

半線形発展方程式の可制御性について

埼玉大理 辻岡和夫

§ 序 ヒルベルト空間 X において, 非線形項をもった発展方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au + Bf + F(u), & 0 < t < T & (1) \\ u(0) = u_0 \in X & & (2) \end{cases}$$

の可制御性を論ずる。ここで, A は X における C_0 半群 e^{tA} ($t \geq 0$) の生成作用素とし, B はヒルベルト空間 Y から X への有界線形作用素, F は X 上の非線形作用素で, リプシッツ条件

$$(F1) \quad \|F(u) - F(v)\| \leq C \|u - v\|$$

(C は定数, $u, v \in X$)

をみたすものとする。 $f \in L^2(0, T; Y)$ を制御とし, これに対応して (1)-(2) より定まる $u(t) = u_f(t)$ を軌道という。

(F1) のもとで u_f は次の積分方程式の解である:

$$u(t) = e^{tA} u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} (Bf(s) + F(u(s))) ds$$

$$(0 \leq t \leq T)$$

以後 (1)-(2) の解とはこの積分方程式の解のこととする。

簡単のため $u_0 = 0$ とし, 時刻 $T > 0$ における到達可能集合を

$$R_F(T) = \{ u_T \in X; u_T = u_f(T), f \in L^2(0, T; Y) \}$$

$$R(T) = R_0(T) = \left\{ \int_0^T e^{(T-s)A} Bf(s) ds; f \in L^2(0, T; Y) \right\}$$

とおく. $\overline{R_F(T)} = X$ のとき (1) は可制御であるという。

§1 では空間1次元の半線形熱方程式の可制御性を論じた

Zhou ([13]) の概要を紹介し §2 で問題点を述べる。

§1 Zhouの結果 空間1次元における半線形熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, u) + g(x) f(t) \quad (3)$$

$$(0 < x < l, 0 < t < T)$$

に初期条件

$$u(x, 0) = 0 \quad (4)$$

および境界条件

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (5)$$

を付したもののついての可制御性が $X = L^2(0, l)$, $Y = \mathbb{R}^1$

$Au = u''$ (導関数は $L^2(0, l)$ における超関数の意味)

$$u(t) = e^{tA}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} (Bf(s) + F(u(s))) ds$$

以後 (1)-(2) の解とはこの積分方程式の解のこととする。
簡単のため $u_0 = 0$ とし, 時刻 $T > 0$ における到達可能集合を

$$R_F(T) = \{u_T \in X; u_T = u_f(T), f \in L^2(0, T; Y)\}$$

$$R(T) = R_0(T) = \left\{ \int_0^T e^{(T-s)A} B f(s) ds; f \in L^2(0, T; Y) \right\}$$

とおく。可制御性を論じるときには

$$(F2) \quad \sup_{u \in X} \|F(u)\| < \infty$$

なる条件を置く。 $R_F(T) = X$ のとき, (1) は可制御であるという。§1 では空間1次元の半線形熱方程式の可制御性を論じた Zhou ([1]) の結果を紹介し, §2 でその問題を述べる。

§1 Zhou の結果 空間1次元における半線形熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, u) + g(x)f(t) \quad (3)$$

$$(0 < x < l, 0 < t < T)$$

に初期条件

$$u(x, 0) = 0 \quad (4)$$

および境界条件

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (5)$$

を付したもののついでの可制御性が

$$X = L^2(0, l), \quad Y = \mathbb{R}^1$$

$$Au = u'' \quad (\text{導関数は } L^2(0, l) \text{ の超関数の意味で})$$

$$D(A) = H^2(0, l) \cap \{u; u(0) = u(l) = 0\}$$

$$Bf = g(x)f, \quad g(x) \in L^2(0, l)$$

として与える。 A は X における自己共役作用素であり、固有値 $\lambda_n = -\frac{\pi^2 n^2}{l^2}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) および対応する正規化された固有ベクトル $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n}{l} x$ を持つ。
(F1) および (F2) に対応して

$$F(x, u) : [0, l] \times X \rightarrow X$$

に於いて、次の (F1)', (F2)' の仮定を置く。

$$(F1)' \quad \|F(x, u) - F(x, v)\| \leq C \|u - v\|$$

$$(F2)' \quad \sup_{u \in X} \|F(x, u)\| < \infty$$

g に関して、次の仮定を置く。

仮定 (g) 　ある $M_g > 0$ と整数 $I > 0$ が存在して

$$|g_n| \geq M_g |\lambda_n|^I \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

