

Starlikeness of integral transforms of a radial slit mapping

寺田貴雄 広島大学理学研究科
Takao Terada Hiroshima University

1. 序

$\mathcal{A}$ を

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

によって正規化された単位円板 $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ 上で正則な函数 f の族とする。 $\mathcal{L}\mathcal{U}$ を $\mathbb{D}$ 上で局所単葉な $\mathcal{A}$ の元の集合とする。 $f, g \in \mathcal{L}\mathcal{U}$ とし、 α を複素数とする。そのとき Hornich 演算は

$$(f \oplus g)(z) = \int_0^z f'(w)g'(w)dw \quad (\alpha \star f)(z) = \int_0^z f'(w)^\alpha dw$$

によって定義される。ただし $(f')^\alpha = \exp(\alpha \log f')$ の分枝は $(f')^\alpha(0) = 1$ とする。この計算は $\mathcal{A}$ で局所単葉函数の集合 $\mathcal{L}\mathcal{U}$ に線形構造を与える。

定義 1. f と g を結ぶ線分を

$$[f, g] = \{(1-t) \star f \oplus t \star g : 0 \leq t \leq 1\}$$

とする。

$[f, g]$ に対し以下のことが知られている。 $\mathcal{S}^*, \mathcal{K}, \mathcal{C}$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^* &= \left\{ f \in \mathcal{A}; \operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0 \quad (z \in \mathbb{D}) \right\} \\ \mathcal{K} &= \left\{ f \in \mathcal{A}; \operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > 0 \quad (z \in \mathbb{D}) \right\} \\ \mathcal{C} &= \left\{ f \in \mathcal{A}; g \in \mathcal{S}^*, \operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > 0 \quad (z \in \mathbb{D}) \right\} \end{aligned}$$

定理 1 (Cima-Pfaltzgraff,[3]). 凸函数族 $\mathcal{K}$ は凸である。すなわち $\forall f, g \in \mathcal{K}$ に対して $[f, g] \subset \mathcal{K}$ 。

定理 2 (Y.J.Kim-Merkes,[4]). 近接凸函数族 $\mathcal{C}$ は凸である。すなわち $\forall f, g \in \mathcal{C}$ に対して $[f, g] \subset \mathcal{C}$ 。

さらに $\mathcal{S}^*$ については Y.C.Kim, Ponnusamy, Sugawa, [1] で以下のことがわかっている。

定理 3 ([1]). 星状函数族 $\mathcal{S}^*$ は Hornich 演算に関して凸ではない。

予想 1 ([1]). $\mathcal{S}^*$ は Hornich 演算による線形構造を入れたとき原点に関して星状である。

この予想は次の予想と同値である。

予想 2. N : 自然数, $\mu_j > 0, \sum_{j=1}^N \mu_j = 2, \zeta_j \in \partial\mathbb{D} (j = 1, \dots, N)$ に対し $f(z)$ が

$$f(z) = \frac{z}{\prod_{j=1}^N (1 - \zeta_j z)^{\mu_j}}$$

で与えられたとき $\alpha \in [0, 1]$ に対して $\alpha * f \in \mathcal{S}^*$ である。

これについては次の定理が知られている。

定義 2. $\mathcal{SS}(\alpha)$ を

$$\left| \arg \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{\alpha\pi}{2}, \quad z \in \mathbb{D}$$

を満たす f からなる $\mathcal{S}$ の部分族とする。ただし α は正数である。

定理 4 (Y.C.Kim, Ponnusamy, Sugawa, [1]). K をケーベ函数とする。すなわち

$$K(z) = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

そのとき $\alpha \in [0, 1]$ に対して $\alpha * K \in \mathcal{SS}(\min\{1, 3\alpha\})$ 。

