^{av}$  は、 $\epsilon_r$  と  $\Pi_r$  の時間平均をとる長さで巨視的な渦の回転時間で表わしてある。以後、各 run は  $R_\lambda$  で表すことにする。今回は  $1024^3$  という高解像度で、 $R_\lambda$  がおよそ 390 と 460 の計算が実現でき、これらはともに世界最大である。

#### 3.1 スペクトル

##### エネルギースペクトル

本研究に用いるデータに慣性領域が存在することを2つのグラフで示す。まずはエネルギースペクトルについてだが、Kolmogorov の理論に従い次のようなスケーリングを行った。

$$E(k) = \bar{\epsilon}^{1/4} \nu^{5/4} \phi(k\eta) \quad (13)$$

ここに、 $\phi$  は無次元関数である。このときのグラフを図 (1) に示す。エネルギースペクトルは上のスケーリングにおいて、2つのスペクトルが共によく一致しているのがわかる。なお、この図は  $(k\eta)^{5/3}$

をかけて  $E(k) \propto k^{-5/3}$  でグラフが水平になるようしてあり,  $R_\lambda$  の増加とともに水平になる領域がある. ここが慣性領域である. この水平になる位置の値が Kolmogorov 定数  $K$  であり, 1.63 となった. Kolmogorov 定数  $K$  の値はかなりばらつきがあるが, これまでの実験データを総合すると  $1.62 \pm 0.17$  である (Sreenivasan 1995). 実験値と今回の DNS がかなり近い値をとることが確認できた.

### Kármán-Howarth-Kolmogorov 方程式

2 次と 3 次の局所等方向性が満たされる領域で成り立つ K-H-K 方程式は, 2 次と 3 次の縦構造関数を関係づける, 厳密な関数式として知られている. 定常状態では以下の式 (14) により表わされている.

$$\begin{aligned} \frac{4}{5} \bar{\epsilon} r &= -D_{LLL} + 6\nu \frac{\partial D_{LL}}{\partial r} + Z \\ D_{LL} &\equiv \langle (\delta u_r)^2 \rangle, \quad D_{LLL} \equiv \langle (\delta u_r)^3 \rangle \end{aligned} \quad (14)$$

$D_{LL}$  と  $D_{LLL}$  は 2 次と 3 次の縦構造関数,  $Z$  は外力項である. 慣性領域の時, 粘性と外力項は小さく無視できるので,  $D_{LLL}$  項は  $\bar{\epsilon} r$  で割ることにより  $4/5$  となる. つまり, Kolmogorov の  $4/5$  法則が得られる. よって, 図 2 における  $D_{LLL}$  項が flat な領域で慣性領域が存在することが見て取れる.

## 3.2 局所平均エネルギー散逸率

### PDF と Flatness

局所平均エネルギー散逸率, 式 (4) を考えるとき,  $y$  についての体積平均は特にスケール  $r$  が大きくなると計算量が膨大になるので, 効率化のため以下のように平均と揺らぎの部分に分ける.

$$\begin{aligned} \epsilon_r(\mathbf{x}) &= \langle \epsilon(\mathbf{x}) \rangle + \frac{1}{V_r} \int_{V_r} \tilde{\epsilon}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= \langle \epsilon(\mathbf{x}) \rangle + 3 \int_{V_r} \tilde{\epsilon}(\mathbf{k}) \left( \frac{\sin(kr)}{k^3 r^3} - \frac{\cos(kr)}{k^2 r^2} \right) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k} \end{aligned} \quad (15)$$

ここで  $V_r = 4\pi r^3/3$ ,  $\tilde{\epsilon}(\mathbf{x})$  はエネルギー散逸率の平均周りの揺らぎを示す.

図 3 は,  $(\epsilon_r - \langle \epsilon_r \rangle) / \sigma(\epsilon_r)$  に対する規格化された PDF である.  $\sigma(\epsilon_r)$  は  $\epsilon_r$  の標準偏差である.  $R_\lambda = 395$ . ここで  $r$  は格子間距離で, 単位あたりの距離は  $dx = 2\pi/1024$ . スケール  $r$  が小さいほど, PDF の裾は正の側で広がっている. 一方, 左側では  $r$  が減少するほど Gauss 分布の内側に入る.