ただし、 $\hookrightarrow$ として $g_n = (g, \varphi_n)_{L^2(0, l)}$

定理 1 (Zhou [1]) (F1)', (F2)' および

仮定 (g) のもとで (3)-(4)-(5) は可制御である。

この定理の証明は次の様に行われた： 先ず $F(x, u)$ を Fourier 展開して

$$F(x, u) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(u) \varphi_n(x)$$

となるか" $(F_2)'$ あり

$$\sup_{u \in X} \|F(x, u)\|^2 = \sup_{u \in X} \sum_{n=1}^{\infty} |F_n(u)|^2$$

こゝで"

$$\hat{F}^{(N)}(x, u) = \sum_{n=1}^N F_n(u) \varphi_n(x)$$

とおけば"

$$\begin{aligned} \sup_{u \in X} \|\hat{F}^{(N)}(x, u) - F(x, u)\|^2 \\ = \sup_{u \in X} \sum_{n=N+1}^{\infty} |F_n(u)|^2 \rightarrow 0 \\ (N \rightarrow \infty) \quad \dots (6) \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{第一段} \quad \text{任意の } N > 0, \delta > 0 \text{ に対し} \\ \quad D = D(e^{\delta A^{\frac{1}{2}}}) \subset R_{\hat{F}^{(N)}}(T) \\ \text{第二段} \quad D \subset \overline{R_F(T)} \end{array} \right.$$

が示されれば $\overline{D} = X$ だから $\overline{R_F(T)} = X$

すなわち (3)-(4)-(5) は可制御である。

第一段 $\Rightarrow$ 第二段 X 値関数として

$$F^{(N)}(u) = F^{(N)}(\cdot, u), \quad F(u) = F(\cdot, u)$$

$$u(t) = u(\cdot, t), \quad g = g(\cdot)$$

など のようにかく、(6) により 次のことがいえる：

$$\forall \varepsilon > 0, \forall u_T \in D \quad \exists N.$$

$$\sup_{\substack{0 \leq t \leq T \\ u \in X}} \left\| \int_0^t e^{(t-s)A} (\hat{F}^{(N)}(u(s)) - F(u(s))) ds \right\| < \varepsilon$$

カ一般より $u_T \in R \hat{F}^{(N)}(T)$ だから

$$\exists \hat{u}(t), \hat{f}(t)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \hat{u}(T) = u_T \\ \hat{u}(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} (g \hat{f}(s) + \hat{F}^{(N)}(\hat{u}(s))) ds \end{cases}$$

$u = u_{\hat{f}}$ とおくと

$$u(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} (g \hat{f}(s) + F(u(s))) ds$$

$$\therefore \|u(t) - \hat{u}(t)\|$$

$$= \left\| \int_0^t e^{(t-s)A} (\hat{F}^{(N)}(\hat{u}(s)) - F(u(s))) ds \right\|$$

$$\leq \left\| \int_0^t e^{(t-s)A} (\hat{F}^{(N)}(\hat{u}(s)) - F(\hat{u}(s))) ds \right\|$$

$$+ \left\| \int_0^t e^{(t-s)A} (F(\hat{u}(s)) - F(u(s))) ds \right\|$$

$$\leq \varepsilon + C \int_0^t \|\hat{u}(s) - u(s)\| ds$$

Gronwall の不等式により

$$\|u(t) - \hat{u}(t)\| \leq \varepsilon e^{ct} \leq \varepsilon e^{cT}$$

$t=T$ とおくと

$$\|u(T) - u_T\| \leq \varepsilon e^{cT}$$

カ一般を示すため Fattorini - Russell ([2]) の ε -
メイト問題についての結果より、次の命題が導かれる:

$$\forall u \in L^2(0, T; X), \exists f \in L^2(0, T; Y)$$

s.t.

$$\begin{cases} u_T = \int_0^T e^{(T-s)A} (g f(s) + \hat{F}^{(N)}(u(s))) ds \\ \dots (7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \|f\| \leq C_1(u_T) + C(N, F) \\ \dots (8) \end{cases}$$

これが $\varepsilon - \chi$ 問題に帰着されるのは

$$u_T = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \varphi_n$$

i.e.,

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{(T-s)\lambda_n} (g_n f(s) + \hat{F}_n^{(N)}(u(s))) ds \\ = \beta_n \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{(T-s)\lambda_n} f(s) ds \\ = c_n \equiv \frac{1}{g_n} \left\{ \beta_n - \int_0^T \hat{F}_n^{(N)}(u(s)) ds \right\} \end{aligned}$$

と表わすことが示される。

任意の $u_T \in D$ に対し

$$\begin{cases} u_T = \int_0^T e^{(T-s)A} (g f_{k+1}(s) + \hat{F}^{(N)}(u_k(s))) ds \\ \dots (9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{k+1}(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} (g f_{k+1}(s) + \hat{F}^{(N)}(u_k(s))) ds \\ \dots (10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \|f_k\| \leq C(u_T, N, F) \\ (11) \end{cases}$$