主定理. (予想 2 の $N = 2, \mu_1 = \mu_2$ の場合) $\zeta_1, \zeta_2 \in \partial\mathbb{D}$ に対し

$$f(z) = \frac{z}{(1 - \zeta_1 z)(1 - \zeta_2 z)} \quad (\text{予想 2 の } N = 2, \mu_1 = \mu_2 \text{ の場合})$$

とする。そのとき $\alpha \in [0, 1]$ に対して $\alpha * f \in \mathcal{S}^*$ 。

2. 主定理の証明

$$f_\alpha(z) = (\alpha * f)(z) = \int_0^z (f'(\zeta))^\alpha d\zeta$$

とおく。

f を回転することにより次のように仮定して一般性を失わない。

$$f(z) = \frac{z}{(1-\zeta z)(1-\bar{\zeta}z)}, \quad \zeta \in \partial\mathbb{D}.$$

$0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ と $\alpha = \frac{1}{2}$ の場合に分けて証明する。

$$0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$$

調和関数の最小値原理を用いて証明する。

最小値の原理. $u(z)$ を $\mathbb{D}$ 上の調和関数とする。このとき

$$\forall \xi \in \partial\mathbb{D}, \liminf_{\mathbb{D} \ni z \rightarrow \xi} u(z) \geq 0 \implies \mathbb{D} \text{ 上 } u(z) \geq 0$$

が成り立つ。

$$u(z) = \operatorname{Re} Q_\alpha(z) \quad Q_\alpha(z) = \left(\frac{zf'_\alpha(z)}{f_\alpha(z)} \right)^{-1}$$

とおく。

(i) $\xi \neq \pm 1, \zeta, \bar{\zeta}$ のとき

この場合では $u(z)$ は ξ まで連続であるので $u(\xi) \geq 0$ を示せばよい。ここで $0 < \theta < \pi, \theta \neq \beta$ に対して $Q_\alpha(e^{i\theta}) = Q_\alpha(e^{-i\theta})$ であることを用いる。

$$f'_\alpha(z) = (f'(z))^\alpha = \frac{(1-z^2)^\alpha}{(1-\zeta z)^{2\alpha}(1-\bar{\zeta}z)^{2\alpha}}, \quad \zeta = e^{i\beta}.$$

z に $e^{i\theta}$ を代入することによって

$$\begin{aligned} f'_\alpha(e^{i\theta}) &= \frac{(1-e^{2i\theta})}{(1-e^{i(\beta+\theta)})^{2\alpha}(1-e^{i(-\beta+\theta)})^{2\alpha}} \\ &= \frac{\left(\frac{2}{i}\right)^\alpha e^{i\alpha\theta} \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^\alpha}{\left(\frac{2}{i}\right)^{2\alpha} (e^{i\frac{\beta+\theta}{2}})^{2\alpha} \left(\frac{e^{i\frac{\beta+\theta}{2}}-e^{-i\frac{\beta+\theta}{2}}}{2i}\right)^{2\alpha} (2i)^{2\alpha} (e^{i\frac{\beta-\theta}{2}})^{2\alpha} \left(\frac{e^{i\frac{\beta-\theta}{2}}-e^{-i\frac{\beta-\theta}{2}}}{2i}\right)^{2\alpha}} \\ &= 2^{-3\alpha} i^{-\alpha} e^{-i\alpha\theta} \sin^\alpha \theta \sin^{-2\alpha} \frac{\beta+\theta}{2} \sin^{-2\alpha} \frac{\beta-\theta}{2} \end{aligned}$$

となる。上式を積分すると

$$\begin{aligned} f_\alpha(e^{i\theta}) &= \int_0^{e^{i\theta}} \frac{(1-w^2)^\alpha}{(1-\zeta w)^{2\alpha}(1-\bar{\zeta}w)^{2\alpha}} dw \\ &= \int_0^1 \frac{(1-x^2)^\alpha}{(1-\zeta x)^{2\alpha}(1-\bar{\zeta}x)^{2\alpha}} dx + \int_1^{e^{i\theta}} \frac{(1-\zeta^2)^\alpha}{(1-\zeta w)^{2\alpha}(1-\bar{\zeta}w)^{2\alpha}} dw \\ &= C + i^{1-\alpha} 2^{-3\alpha} \int_0^\theta e^{i(1-\alpha)t} \sin^\alpha t \sin^{-2\alpha} \frac{\beta+t}{2} \sin^{-2\alpha} \frac{\beta-t}{2} dt \end{aligned}$$