図 4~6 は,  $(\ln \epsilon_r - \langle \ln \epsilon_r \rangle) / \sigma(\ln \epsilon_r)$  に対する規格化された PDF を示す.  $\sigma(\ln \epsilon_r)$  は  $\ln \epsilon_r$  の標準偏差である. Kolmogorov の第 3 仮説にあるようにスケール  $r$  が小さい時,  $\ln \epsilon_r$  の PDF は Gauss 分布に近い. しかしスケール  $r$  が大きくなるほど, Gauss 分布の内側に入り込む傾向にある.

図 4 は, 散逸領域での  $(\ln \epsilon_r - \langle \ln \epsilon_r \rangle) / \sigma(\ln \epsilon_r)$  に対する規格化された PDF を示す. 散逸領域では Gauss 分布にかなり近いことが見てとれる. 続いて慣性領域下部での  $(\ln \epsilon_r - \langle \ln \epsilon_r \rangle) / \sigma(\ln \epsilon_r)$  に対する規格化された PDF (図 5) でも Gauss 分布に近い. 慣性領域上部では, Gauss 分布より早く減衰するが, それでも  $10^{-4}$  辺りまでかなり近い.  $\ln \epsilon_r$  の PDF が Gauss 分布に近いかどうかを定量的に見るために, 以下の Flatness を用いて検証する.

$$F = \frac{\langle (\ln \epsilon_r - \langle \ln \epsilon_r \rangle)^4 \rangle}{\langle (\ln \epsilon_r - \langle \ln \epsilon_r \rangle)^2 \rangle^2} \quad (16)$$

横軸は規格化されたスケール  $r/\eta$  でプロットされている. 図 7 によると, 散逸領域と慣性領域では, Flatness は 3 に近い. このことは,  $\ln \epsilon_r$  の PDF が Gauss 分布に近いことと対応している. また, さ

らに大きなスケールでは Flatness は 3 より減少する。これは  $\ln \epsilon_r$  の PDF が Gauss 分布からずれてく  
ることと対応している。今回、 $R_\lambda = 395$  と 463 のデータを用いて統計を取ったが、 $R_\lambda = 463$  の方が  
スケールリングが良いことが分かった。しかし、こちらはまだ平均する時間が少ない為、続けてデー  
タ取りをしていきたいと考えている。

$\ln \epsilon_r$  の PDF が大きなスケール  $r$  で速く減衰することは、以下のように考えられる。まず速度場が  
エネルギースペクトルを与えた多重結合の Gaussian であると仮定すると、実空間での散逸場の可干渉  
性のスケールは、散逸スケール  $\eta$  の程度である。言い換えると、半径  $\eta$  程度の球の中でのみ散逸場が  
相関を持つような、そういう領域の集合からなっていると考えられる。そのエネルギー散逸率  $\epsilon^G(\mathbf{x})$   
に対する PDF の裾は、指数関数的である。そこで  $r^3 (\gg \eta^3)$  の体積で空間平均を取ると、 $\epsilon_r^G(\mathbf{x})$  に対  
する PDF は中心極限定理により Gauss 分布になるであろう。(図 8)

次に実際の乱流での速度場を考える。スケールが  $L$  である速度場にも同様の散逸場の構造がある。  
しかし  $r^3 (\gg L^3)$  の体積で  $\epsilon(\mathbf{x})$  の空間平均を取った時、 $r$  が  $L$  よりも大きい散逸場の巨視的な構  
造からくる相関はなくなるから、再び中心極限定理によって Gauss 的な  $\epsilon_r$  の PDF を見ることができ  
る。実際、裾は Gauss 分布より速く減衰するが、 $r > L$  の  $\epsilon_r$  の PDF の形は、Gauss 分布に近い。こ  
の大きなスケール  $r$  での  $\epsilon_r$  の Gauss 的な PDF が  $\epsilon_r$  の対数で書かれる時、 $\ln \epsilon_r$  の PDF の裾はより  
ずっと速く減衰する。一方、スケール  $r$  が  $\eta (\ll L)$  のオーダーの時、スケール空間におけるカスケ  
ードステップの数は増加し、分割係数に対する中心極限定理はより有効に働くようになる。サイズが 1  
ステップにつき 2 のファクターだけ減少すると仮定することによって、散逸スケール  $\eta$  に到達するま  
でのステップの数を見積もることができる。例えば、 $L/\eta \approx 440 = 2^n$  は  $R_\lambda = 395$  に対して  $n \approx 8.8$   
を生じ、 $L/\eta \approx 577 = 2^n$  は  $R_\lambda = 463$  に対して  $n \approx 12.5$  を与える。これらの値は中心極限定理が効  
くために十分大きくはないが、実際の  $\ln \epsilon_r$  の PDF は Gauss 分布に近い。

