

Multiplicity のある Cauchy 問題

北大 理学部 山本和広

$\Omega = [0, T] \times \mathbb{R}^n$ とし, 次のような作用素 $P(t, x, D_t, D_x)$ に
対する Cauchy 問題を考える。

$$P(t, x, D_t, D_x) = D_t^m + \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ \alpha_0 < m}} a_\alpha(t, x) D_t^{\alpha_0} D_x^{\alpha'}$$

ここで $a_\alpha(t, x) \in \mathcal{B}^\infty(\Omega)$ とし $\alpha = (\alpha_0, \alpha')$, $D_x = -i\partial/\partial x$.

本稿においては エネルギー不等式により, 2つの型
の作用素に対する Cauchy 問題の一意可解性を示す。

はじめに次の3つの条件を満たす方程式を考える。

$$(A.1) \quad P_m(t, x, \tau, \xi) = \prod_{j=1}^s (|\tau - \lambda_j|^{m_j} |\tau - \lambda_{s+j}|^{m_j}) \prod_{j=s+1}^{m-N+s} |\tau - \lambda_j|$$

ここで $N = \sum_{j=1}^s m_j$, $\lambda_j(t, x, \xi)$ は実数で, $\in \mathcal{B}(\Omega \times S^{n-1})$ if $|\xi| = 1$.

$$(A.2) \quad \forall (i, j) \neq (k, s+k) \quad (k=1, \dots, s) \text{ に対して}$$

$$|(\lambda_i - \lambda_j)(t, x, \xi)| \geq \delta |\xi|$$

$$(A.3) \quad \forall k \quad (k=1, \dots, s) \text{ に対して } P(t, x, D_t, D_x) \text{ は次のよ}$$

うに書ける。

$$P(t, x, D_t, D_x) = \sum_{l=0}^{m_k} Q_{k,l} (\lambda_k)^{m_k-l} (t, x, D_t, D_x)$$

ここで $\lambda_k = D_t - \lambda_k(t, x, D_x)$, $Q_{k,l}(t, x, D_t, D_x)$ は $(m - m_k)$ 階の擬微分作用素. かつ主表象 $g_{k,l}(t, x, \tau, \xi)$ は次の条件を満たす.

$$g_{k,l}|_{\tau=\lambda_k} \equiv 0 \quad \text{mod } t^{-2}(\lambda_k - \lambda_{s+k})$$

定理 1. 条件 (A.1) ~ (A.3) を満たす微分方程式に対する Cauchy 問題は $C^\infty([0, T]; H_\infty(\mathbb{R}^n))$ で一意可解である。

本講演では、定理 1 の拡張である次のような条件を満たす作用素の Cauchy 問題に対する一意可解性について主に話した。

以下簡単の為 $P_m(t, x, \tau, \xi)$ は $|x|$ 十分大きい所で x に indep. と仮定する。

$$(H.1) \quad P_m(t, x, \tau, \xi) = \prod_{j=1}^m (\tau - \lambda_j(t, x, \xi))$$

ここで $\lambda_j(t, x, \xi)$ は実かつ $|\xi|=1$ の時 $\mathcal{B}(\Omega \times S^{n-1})$ の元とする。

$$(H.2) \quad \forall (i, j) \quad (i, j = 1, \dots, m) \text{ に対して}$$

$$\{\tau - \lambda_j, \tau - \lambda_i\}(t, x, \xi) \equiv 0 \quad \text{mod } t^{-1}(\lambda_i - \lambda_j)$$

ここで $\{, \}$ は Poisson bracket を示す。

(H.3) $P(t, x, D_t, D_x)$ は次のように書ける。

$$P = \Lambda_1 \cdots \Lambda_m + \sum_{0 \leq k < m} t^{-(m-k)} \gamma_{i_1 \cdots i_k} \Lambda_{i_1} \cdots \Lambda_{i_k} + P_{m-r}(t, x, D_t, D_x),$$

ここで r は特性根 $\{\lambda_i\}_{i=1, \dots, m}$ の $\Omega \times S^{n-1}$ における最大の多重度を示し, P_{m-r} は $(m-r)$ 階の t に関する微分作用素となっているような擬微分作用素である。 $\{i_1, \dots, i_k\} = \emptyset$ なるは $k=0$, $\Lambda_{i_1} \cdots \Lambda_{i_k} = I$ とする。

定理2. 条件 (H.1) ~ (H.3) を満たす方程式に対する Cauchy 問題は $C^\infty([0, T]; H_m(\mathbb{R}^n))$ で一意可解的である。