を得る。

$$Q_{\alpha}(e^{i\theta}) = \frac{f_{\alpha}(e^{i\theta})}{e^{i\theta} f'_{\alpha}(e^{i\theta})} = C 2^{3\alpha} e^{-i(1-\alpha)\theta - \frac{\pi}{2}\alpha} \sin^{-\alpha} \theta \sin^{2\alpha} \frac{\beta + \theta}{2} \sin^{2\alpha} \frac{\beta - \theta}{2} \\ + i \sin^{-\alpha} \theta \sin^{2\alpha} \frac{\beta + \theta}{2} \sin^{2\alpha} \frac{\beta - \theta}{2} \\ \cdot \int_0^{\theta} e^{-i(1-\alpha)(\theta-t)} \sin^{\alpha} t \sin^{-2\alpha} \frac{\beta + t}{2} \sin^{-2\alpha} \frac{\beta - t}{2} dt,$$

$$u(e^{i\theta}) = C 2^{3\alpha} \cos\{(1-\alpha)\theta - \frac{\pi}{2}\alpha\} \sin^{-\alpha} \theta \sin^{2\alpha} \frac{\beta + \theta}{2} \sin^{2\alpha} \frac{\beta - \theta}{2} \quad (1) \\ + \sin^{-\alpha} \theta \sin^{2\alpha} \frac{\beta + \theta}{2} \sin^{2\alpha} \frac{\beta - \theta}{2} \\ \cdot \int_0^{\theta} \cos(1-\alpha)(\theta-t) \sin^{\alpha} t \sin^{-2\alpha} \frac{\beta + t}{2} \sin^{-2\alpha} \frac{\beta - t}{2} dt$$

となる。 $C > 0$ 、 $|(1-\alpha)\theta - \frac{\pi}{2}\alpha| < \frac{\pi}{2}$ なので、(1)の第一項は正である。一方、 $\theta \in (0, \pi)$ 、 $\beta + \theta < 2\pi$ 、 $\beta - \theta < \pi$ なので、(1)の第二項は正である。それ故、 $u(\xi) > 0$ 。

(ii) $\xi = \zeta, \bar{\zeta}$ のとき

対称性から $\xi = \zeta$ の場合を考えれば十分である。

f_{α} の導関数は

$$f'_{\alpha}(z) = (f'_{\alpha}(z))^{\alpha} = \frac{(1-z^2)^{\alpha}}{(1-\zeta z)^{2\alpha}(1-\bar{\zeta}z)^{2\alpha}} = \frac{(1-z^2)^{\alpha}}{(z-\zeta)^{2\alpha}(z-\bar{\zeta})^{2\alpha}}$$

であるので、 $z = \zeta$ のまわりの漸近展開は $\mathbb{D}$ 上で

$$f'_{\alpha}(z) = (A_0 + A_1(z-\zeta) + A_2(z-\zeta)^2 + \cdots)(z-\zeta)^{-2\alpha}, \\ = A_0(z-\zeta)^{-2\alpha} + A_1(z-\zeta)^{1-2\alpha} + O(1), \quad (z \rightarrow \zeta)$$

となる。ここで $A_0, A_1, \dots$ は定数である。

従って、 z に関する積分は $\mathbb{D}$ 上で

$$f_{\alpha}(z) = f_{\alpha}(\zeta) + \frac{A_0}{1-2\alpha}(z-\zeta)^{1-2\alpha} + \frac{A_1}{2-2\alpha}(z-\zeta)^{2-2\alpha} + O(1), \quad (z \rightarrow \zeta), f_{\alpha}(\zeta) \neq 0$$