### $\epsilon_r$ の $p$ 次のモーメント

$\epsilon_r$  の  $p$  次のモーメントのスケールリングは、lognormal では以下のようにになる。

$$\langle \epsilon_r^p \rangle = A_p \bar{\epsilon}^p \left( \frac{L}{r} \right)^{\mu p(p-1)/2} \quad (17)$$

図 9 は  $r/\eta$  に対する  $\langle \epsilon_r^2 \rangle (r/\eta)^\mu$  の変化を示している。 $(r/\eta)^\mu$  を掛けることにより、曲線の平らな領域  
が  $\langle \epsilon_r^2 \rangle \propto r^{-\mu}$  となることを示している。正の普遍定数  $\mu$  は、実験より 0.20 ~ 0.25 といわれているが、  
ここでは試験的に 0.20, 0.22, 0.25 を採用した。散逸領域では  $\mu = 0.25$ 、慣性領域では  $\mu = 0.20$  で Flat  
と言える領域が見える。これは実験とほぼ一致している。この  $\mu$  の値をナビエ・ストークス方程式の  
非線形項によるエネルギー流束関数の 2 次のモーメント (以下の式 (18)) のスケールリング指数と比較す  
るのも面白いかもしれない。

$$\langle \Pi(\mathbf{r})^2 \rangle \approx \frac{S_6^L(\mathbf{r})}{r^2} = \frac{\langle |\delta u_r|^6 \rangle}{r^2} \propto r^{\epsilon_6^L - 2} \quad (18)$$

現在の DNS では、 $R_\lambda = 395$  で  $S_6^L(\mathbf{r}) \propto r^{1.79}$  となり ( $R_\lambda = 463$  では  $r^{1.77}$ )、 $\langle \Pi(\mathbf{r})^2 \rangle \approx S_6^L(\mathbf{r})/r^2 \propto$   
 $r^{-0.21}$  を意味する。0.21 という指数は、 $R_\lambda = 395$  での  $\mu = 0.20$  に非常に近い。また、 $\epsilon_r^G$  の  $p$  次の  
モーメントを図 10 に示す。 $\epsilon^G$  は Gaussian 速度場より作られているので、間欠性を持たない。従って、  
 $\epsilon_r^G$  は  $\mu = 0$  の統計に従うと予想される。実際、図 10 より慣性領域で  $r^0$  の傾きを持つことが分かる。

### 3.3 エネルギー流束関数

エネルギー流束関数  $\Pi_r$  の平均  $\langle \Pi_r \rangle$  が慣性領域で  $\langle \epsilon \rangle$  と等しくなるか DNS によって検証した。それを図 11 に示す。横軸は  $r/\eta$ ，縦軸は  $\langle \Pi_r \rangle / \langle \epsilon \rangle$  と規格化をし，値がおよそ 1 であれば  $\langle \Pi_r \rangle \approx \langle \epsilon \rangle$  ということになる。そこで図 11 を見てみると，慣性領域でほぼ 1 の Flat な領域が見られる。つまり慣性領域で  $\langle \Pi_r \rangle \approx \langle \epsilon \rangle$  ということと言える。

#### $\Pi_r$ の PDF

$\Pi_r$  に対する規格化された PDF を図 12 に示す。格子間距離  $r$  が小さくなるにつれ，PDF の裾は大きく広がっている。また，正の側に歪んでいることが見てとれる。更に，Gaussian Field の速度場から求めた  $\Pi_r^G$  の PDF を図 13 に示す。 $\Pi_r^G$  の PDF は， $\Pi_r$  の PDF よりも裾が狭くなることが分かった。

#### $\Pi_r$ の $p$ 次のモーメント

図 14 に  $R_\lambda = 463$  における  $\Pi_r$  の  $p$  次のモーメント  $\langle \Pi_r^p \rangle$  を示す。図で見てとれるように， $\langle \Pi_r^p \rangle$  はほぼ  $r^1$  の傾きを持っている。しかし，K41 では  $r^0$ ，フラクタル理論では  $r^\beta (\beta < 0)$  となっており，理論と合わない。このことについては今後見直す必要がある。また，図 15 では， $\langle \Pi_r^p \rangle$  によって規格化した  $\langle \Pi_r^p \rangle / \langle \Pi_r^2 \rangle$  を示している。このように  $\langle \Pi_r^p \rangle$  は  $p$  に独立な傾きを持っていることが見てとれるが，この正当性については今後詳細な研究が必要である。