要する $\{u_k\} \subset L^2(0, T; X), \{f_k\} \subset L^2(0, T; Y)$

を強収束することができる。『 (11) により $\{f_k\}$ は $L^2(0, T; Y)$ の有界列だから、部分列をとれば弱収束する。この部分列を同じ $\{f_k\}$ で表わすことにする。写像

$$f \in L^2(0, T; Y) \rightarrow \int_0^t e^{(t-s)A} g f(s) ds \in L^2(0, T; X)$$

は完全連続だから $\{u_k\}$ は $L^2(0, T; X)$ で強収束する。

Zhou によれば $\{f_k\}, \{u_k\}$ の $L^2(0, T; Y),$

$L^2(0, T; X)$ における弱, 強極限を f, u とすると

(9), (10) で極限移行ができて

$$u_T = \int_0^T e^{(T-s)A} (g f(s) + \hat{F}^{(w)}(u(s))) ds$$

$$u(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} (g f(s) + \hat{F}^{(w)}(u(s))) ds$$

||e

$$u_T \in R \hat{F}^{(w)}(T) \quad \square$$

Remark 上の証明中 『 ... □』で $\sim$ を施した部分の詳細については $\{f_k\}$ の弱収束する部分列 $\{f_{n_k}\}$ が存在し (10) より

$$u_{n_k}(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} (g f_{n_k}(s) + \hat{F}^{(w)}(u_{n_k}(s))) ds$$

$k \rightarrow \infty$ とし

$$u(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} (g f(s) + \hat{F}^{(w)}(u(s))) ds$$

は確かであるが (9) より

$$u_T = \int_0^T e^{(T-s)A} (g f_{n_k}(s) + \hat{F}^{(N)}(u_{n_{k-1}}(s))) ds$$

となり, 右辺第2項において $k \rightarrow \infty$ のとき 極限移行が
できない. 従って $u_T \in R_F(T)$ が結論されない.

§2 問題提起 (F1) (F2)のもとで (1)の可制
御性が 線形系

$$\frac{du}{dt} = Au + Bf \quad 0 < t < T \quad (12)$$

の可制御性に帰着されるのではないかと, すなわち

$$(Z) \quad \overline{R(T)} = X \Rightarrow \overline{R_F(T)} = X$$

が成り立つのではないかと. 筆者は試みたが, 講演中, 神戸
大学の中根氏にその証明の誤まりを指摘された. 又, 大阪大
学の坂和, 藤井の両氏には文献 ([3]) を教えて頂いた. これ
によると, A が解析半群の生成作用素のとき, 次の成り立つ.
「任意の $x \in X$ と $\varepsilon > 0$ に対して, 十分小さい $T > 0$ を
とれば $u_f(T) \in R_F(T)$ が存在して

$$\|x - u_f(T)\| < \varepsilon$$

証明は次の通り: $\varepsilon > 0$ に対して $T > 0$ を十分小さく
とれば

$$\int_0^T \|e^{(T-s)A} F(u(s))\| ds < \frac{\varepsilon}{2} \quad (13)$$

が、すべての $u \in L^2(0, T; X)$ に成り立つ。 e^{tA} の解析性と (12) の可制御性により、 $\overline{R(T)} = X$ であるから $f \in L^2(0, T; Y)$ が存在して

$$\left\| x - \int_0^T e^{(T-s)A} B f(s) ds \right\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (14)$$

が成り立つ。(13), (14) により

$$\begin{aligned} & \|x - u_T(T)\| \\ &= \left\| x - \int_0^T e^{(T-s)A} B f(s) ds - \int_0^T e^{(T-s)A} F(u(s)) ds \right\| \\ &\leq \left\| x - \int_0^T e^{(T-s)A} B f(s) ds \right\| + \left\| \int_0^T e^{(T-s)A} F(u(s)) ds \right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad . \end{aligned}$$

上の結果は

$$\overline{R(T)} = X \Rightarrow \bigcup_{T>0} \overline{R_F(T)} = X$$

と表わせる。与えられた $T > 0$ に對して、(Z) 又は Zhou の結果が正しいかどうかは未解決である。

References

[1] Zhou, X. Z. A note on approximate controllability for semilinear one-dimensional

heat equation, Appl. Math. Optim 8
: 275-285 (1982).

[2] Fattorini, H. O., Russell, D. L.,
Exact controllability theorem for linear
parabolic equations in one space dimension
, Arch. Rat. Mech. Anal. 43 : 272-292.
(1971)

[3] Fujii, N, Sakawa, Y, Controll-
ability for nonlinear differential equations
in Banach space, Automatic Control Theory
and Applications, Vol. 2, No. 2, 44-46
May (1974).