以下定理2の略証を示す。初めに条件 (A.3) と条件 (H.3) の関係を与える次の命題を示す。

命題1. $J = \{j_1, \dots, j_k\}$ を $\{1, \dots, m\}$ の部分集合とし $\{\lambda_j\}_{j \in J}$ の $\Omega \times S^{n-1}$ における最大の multiplicity を r_1 とする。今 $A(t, x, D_t, D_x)$ を $k-r_1$ 階の t に関する微分作用素となっている擬微分作用素とする時

$$A(t, x, D_t, D_x) = \sum_{\ell=0}^{k-r_1} \gamma_{j_1 \cdots j_\ell} \Lambda_{j_1} \cdots \Lambda_{j_\ell}$$

ここで $\gamma_{j_1 \cdots j_\ell}(t, x, D_x)$ は 0 階で $\{j_1, \dots, j_\ell\} \subset J$ 。

命題 1 は 次のような 2 つの系を持つ。

(系 1) P が (A.1), (A.2), (A.3) を満たせば, (H.3) を $\gamma = \max_{1 \leq j \leq s} m_j + 1$ として満たす。

(系 2) P が (H.1) ~ (H.3) を満たせば P は次のように表現される。

$$P = \Lambda_1 \cdots \Lambda_m + \sum_{0 \leq k \leq m} t^{-(m-k)} \gamma_{i_1 \cdots i_k} \Lambda_{i_1} \cdots \Lambda_{i_k}$$

上の系 2 において $\gamma_{i_1 \cdots i_k}$ の自由度については次の補題による。これは (H.2) より導かれる。

補題 1. $\{i_1, \dots, i_m\}$ を $\{1, \dots, m\}$ の permutation とする。この時

$$\Lambda_{i_1} \cdots \Lambda_{i_m} = \Lambda_1 \cdots \Lambda_m + \sum_{0 \leq k \leq m} t^{-(m-k)} \tilde{\gamma}_{i_1 \cdots i_k} \Lambda_{i_1} \cdots \Lambda_{i_k}$$

ここで $\tilde{\gamma}_{i_1 \cdots i_k}$ は 0 階で $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, m\}$

1) エネルギー不等式

我々は次のような函数空間を用いる。 $k \geq 0$ 整数, $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\|u(t)\|_{-k, \lambda}^2 = \sum_{j=0}^k \|D_t^j u(t)\|_{s+k-j}^2$$

$$\|u\|_{k,\lambda}^2 = \int_0^T \|u(t)\|_{k,\lambda}^2 dt$$

ここで $\|\cdot\|_\lambda$ は Sobolev space $H_s(\mathbb{R}^n)$ のノルムを示す。

定理 3, $P(u, x, D_x, D_x)$ が (H.1) ~ (H.3) を満たせば $Pu = f$, $D_t^j u|_{t=0} = g_j$ ($j=0, \dots, m-1$) とし, $u \in C^\infty([0, T]; H_\infty(\mathbb{R}^n))$ に対して 次のエネルギー不等式が成り立つ。 $\forall k \geq 0$ 整数 と $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ に対して $N = N(k, \lambda)$ が存在して,

$$(*) \quad \|u(t)\|_{k+m-r,\lambda}^2 \leq C \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} \|g_j\|_{\lambda+k+m+N-j}^2 + \|f(0)\|_{N-m, k+m}^2 + \int_0^t \|D_t^{N-m} f(\tau)\|_{k,\lambda}^2 d\tau \right\}.$$

(証明); $I = \{i_1, \dots, i_\ell\} \subset \{1, \dots, m\}$ と書き, 長さ $|I| = \ell$ と記す。

$$(A_I u)(t, x) = t^{-(m-\ell)} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_\ell} u(t, x).$$

と定め, $I = \emptyset$ ならば $|I| = 0$, $A_I = t^{-m}$ とする。

$I' = (i_0, I) \subset \{1, \dots, m\}$ とした時

$$\lambda_{i_0}(A_I u) = -(m-k)t^{-1}(A_I u) + t^{-1}(A_{I'} u).$$

λ_{i_0} は 1 階の双曲型であるから, $\Phi_I(t) = \sum_{j=0}^k (\|A_I u(t)\|_{k-j,\lambda}^2 / t^{2j+1})$ とすれば,

$$(*)_I \quad t(\partial \Phi_I / \partial t) \leq C \{ \Phi_I(t) + t \Phi_I(t) + \Phi_{I'}(t) \}$$

今 $(*)_1$ と $|I|=0$ から $|I|=m-1$ まで加えて, $|I|=m$ に対して系と補題 1 を用いるのは

(**) $t(\partial\phi/\partial t) \leq C\{\phi(t) + t\phi(t) + t^{-2b-1}\|PU\|_{p,s}^2\}$ と得る。但し $z = z''$

$$\phi(t) = \sum_{|I| \leq m-1} \phi_I(t)$$

十分大きい N に対して $v(t, x) = O(t^{N+1})$ であれば

(**) より

$$\begin{aligned} \sum_{|I| \leq m-1} \|t^{-(m-1)} \Lambda_{i_1} \dots \Lambda_{i_{m-1}} v(t)\|_{p,s}^2 \\ \leq C \int_0^t \tau^{-N_1} \|PU(\tau)\|_{p,s}^2 d\tau \end{aligned}$$