更に，Gaussian Field の速度場から求めた  $p$  次のモーメントを図 16 に示す。 $\Pi_r$  は正負両方の値を持つので偶数次のモーメントだけを示した。式 (10) より， $\Pi_r$  の  $p$  次モーメントは

$$\langle \Pi_r^p \rangle \propto \langle (\delta \mathbf{u} \delta \mathbf{u} \delta \mathbf{s})^p \rangle \quad (19)$$

となる。ここで  $\delta \mathbf{s} = (\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^t$  である。Gaussian 速度場は間欠性を持たないので，式 (19) は以下のように分離できる。

$$\langle (\delta \mathbf{u} \delta \mathbf{u} \delta \mathbf{s})^p \rangle \approx \langle \delta \mathbf{u}^{2p} \rangle \langle (\delta \mathbf{s})^p \rangle \quad (20)$$

$\langle (\delta \mathbf{s})^p \rangle$  は， $\langle \delta \mathbf{s} \rangle \propto \epsilon^{1/2}$  より， $\langle (\delta \mathbf{s})^p \rangle \approx \langle \epsilon^{p/2} \rangle$  となる。K41 が当てはまると予想すると， $\langle \delta \mathbf{u}^{2p} \rangle \propto r^{2p/3}$ ， $\langle \epsilon^{p/2} \rangle \propto r^0$  となる。そこで  $\langle \Pi_r^G \rangle$  を見てみると (図 16)，図 14 の  $\langle \Pi_r^p \rangle$  とは異なり， $p$  によって傾きが違う。 $(r/\eta)^{2p/3}$  で規格化してみたところ，図 17 のように Flat に近く見えた。これは， $\langle \Pi_r^G \rangle \propto \langle \delta \mathbf{u}^{2p} \rangle \propto r^{2p/3}$  を意味し， $\langle (\delta \mathbf{s})^p \rangle$  の項はあまり効果をもたないことを意味する。つまり予想した K41 の理論とほぼ対応している。

## 4 結論

結果と考察を以下にまとめる。

・局所平均エネルギー散逸率  $\epsilon_r$  の PDF について

- $\epsilon_r$  の PDF は Gauss 分布から大きくずれている。スケール  $r$  が小さいほど，正の側で裾が広がっている。
- $\ln \epsilon_r$  の PDF は，スケール  $r$  が小さい時は K62 の第 3 仮説のように，Gauss 分布によく従っている。しかし，スケール  $r$  が大きくなるにつれ，連続的に Gauss 分布の内側にずれてくるが，慣

性領域下部では Gauss 分布にかなり近くなっている。さらに大きなスケール  $r$  では, Gauss 分布の内側に入り込む傾向にある。

- Gaussian Field の  $\epsilon_r^G$  は Gauss 分布に近くなることが分かった。

・  $\ln \epsilon_r$  の Flatness について

- $\ln \epsilon_r$  の Flatness は, 散逸領域から慣性領域にかけて 3 に近い値をとった。このことは,  $\ln \epsilon_r$  の PDF がこの領域で Gauss 分布に近いことを意味する。
- さらに大きなスケールでは Flatness は 3 より小さくなり, Gauss 分布における早い減衰とつながる。しかし, K62 の第 3 仮説ではスケール  $r$  が十分小さいスケールで対数正規分布に従うと述べているので,  $r$  が大きな領域では Gauss 分布からずれてくるのも頷ける。

・  $\epsilon_r$  の  $p$  次のモーメントについて

- 散逸領域で  $\mu = 0.25$ , 慣性領域で  $\mu = 0.20$  で  $\langle \epsilon_r^p \rangle \propto r^{-\frac{\mu p(p-1)}{2}}$  の関係にあり,  $\mu$  は実験値とほぼ一致した。

・ エネルギー流束関数  $\Pi_r$  について

- エネルギー流束関数の平均  $\langle \Pi_r \rangle$  は, 慣性領域で  $\langle \Pi_r \rangle \approx \langle \epsilon \rangle$  の関係にある。
- $\Pi_r$  自体は正負両方の値をとり, 大きな揺らぎを持つことが分かった。これは  $\epsilon_r$  の統計と異なる。
- $\Pi_r$  の PDF は, 正に歪んでいる。また裾野はスケール  $r$  の減少と共にひろくなることも分かった。
- $\Pi_r$  の  $p$  次のモーメント  $\langle \Pi_r^p \rangle$  は  $p$  に独立な傾きを持った。このことは予想していたものと違う値だったので再検討が必要である。
- Gaussian Field の  $\Pi_r^G$  の  $p$  次のモーメントは  $p$  によって異なる傾きを持つ。そして, それぞれ  $r^{2p/3}$  の傾きを持つことが分かった。