である。このことから $Q_{\alpha}(z)$ は

$$Q_{\alpha}(z) = \frac{f_{\alpha}(z)}{z f'_{\alpha}(z)} = \frac{(z-\zeta)^{2\alpha}}{z A_0} (f_{\alpha}(\zeta) + o(1))$$

で表される。従って

$$\liminf_{\mathbb{D} \ni z \rightarrow \zeta} u_{\alpha} = 0$$

である。

(iii) $\xi = \pm 1$ のとき

(ii) と同様に $z = 1$ のまわりの漸近展開は

$$\begin{aligned} f'_\alpha(z) &= (B_0 + B_1(1-z) + B_2(z-1)^2 + \cdots)(1-z)^\alpha, \\ &= B_0(1-z)^\alpha + B_1(1-z)^{1+\alpha} + O(1), \quad (z \rightarrow 1) \end{aligned}$$

となる。ここで $B_0, B_1, \dots$ は定数である。従って $f_\alpha(z)$ が

$$f_\alpha(z) = f_\alpha(1) - \frac{B_0}{1+\alpha}(1-z)^{1+\alpha} - \frac{B_1}{2+\alpha}(1-z)^{2+\alpha} + O(1), \quad (z \rightarrow 1), f_\alpha(1) \neq 0$$

であることから $Q_\alpha(z)$ は

$$Q_\alpha(z) = \frac{f_\alpha(1) - \frac{B_0}{1+\alpha}(1-z)^{1+\alpha} - \frac{B_1}{2+\alpha}(1-z)^{2+\alpha} + O(1)}{\{1 - (1-z)\}\{B_0(1-z)^\alpha + B_1(1-z)^{1+\alpha} + O(1)\}} = \frac{f_\alpha(1)}{B_0(1-z)^\alpha} + O(1)$$

で表される。 $B_0 = 2^\alpha(1-\zeta)^{-2\alpha}(1-\bar{\zeta})^{-2\alpha}$ であるので $B_0 > 0$ である。また $f_\alpha(1)$ は $f_\alpha(x)$ ($0 < x < 1$) が実数値であることを用いる。そのとき

$$\frac{f_\alpha(1) - f_\alpha(0)}{1-0} = f'_\alpha(c) \quad 0 < \exists c < 1$$

であるので

$$f_\alpha(1) = f'_\alpha(c) = \frac{(1-c^2)^\alpha}{(c-\zeta)^{2\alpha}(c-\bar{\zeta})^{2\alpha}} > 0$$

となる。故に $\mathbb{D}$ 上

$$\operatorname{Re} \frac{1}{(1-z)^\alpha} > 0$$

から

$$\liminf_{\mathbb{D} \ni z \rightarrow 1} u(z) = \infty$$

となる。 $\xi = -1$ においても同様に示すことができる。(i),(ii),(iii) より $\forall \xi \in \partial\mathbb{D}$, $\liminf_{\mathbb{D} \ni z \rightarrow \xi} u(z) \geq 0$ 。故に $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ に対して $f_\alpha \in \mathcal{S}^*$ となる。

$$\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$$

$P_\alpha = \frac{zf'_\alpha}{f_\alpha}$ の実部が $\mathbb{D}$ 上で正であることを証明する。 P_α は $\mathbb{D} \setminus \{1, -1, \zeta, \bar{\zeta}\}$ の開近傍において正則函数に拡張できることに注意する。まず、特異点 $z = \zeta$ のまわりの P_α のふるまいを調べる。 f_α の導関数は

$$f'_\alpha(z) = (f'(z))^\alpha = \frac{(1-z^2)^\alpha}{(1-\zeta z)^{2\alpha}(1-\bar{\zeta}z)^{2\alpha}} = \frac{(1-z^2)^\alpha}{(z-\zeta)^{2\alpha}(z-\bar{\zeta})^{2\alpha}}$$