左辺に命題 1, 右辺に Taylor 展開を施すと,

$$(***) \quad \|v(t)\|_{p+m-r,s}^2 \leq C \int_0^t \|D_t^{N-m}(PU)(\tau)\|_{p,s}^2 d\tau$$

と得る。今 $v(t, x) = u(t, x) - \sum_{j=0}^N (it)^j (D_t^j u)(0, x)/j!$ とすると (***) より Energy 不等式 (*) と得る。(終)

2) 存在定理

簡単な計算より P が (H.1) ~ (H.3) を満たせば, $P^*(u, D_t, D_x)$ も (H.1) ~ (H.3) を満たす。

(命題 2)

P が (H.1) ~ (H.3) を満たす時 $\forall k \geq m-1$, 整数

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ に対して $\exists N = N(\lambda, k)$ 次の不等式を満たす。

$$(*) \quad \|v\|_{k, \lambda-N}^2 \leq C \|P^* v\|_{k+N, \lambda-N}^2$$

ここで $v \in C^\infty([0, T] \times H_\infty(\mathbb{R}^n))$, $\text{supp } v \subset (-\infty, T] \times \mathbb{R}^n$ 。

(証明) ; 定理 3 と同じ記号を用いると,

$$-t(\partial_t^2 v) \leq C \{ \psi(t) + t \psi(t) \} + t^{-2k-1} \|P^* v\|_{k, \lambda}^2$$

従って良く知られた不等式より

$$(**) \quad t^{N_1} \|v(t)\|_{k, \lambda}^2 \leq C \int_t^T \tau^{N_1-1-2k} \|P^* v(\tau)\|_{k, \lambda}^2 d\tau$$

部分積分及び P^* が t の方向に non-characteristic であると言う事実より導かれる不等式

$$\int_0^T \|v(t)\|_{k, \lambda}^2 dt \leq C \int_0^T t^{2N} \|D_t^N v(t)\|_{k, \lambda}^2 dt$$

$$\|D_t^N v(t)\|_{k, \lambda}^2 \leq C (\|v(t)\|_{k, \lambda+N}^2 + \|P^* v(t)\|_{k+N-1, \lambda}^2),$$

ここで N は λ, k に indep. な任意の整数, を用いると

(**) より (*) が従う。

(終)

$H_{k, \lambda}(\Omega)$ を norm $\|\cdot\|_{k, \lambda}$ で完備な空間とすると,

$T = \infty$, i.e., $\Omega = \overline{\mathbb{R}_{n+1}^+}$ の時 $\forall k, \lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$H_{k, \lambda}(\overline{\mathbb{R}_{n+1}^+})$ は定義されて

$$(H_{k, \lambda}(\bar{\mathbb{R}}_{n+1}^+))' = \dot{H}_{-k, -\lambda}(\bar{\mathbb{R}}_{n+1}^+) \quad (\text{see [1]})$$

今 $f \in C^\infty([0, T]; H_\infty(\mathbb{R}^n))$ に対して 命題 2 より

$$|(f, v)| \leq C \|P^* v\|_{N, \lambda-N} \quad (k=0)$$

が成る。従って $\exists u \in H_{-N, -\lambda+N}(\bar{\mathbb{R}}_{n+1}^+)$ の元が存在して

$$(*) \quad (f, v) = (u, P^* v) \quad \text{supp } v \subset (-\infty, T] \times \mathbb{R}^n$$

$pu = f$ は $\mathcal{D}'(\Omega)$ より $\forall k \in \mathbb{R}$ に対して $u \in H_{k, -\lambda-k}$

(12) が従う (see [1]) が $(*)$ より

$$pu = f \quad D_t^j u|_{t=0} = 0 \quad (j=0, \dots, m-1)$$

を得る。

(終)

3) example

$$P = (D_t - t^l x^n D_x)^2 (D_t + t^l x^n D_x)^2 + P_3(t, x, D_t, D_x)$$

[2] によれば 必要条件として

$$P_3 = (aD_t + bD_x)(D_t - t^l x^n D_x)(D_t + t^l x^n D_x) \\ + cD_t^2 + dD_t D_x + eD_x^2 + fD_t + gD_x + h$$

で, $b = t^{l-1} x^n b'$, $d = t^{l-2} x^n d'$, $e = t^{2(l-2)} x^{2n} e'$, $g = t^{l-3} x^n g'$

とすれば 我々の条件 (H.3) を満たす。

[1] L. Hörmander: Linear partial differential operators, Springer

[2] V.Ia. Ivrii and V.M. Petkov: Necessary conditions for the correctness of Uspekh. Math. Nauk 29, 3-70.