## 参考文献

- [1] Toshiyuki Gotoh and Daigen Fukayama 2001 "Velocity field statistics in homogeneous steady turbulence obtained using a high resolution DNS" Submitted to Phys. Rev. Lett.
- [2] Nianzheng Cao, Shiyi Chen and Gary D. Doolen. 1999 "Statistics and structures of pressure in isotropic turbulence," Phys. Fluids. 11 2235
- [3] Gregory L. Eyink 1994 "Local Energy Flux and the Refined Similarity Hypothesis" Journal of Statistical Physics. Vol.78, Nos.1/2, 1995
- [4] 深山大元 2001 "3次元乱流の間欠性-構造関数の解析-" 中央大学博士論文
- [5] 落合利徳 2001 "大規模並列数値計算による 3次元乱流の統計的性質" 名古屋工業大学生産システム工学科修士論文
- [6] 和田聡 2000 "3次元乱流における乱流の構造と圧力場の統計" 名古屋工業大学生産システム工学科修士論文
- [7] 永谷公学 1999 "3次元定常乱流場における圧力場の統計性" 名古屋工業大学生産システム工学科修士論文
- [8] 後藤俊幸 1998 「乱流理論の基礎」: 朝倉書店

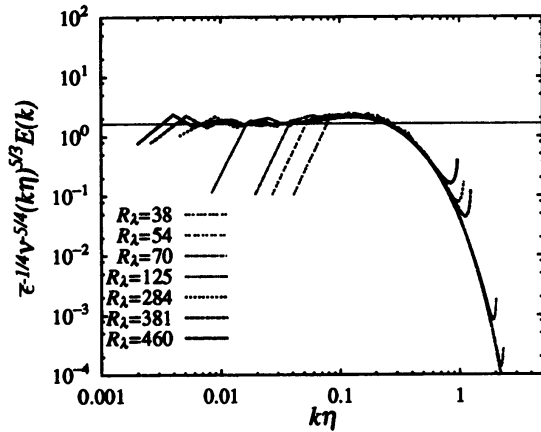


図 1: Kolmogorov の  $-5/3$  乗則に従うエネルギースペクトル

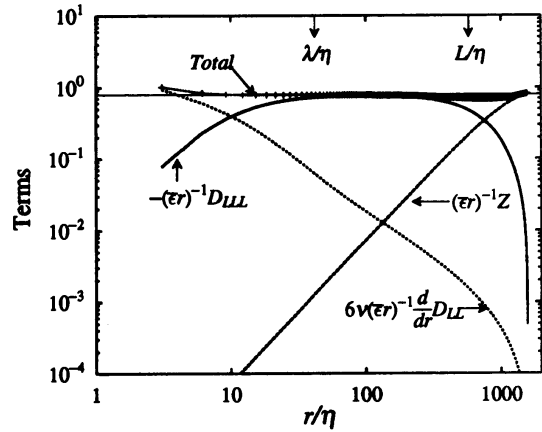


図 2: K-H-K 方程式の各項の変化.

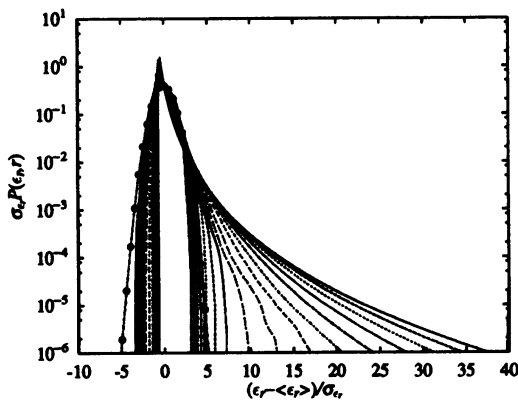


図 3:  $\epsilon_r$  に対する規格化された PDF.  $R_\lambda = 395$ . 外側の曲線から  $r_n/\eta = 2^{n-1} dx/\eta = 2.38 \times 2^{n-1}, n = 1, \dots, 5$  と  $r_n/\eta = 2.38 \times 32n, n = 1, \dots, 10$ . dot & line は Gauss 分布