であるので、 $z = \zeta$ のまわりの漸近展開は $\mathbb{D}$ 上で

$$\begin{aligned} f'_\alpha(z) &= (A_0 + A_1(z - \zeta) + A_2(z - \zeta)^2 + \cdots)(z - \zeta)^{-2\alpha}, \\ &= A_0(z - \zeta)^{-2\alpha} + A_1(z - \zeta)^{1-2\alpha} + O(1), \quad (z \rightarrow \zeta) \end{aligned}$$

となる。ここで $A_0, A_1, \dots$ は定数である。

従って、 z に関する積分は $\mathbb{D}$ 上で

$$f_\alpha(z) = f_\alpha(\zeta) + \frac{A_0}{1-2\alpha}(z-\zeta)^{1-2\alpha} + \frac{A_1}{2-2\alpha}(z-\zeta)^{2-2\alpha} + O(1), \quad (z \rightarrow \zeta), f_\alpha(\zeta) \neq 0$$

となる。 P_α は

$$\begin{aligned} P_\alpha(z) &= \frac{zf'_\alpha}{f_\alpha} = \frac{\frac{1}{2}(z+\zeta+z-\zeta)(A_0 + A_1(z-\zeta) + \cdots)(z-\zeta)^{-2\alpha}}{\frac{A_0}{1-2\alpha}(z-\zeta)^{1-2\alpha} + \frac{A_1}{2-2\alpha}(z-\zeta)^{2-2\alpha} + \cdots} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(z+\zeta)A_0 + O(|z-\zeta|)}{\frac{A_0}{1-2\alpha}(z-\zeta) + \frac{A_1}{2-2\alpha}(z-\zeta)^2 + \cdots} \end{aligned}$$

であり、 $2\alpha - 1 > 0$ なので

$$P_\alpha(z) = \frac{2\alpha - 1}{2} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} + O(1).$$

$$\operatorname{Re} P_\alpha(z) = c \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|} + Q(z), \quad c = \alpha - \frac{1}{2} > 0$$

一方、 P_α は $z = -1, 1$ のまわりで有界である。 $Q(z)$ は有界調和函数である。ここで $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ に対して $\operatorname{Re} P_\alpha > 0$ を示すには、 $\mathbb{D}$ 上で $Q(z) > 0$ を示さなければならない。そのためには $0 < \theta < \pi, \theta \neq \beta$ に対して $\operatorname{Re} P_\alpha(e^{i\theta}) > 0$ が示せば十分である。以下 (i) と同様な方法によって $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ に対して $f_\alpha \in \mathcal{S}^*$ を得る。

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

星状函数列の極限も星状函数であることから

$$f_\alpha \rightarrow f_{\frac{1}{2}} \in \mathcal{S}^* \quad (\alpha \rightarrow \frac{1}{2})$$

となる。よって、より $\alpha \in [0, 1]$ に対して $f_\alpha \in \mathcal{S}^*$ がわかる。 $\square$

3. f の像領域の形状

ここでは $f(\mathbb{D})$ が slit mapping であることを確認する。

$$f(z) = \frac{z}{(1 - \zeta z)(1 - \bar{\zeta} z)} \quad \zeta = e^{i\beta}, 0 < \beta < \pi$$

$f(e^{i\theta})$ は

$$\begin{aligned} f(e^{i\theta}) &= \frac{e^{i\theta}}{(1 - e^{i(\beta+\theta)})(1 - e^{-i(\beta-\theta)})} \\ &= \frac{1}{4 \sin \frac{\beta-\theta}{2} \sin \frac{\beta+\theta}{2}} \\ &= \frac{1}{2(\cos \theta - \cos \beta)} \end{aligned}$$

で表される。従って $f(\mathbb{D})$ は slit mapping であることがわかる。尚、 $\beta = \frac{\pi}{2}$ 、 $\beta = \frac{\pi}{3}$ における f の像領域はそれぞれ図 1、図 2 で描かれる。

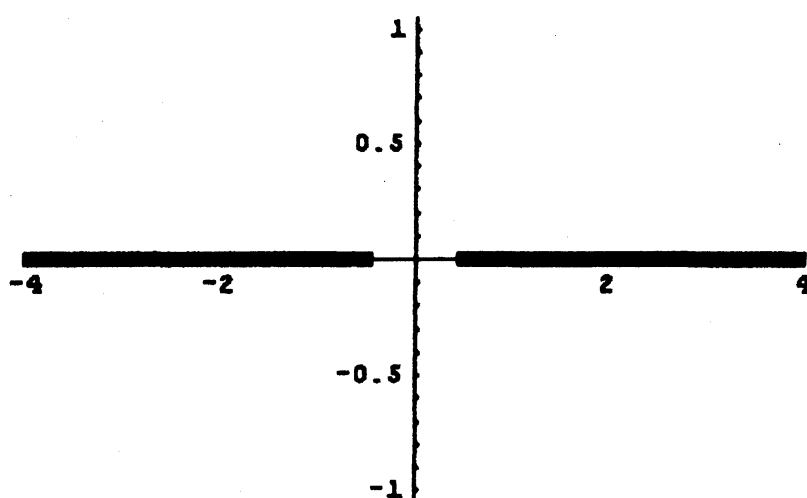


図 1. $f(\mathbb{D})$ の領域 (太線を除いた領域). $\beta = \frac{\pi}{2}$.

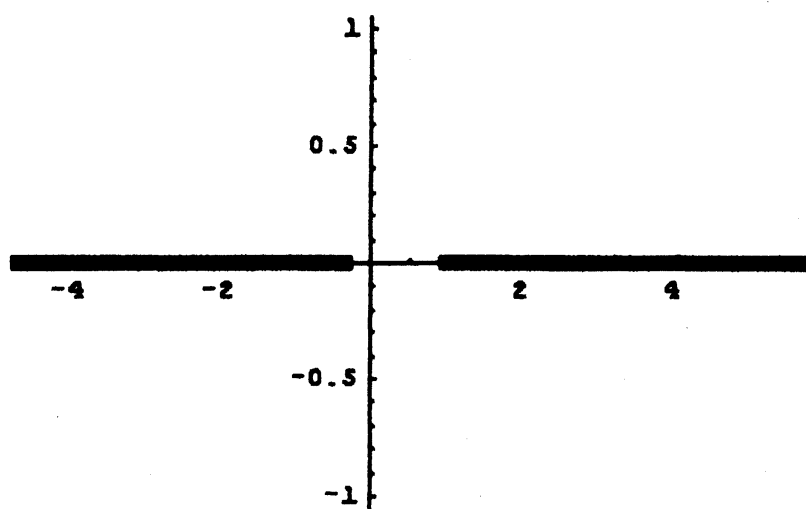


図 2. $f(\mathbb{D})$ の領域 (太線を除いた領域). $\beta = \frac{\pi}{3}$.

参考文献

- [1] Y. C. Kim, S. Ponnusamy, T. Sugawa, *Mapping properties of nonlinear integral operators and pre-Schwarzian derivatives*, J. Math. Anal. Appl. **299**(2004), no.2 433-447.
- [2] Y. C. Kim, T. Sugawa, *Growth and coefficient estimates for uniformly locally univalent functions on the unit disk*, Rocky Mountain J. Math. **32**(2002), no.1, 179-200.
- [3] J. A. Cima, J. A. Pfaltzgraff, *A Banach space of locally univalent functions*, Michigan Math. J. **17**(1970), 321-334.
- [4] Y. J. Kim, E. P. Merkes, *On certain convex sets in the space of locally schlicht functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **196**(1974), 217-224.