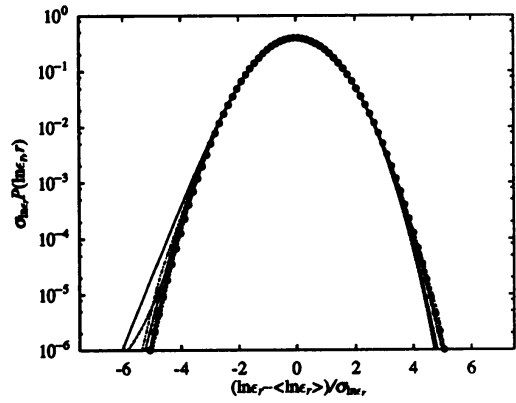


図 4: 散逸領域での  $\ln \epsilon_r$  に対する規格化された PDF.  $R_\lambda = 395$ . 外側の曲線から  $r_n/\eta = 2^{n-1} dx/\eta = 2.38 \times 2^{n-1}, n = 1, \dots, 5$

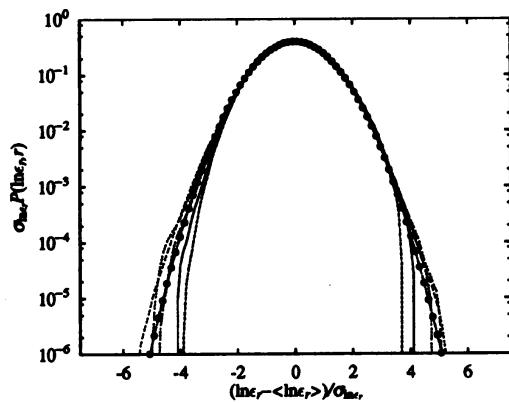


図 5: 慣性領域での  $\ln \epsilon_r$  に対する規格化された PDF.  $R_\lambda = 395$ . 外側の曲線から  $r_n/\eta = 32n dx/\eta = 2.38 \times 32n, n = 1, \dots, 5$

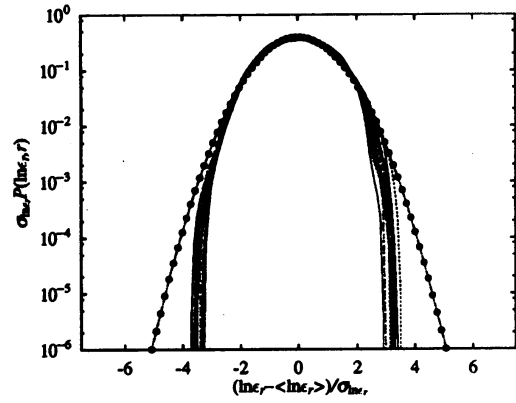


図 6: さらに大きなスケール  $r$  での  $\ln \epsilon_r$  に対する規格化された PDF.  $R_\lambda = 395$ . 外側の曲線から  $r_n/\eta = 32n dx/\eta = 2.38 \times 32n, n = 6, \dots, 10$

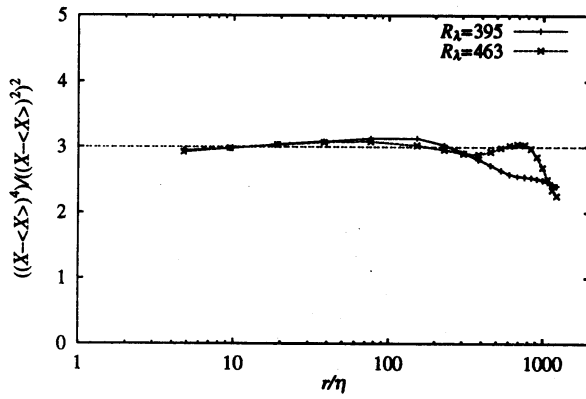


図 7: スケール  $r/\eta$  に関する  $\ln \epsilon_r$  の Flatness

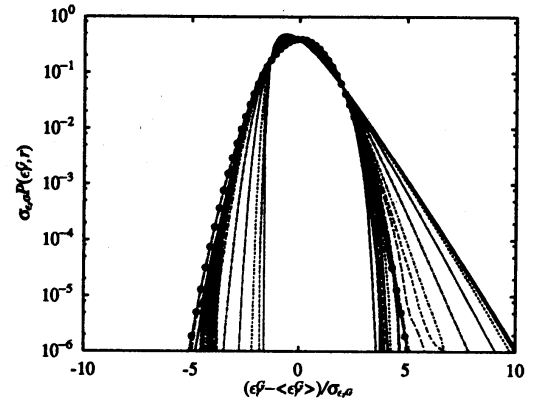


図 8:  $\epsilon_r^G$  に対する規格化された PDF.  $R_\lambda = 395$ . 外側の曲線から  $r_n/\eta = 2^{n-1} dx/\eta = 2.38 \times 2^{n-1}$ ,  $n = 1, \dots, 5$  と  $r_n/\eta = 2.38 \times 32n$ ,  $n = 1, \dots, 10$ .

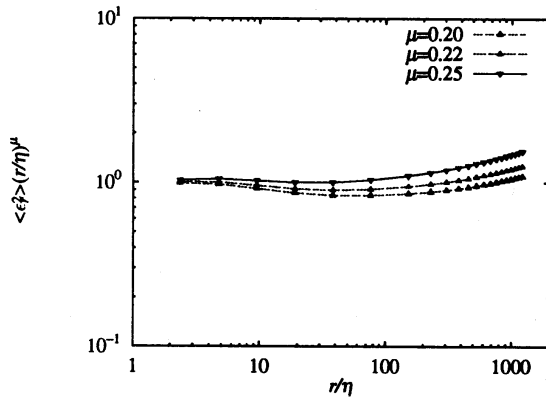


図 9:  $r/\eta$  に対する  $\langle \epsilon_r^2 \rangle (r/\eta)^\mu$  の比較.  $R_\lambda = 395$ ,  $\mu = 0.2, 0.22, 0.25$

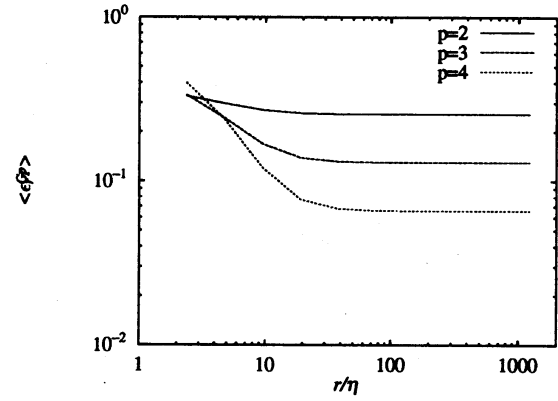


図 10:  $r/\eta$  に対する  $\langle \epsilon_r^G p \rangle$  の比較.  $R_\lambda = 395$ ,  $\eta = 2.58 \times 10^{-3}$

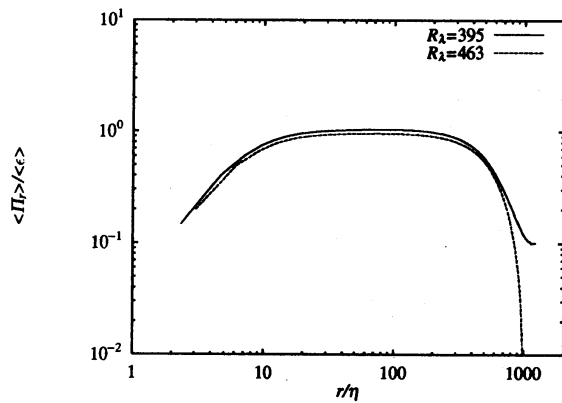


図 11:  $r/\eta$  に対する規格化されたエネルギー流束関数の平均  $\langle \Pi_r \rangle / \langle \epsilon \rangle$

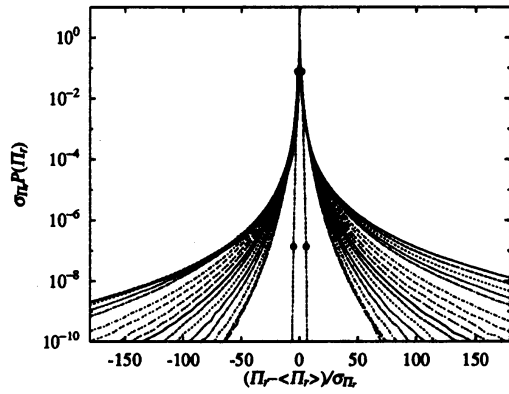


図 12:  $\Pi_r$  に対する規格化された PDF.  $R_\lambda = 395$ . 外側の曲線から  $r_n/\eta = 2^{n/2} dx/\eta$ ,  $n = 0, \dots, 18$

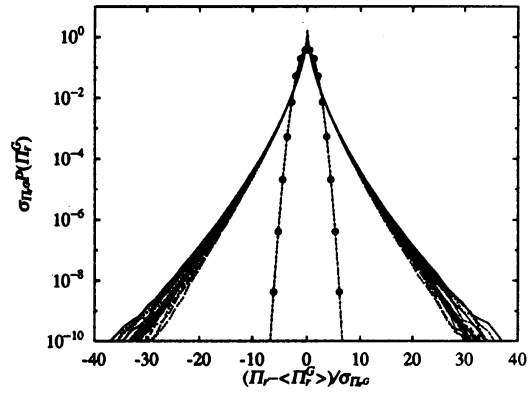


図 13:  $\Pi_r^G$  に対する規格化された PDF.  $R_\lambda = 395$ . 外側の曲線から  $r_n/\eta = 2^{n/2} dx/\eta$ ,  $n = 0, \dots, 18$

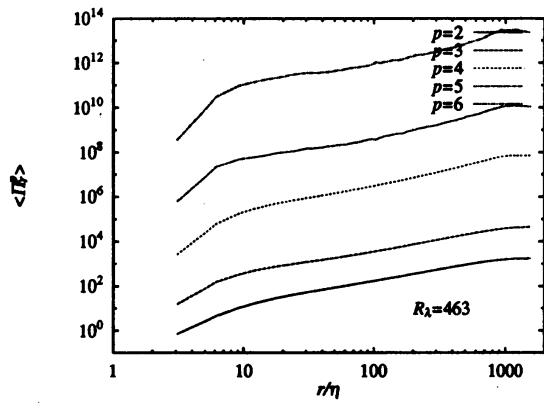


図 14:  $r/\eta$  に対する  $\Pi_r$  の  $p$  次のモーメント  $\langle \Pi_r^p \rangle$ .  $p = 2, \dots, 6$ .  $R_\lambda = 463$ .

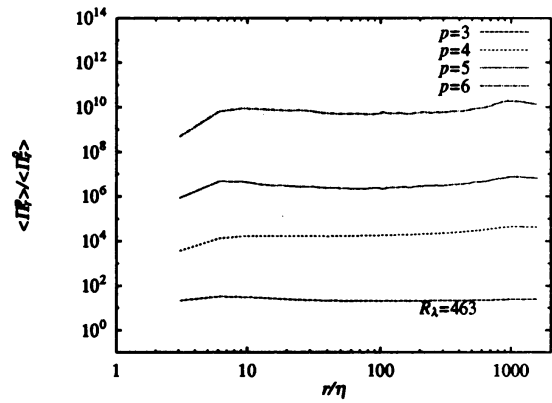


図 15:  $\langle \Pi_r^2 \rangle$  によって規格化された  $r/\eta$  に対する  $\Pi_r$  の  $p$  次のモーメント.  $p = 3, \dots, 6$ .  $R_\lambda = 463$

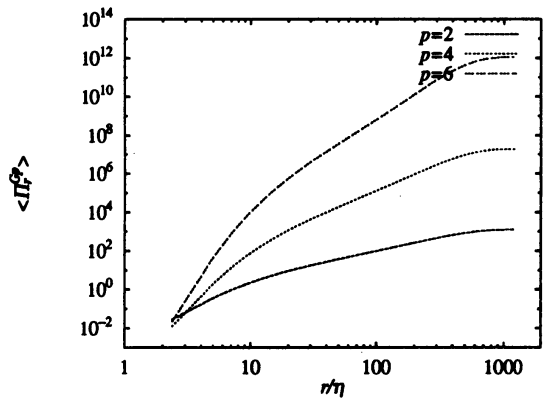


図 16:  $r/\eta$  に対する  $\Pi_r$  の  $p$  次のモーメント  $\langle \Pi_r^{G,p} \rangle$ .  $p = 2, 4, 6$ .  $R_\lambda = 395$ .

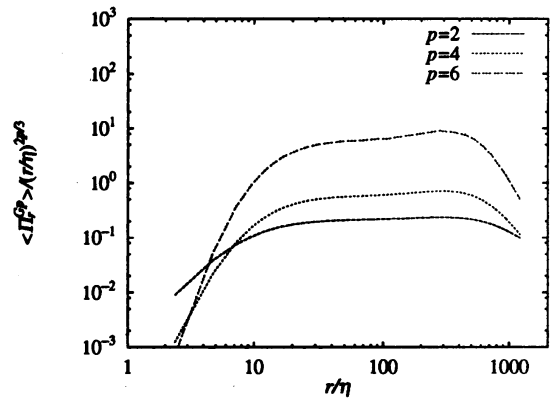


図 17:  $(r/\eta)^{2p/3}$  によって規格化された  $r/\eta$  に対する  $\Pi_r^G$  の  $p$  次のモーメント.  $p = 2, 4, 6$ .  $R_\lambda = 395$